

Mathématiques

Chapitre B10
Dimension

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

Chapitre B10. Dimension

- I. Dimension d'un espace vectoriel
- II. Dimension et sous-espaces vectoriels
- III. Applications linéaires en dimension finie

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

- A. Définition et existence
- B. Exemples
- C. Théorèmes

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

III. Applications linéaires en dimension finie

I. Dimension d'un espace vectoriel

A. Définition et existence

B. Exemples

C. Théorèmes

Définition

On dit qu'un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Définition

On dit qu'un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Lemme 2

Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Définition

On dit qu'un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Lemme 2

Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie

$\mathcal{L}$ une famille libre finie de vecteurs de E

$\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E .

Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$$

Lemme 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie

$\mathcal{L}$ une famille libre finie de vecteurs de E

$\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E .

Alors :

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$$

Démonstration. Soit $m = \text{Card}(\mathcal{L})$, $p = \text{Card}(\mathcal{G})$.

On raisonne par l'absurde, en supposant que $m > p$.

On note :

$$\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m) \quad \text{et} \quad \mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$$

Sous-lemme 1

Soit k un entier tel que $0 \leq k \leq p - 1$. Supposons que la famille

$$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$$

est génératrice. Alors il est possible d'intervertir les vecteurs $u_{k+1}, \dots, u_p$ de façon à ce que la famille

$$\mathcal{G}_{k+1} = (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_p)$$

soit génératrice.

Démonstration du sous-lemme 1.

$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$ génératrice

$$v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_p u_p$$

Démonstration du sous-lemme 1.

$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$ génératrice

$$v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_p u_p$$

L'un des μ_j est non-nul,

Démonstration du sous-lemme 1.

$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$ génératrice

$$v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_p u_p$$

L'un des μ_j est non-nul, μ_{k+1} quitte à intervertir.

$$u_{k+1} = -\frac{1}{\mu_{k+1}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - v_{k+1} \\ + \mu_{k+2} u_{k+2} + \dots + \mu_p u_p)$$

Démonstration du sous-lemme 1.

$\mathcal{G}_k = (v_1, \dots, v_k, u_{k+1}, \dots, u_p)$ génératrice

$$v_{k+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k + \mu_{k+1} u_{k+1} + \dots + \mu_p u_p$$

L'un des μ_j est non-nul, μ_{k+1} quitte à intervertir.

$$u_{k+1} = -\frac{1}{\mu_{k+1}}(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k - v_{k+1} \\ + \mu_{k+2} u_{k+2} + \dots + \mu_p u_p)$$

$$\implies \mathcal{G}_k \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$$

$$\implies \text{Vect}(\mathcal{G}_k) \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$$

$$\implies E \subseteq \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$$

$$\implies E = \text{Vect}(\mathcal{G}_{k+1})$$



Suite de la démonstration du lemme 1.

On a supposé : $\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m)$ avec $m > p$

$\mathcal{G}_0 = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice

$\implies \mathcal{G}_1 = (v_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice

$\vdots$

$\implies \mathcal{G}_p = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ est génératrice

$$v_{p+1} = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p$$

Contradiction donc $m \leq p$.



Définition

On dit qu'un espace vectoriel est **de dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie.

Lemme 2

Tout espace vectoriel de dimension finie possède une base.

Lemme 2

Tout ev de dimension finie possède une base.

Démonstration.

- ▶ E : ev de dimension finie
- ▶ N : ensemble des cardinaux de toutes les familles libres de E
- ▶ Alors N est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée.
- ▶ Soit $n = \text{Max}(N)$
- ▶ Soit $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_n)$ libre
- ▶ Cette famille est une base de E . □

Sous-lemme 2

Une famille libre maximale de E est une base de E .

Sous-lemme 2

Une famille libre maximale de E est une base de E .

Démonstration du sous-lemme 2.

Sous-lemme 2

Une famille libre maximale de E est une base de E .

Démonstration du sous-lemme 2.



Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Définition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. On appelle **dimension de E** et on note **$\dim E$** le cardinal de ses bases.

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Alors toutes les bases de E ont même cardinal.

Démonstration. Comme E est de dimension finie, alors d'après le lemme 2 il possède une base.

Soit $\mathcal{B}$ une base de E n son cardinal

Soit $\mathcal{B}'$ une base de E n' son cardinal

$\mathcal{B}$ libre et $\mathcal{B}'$ génératrice $\implies n \leq n'$

$\mathcal{B}$ génératrice et $\mathcal{B}'$ libre $\implies n' \leq n$

$\implies n = n'$



I. Dimension d'un espace vectoriel

A. Définition et existence

B. Exemples

C. Théorèmes

Exemples fondamentaux

$$(i) \dim \mathbb{R}^n = n$$

Exemples fondamentaux

$$(i) \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$(ii) \dim \{0\} = 0$$

Exemples fondamentaux

$$(i) \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$(ii) \dim \{0\} = 0$$

$$(iii) \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$$

Exemples fondamentaux

$$(i) \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$(ii) \dim \{0\} = 0$$

$$(iii) \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$$

$$(iv) \dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$$

Exemples fondamentaux

$$(i) \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$(ii) \dim \{0\} = 0$$

$$(iii) \dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1$$

$$(iv) \dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$$

$$(v) \mathbb{R}[X] \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \text{ne sont pas de dimension finie.}$$

Remarque

L'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- ▶ un $\mathbb{C}$ -ev de dimension 1,
- ▶ un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.

Remarque

L'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- ▶ un $\mathbb{C}$ -ev de dimension 1, de base (1) ,
- ▶ un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2, de base $(1, i)$.

Remarque

L'ensemble $\mathbb{C}$ est :

- ▶ un $\mathbb{C}$ -ev de dimension 1,
- ▶ un $\mathbb{R}$ -ev de dimension 2.

La dimension d'un $\mathbb{K}$ -ev dépend du corps $\mathbb{K}$.

On note $\dim_{\mathbb{K}} E$ au lieu de $\dim E$.

Par exemple :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$$

Définitions

Espace vectoriel de dimension 1 : droite vectorielle

Espace vectoriel de dimension 2 : plan vectoriel

Exemples

(i) I un intervalle, a fonction continue.

L'ensemble des solutions de :

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0$$

est une droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Exemples

(i) I un intervalle, a fonction continue.

L'ensemble des solutions de :

$$y'(t) - a(t)y(t) = 0$$

est une droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

En effet :

$$\mathcal{S}_0 = \{ \lambda y_0 \mid \lambda \in \mathbb{R} \} = \text{Vect}(y_0)$$

où $y_0(t) = e^{A(t)}$ avec A une primitive de a .

La fonction y_0 est bien non-nulle.

Exemples

$$(ii) (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des solutions de :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exemples

$$(ii) (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des solutions de :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet :

$$\mathcal{S}_0 = \{ \alpha y_1 + \beta y_2 \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect}(y_1, y_2)$$

où selon les cas :

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} \qquad y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

La famille (y_1, y_2) est libre.

Exemples

$$(ii) (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des solutions de :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet :

$$\mathcal{S}_0 = \{ \alpha y_1 + \beta y_2 \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect}(y_1, y_2)$$

où selon les cas :

$$y_1(t) = e^{\lambda_0 t} \qquad y_2(t) = te^{\lambda_0 t}$$

La famille (y_1, y_2) est libre.

Exemples

$$(ii) (a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$$

L'ensemble des solutions de :

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. En effet :

$$\mathcal{S}_0 = \{ \alpha y_1 + \beta y_2 \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect}(y_1, y_2)$$

où selon les cas :

$$y_1(t) = e^{ut} \cos vt \quad y_2(t) = e^{ut} \sin vt$$

La famille (y_1, y_2) est libre.

Exemples

(iii) $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$

L'ensemble des suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemples

$$(iii) (a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$$

L'ensemble des suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ \alpha(v_n) + \beta(w_n) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \text{Vect}((v_n), (w_n)) \end{aligned}$$

où selon les cas : $v_n = \lambda_1^n$ et $w_n = \lambda_2^n$

La famille $((v_n), (w_n))$ est libre.

Exemples

$$(iii) (a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K}^2$$

L'ensemble des suites telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

est un plan vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. En effet :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{ \alpha(v_n) + \beta(w_n) \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \} \\ &= \text{Vect}((v_n), (w_n)) \end{aligned}$$

où selon les cas : $v_n = \lambda_0^n$ et $w_n = n\lambda_0^n$

La famille $((v_n), (w_n))$ est libre.

Proposition (dimension d'un produit)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Si E et F sont de dimensions finies alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$$

Proposition (dimension d'un produit)

Si E et F sont de dimensions finies alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$$

Exemple

Il existe un isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p &\longrightarrow \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_p)) &\longmapsto \end{aligned}$$

Proposition (dimension d'un produit)

Si E et F sont de dimensions finies alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

Exemple

Il existe un isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+p} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_p)) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p) \end{aligned}$$

Proposition (dimension d'un produit)

Si E et F sont de dimensions finies alors $E \times F$ est de dimension finie, et :

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

Exemple

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+p} \\ ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_p)) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_p)\end{aligned}$$

Un isomorphisme conserve la dimension donc :

$$\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p) = n + p = \dim \mathbb{R}^n + \dim \mathbb{R}^p$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

On rappelle :

$$E \times F = \{ (u, v) \mid u \in E \quad v \in F \}$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$\forall (u, v) \in E \times F$

$$(u, v) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right)$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$\forall (u, v) \in E \times F$

$$\begin{aligned}(u, v) &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right)\end{aligned}$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\forall (u, v) \in E \times F$$

$$\begin{aligned}(u, v) &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, 0_F \right) + \left(0_E, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j)\end{aligned}$$

Démonstration. $\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\forall (u, v) \in E \times F$$

$$(u, v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j)$$

La famille

$$((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$$

est génératrice de $E \times F$.

Démonstration. $\dim (E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j) = 0_{E \times F}$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j) = 0_{E \times F}$$

$$\implies \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) = (0_E, 0_F)$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j) = 0_{E \times F}$$

$$\implies \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) = (0_E, 0_F)$$

$$\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^p \mu_j f_j = 0_F$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j) = 0_{E \times F}$$

$$\implies \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^p \mu_j f_j \right) = (0_E, 0_F)$$

$$\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^p \mu_j f_j = 0_F$$

$$\implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_p = 0_{\mathbb{K}}$$

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i, 0_F) + \sum_{j=1}^p \mu_j (0_E, f_j) = 0_{E \times F}$$

$$\implies \lambda_1 = \dots = \lambda_n = \mu_1 = \dots = \mu_p = 0_{\mathbb{K}}$$

La famille

$$((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$$

est libre.

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

La famille

$((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$

est libre et génératrice de $E \times F$.

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

La famille

$$((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$$

est libre et génératrice de $E \times F$.

C'est donc une base de $E \times F$.

Démonstration. $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(f_1, \dots, f_p)$ base de F

La famille

$$((e_1, 0_F), \dots, (e_n, 0_F), (0_E, f_1), \dots, (0_E, f_p))$$

est libre et génératrice de $E \times F$.

C'est donc une base de $E \times F$.

Elle contient $n + p$ éléments, donc :

$$\dim(E \times F) = n + p$$



Proposition (produit fini d'ev)

$E_1, \dots, E_p$ famille de p ev de dimensions finies.

Alors leur produit est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

Proposition (produit fini d'ev)

$E_1, \dots, E_p$ famille de p ev de dimensions finies.

Alors leur produit est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

Démonstration. Par récurrence sur p , car :

$$E_1 \times \dots \times E_{p+1} = (E_1 \times \dots \times E_p) \times E_{p+1} \quad \square$$

Proposition (produit fini d'ev)

$E_1, \dots, E_p$ famille de p ev de dimensions finies.

Alors leur produit est de dimension finie et :

$$\dim(E_1 \times \dots \times E_p) = \dim E_1 + \dots + \dim E_p$$

Corollaire

E espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbb{N}$.

Alors E^p est de dimension finie, et :

$$\dim(E^p) = p \dim E$$

Corollaire

E espace vectoriel de dimension finie, $p \in \mathbb{N}$.

Alors E^p est de dimension finie, et :

$$\dim(E^p) = p \dim E$$

Exemple

$$\dim \mathbb{K} = 1 \quad \text{donc} \quad \dim \mathbb{K}^n = n$$

I. Dimension d'un espace vectoriel

A. Définition et existence

B. Exemples

C. Théorèmes

Théorème

E espace vectoriel de dimension finie n .

- (i) Toute famille génératrice possède **au moins** n éléments.
- (ii) Toute famille libre possède **au plus** n éléments.

Théorème

E espace vectoriel de dimension finie n .

- (i) Toute famille génératrice possède **au moins** n éléments.
- (ii) Toute famille libre possède **au plus** n éléments.
- (iii) Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice possédant n éléments alors $\mathcal{G}$ est une base.
- (iv) Si $\mathcal{L}$ est une famille libre possédant n éléments alors $\mathcal{L}$ est une base.

Remarque

En d'autres termes :

Toute famille **génératrice minimale** est une base.

Toute famille **libre maximale** est une base.

Théorème

- (i) Toute famille génératrice possède **au moins** n éléments.
- (ii) Toute famille libre possède **au plus** n éléments.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

- (i) $\mathcal{G}$ génératrice, $\mathcal{B}$ libre $\implies \text{Card } \mathcal{B} \leq \text{Card } \mathcal{G}$
- (ii) $\mathcal{L}$ libre, $\mathcal{B}$ génératrice $\implies \text{Card } \mathcal{L} \leq \text{Card } \mathcal{B}$

Théorème

(iii) Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice possédant n éléments alors $\mathcal{G}$ est une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

(iii) $\mathcal{G}$ génératrice de cardinal n .

Si $\mathcal{G}$ est liée alors l'un de ses éléments est combinaison linéaire des autres, donc $\mathcal{G}$ privée de cet élément est génératrice.

Impossible car elle est de cardinal $n - 1$.

Théorème

(iv) Si $\mathcal{L}$ est une famille libre possédant n éléments alors $\mathcal{L}$ est une base.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

(iv) $\mathcal{L}$ libre de cardinal n .

Sous-lemme 2 : $\mathcal{L}$ est une base de E .



Exemple 1

$$(i) \quad u_1 = (2, 1) \quad u_2 = (1, 2)$$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 1

(i) $u_1 = (2, 1) \quad u_2 = (1, 2)$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) $((X - 3)^k \mid k = 0 \dots n) : \text{base de } \mathbb{R}_n[X]$

Exemple 1

(i) $u_1 = (2, 1) \quad u_2 = (1, 2)$

$\mathcal{B} = (u_1, u_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(ii) $((X - 3)^k \mid k = 0 \dots n)$: base de $\mathbb{R}_n[X]$

(iii) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas de dimension finie.

Théorème de la base extraite

De toute famille **génératrice** finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.

Théorème de la base extraite

De toute famille **génératrice** finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.

Démonstration.

Si une famille génératrice finie n'est pas libre, alors un de ses éléments est combinaison linéaire des autres, donc la famille privée de cet élément reste génératrice.

On peut retirer des éléments tant que la famille est liée, elle reste génératrice. On obtient finalement une famille libre et génératrice, donc une base. $\square$

Théorème de la base extraite

De toute famille **génératrice** finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète

Toute famille **libre** d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Théorème de la base extraite

De toute famille **génératrice** finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète

Toute famille **libre** d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Démonstration. On utilise la méthode de la démonstration du lemme 1 avec en particulier le sous-lemme 1.

Démonstration du théorème de la base incomplète.

$\mathcal{L} = (v_1, \dots, v_m)$ libre $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ base

$\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ est génératrice

$\Rightarrow \mathcal{B}_1 = (v_1, u_2, \dots, u_p)$ est génératrice

$\vdots$

$\Rightarrow \mathcal{B}_m = (v_1, \dots, v_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ est génératrice

Card $\mathcal{B}_m = n$ donc $\mathcal{B}_m$ est une base de E . □

Théorème de la base extraite

De toute famille **génératrice** finie d'un espace vectoriel on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète

Toute famille **libre** d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Remarque

De plus, la famille libre peut être complétée en choisissant des vecteurs dans une famille génératrice donnée.

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

- A. Dimension d'un sous-espace vectoriel
- B. Sous-espaces supplémentaires
- C. Dimension d'une somme de deux sous-espaces vectoriels
- D. Rang d'une famille de vecteurs

III. Applications linéaires en dimension finie

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

A. Dimension d'un sous-espace vectoriel

B. Sous-espaces supplémentaires

C. Dimension d'une somme de deux
sous-espaces vectoriels

D. Rang d'une famille de vecteurs

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

(i) F est de dimension finie

(ii) $\dim F \leq \dim E$

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

- (i) F est de dimension finie
- (ii) $\dim F \leq \dim E$
- (iii) $\dim F = \dim E \iff F = E$

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

► $N = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

- ▶ $N = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$
- ▶ N est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide majorée.

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

- ▶ $N = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$
- ▶ N est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide majorée.
- ▶ Soit $p = \max N$. Alors $p \leq n$.

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

- ▶ $N = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$
- ▶ N est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide majorée.
- ▶ Soit $p = \max N$. Alors $p \leq n$.
- ▶ Toute famille libre de F de cardinal p est génératrice (sous-lemme 2).
- ▶ Donc F est de dimension p et $p \leq n$.

Démonstration. Soit $n = \dim E$.

- ▶ $N = \{\text{cardinaux des familles libres de } F\}$
- ▶ N est une partie de $\mathbb{N}$ non-vide majorée.
- ▶ Soit $p = \max N$. Alors $p \leq n$.
- ▶ Toute famille libre de F de cardinal p est génératrice (sous-lemme 2).
- ▶ Donc F est de dimension p et $p \leq n$.
- ▶ De plus F est de dimension finie.

Suite de la démonstration.

$$\dim F = \dim E \iff F = E$$

Si $E = F$ alors leurs dimensions sont égales : $n = p$.

Suite de la démonstration.

$$\dim F = \dim E \iff F = E$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$.

Suite de la démonstration.

$$\dim F = \dim E \iff F = E$$

Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $\dim F = \dim E$.

Soit $\mathcal{B}$ une base F .

Alors $\mathcal{B}$ est une famille libre d'éléments de E .

Donc $\mathcal{B}$ est une base de E .

Donc $\text{Vect}(\mathcal{B}) = E$ puis $E = F$.



Corollaire

$$\left\{ \begin{array}{l} F \subseteq G \\ \dim F = \dim G \end{array} \right. \implies F = G$$

▷ Exercice 1.

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$ avec :

$$u_1 = (3, 10, 10) \quad u_2 = (6, 7, -6)$$

Soit $G = \{(x, y, z) \in E \mid 10x - 6y + 3z = 0\}$.

- Donner la dimension de F est démontrer qu'il est inclus dans G .
- Justifier que G ne peut être de dimension 3 et en déduire que $F = G$.

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

A. Dimension d'un sous-espace vectoriel

B. Sous-espaces supplémentaires

C. Dimension d'une somme de deux
sous-espaces vectoriels

D. Rang d'une famille de vecteurs

Théorème

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(i) Soit F un sous-espace vectoriel de E .

Alors il existe un sous-espace vectoriel G supplémentaire de F .

Théorème (suite)

(ii) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E , soit $(u_1, \dots, u_m)$ une base de F , $(v_1, \dots, v_p)$ une base de G .
Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est une base de E .

Théorème (suite)

(ii) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires dans E , soit $(u_1, \dots, u_m)$ une base de F , $(v_1, \dots, v_p)$ une base de G .
Alors la famille $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est une base de E .

Définition

La base $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ est **adaptée** à la somme directe $E = F \oplus G$.

Théorème (suite)

(iii) Soit F et G deux sous-espaces supplémentaires de E . Alors :

$$\dim E = \dim F + \dim G$$

(iv) Soit F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que :

$$\dim E = \dim F + \dim G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$$

Alors F et G sont supplémentaires.

Démonstration.

(i) **Tout sev admet un supplémentaire**

Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors F admet une base.

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une base de F . Cette famille est libre donc d'après le théorème de la base incomplète elle peut être complétée en une base

$$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p) \text{ de } E.$$

On pose $G = \text{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

Alors $E = F \oplus G$:

Démonstration.

(i) **Tout sev admet un supplémentaire**

Alors $E = F \oplus G$:

$$\begin{aligned} F + G &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_m) + \text{Vect}(v_1, \dots, v_p) \\ &= \text{Vect}((u_1, \dots, u_m) \cup (v_1, \dots, v_p)) \\ &= \text{Vect}(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p) \\ &= E \end{aligned}$$

Démonstration.

(i) **Tout sev admet un supplémentaire**

Alors $E = F \oplus G$:

Si $u \in F \cap G$ alors

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p$$

Donc

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_m u_m + (-\mu_1) v_1 + \cdots + (-\mu_p) v_p = 0_E$$

$\mathcal{B}$ est libre donc les λ_i et les μ_j sont nuls, et $u = 0_E$.

Ceci montre que $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

(i) Tout sev admet un supplémentaire

Alors $E = F \oplus G$:

$$E = F + G \quad \text{et} \quad F \cap G = \{0_E\}$$

donc

$$E = F \oplus G$$



Suite de la démonstration.

$$(ii) \ E = F \oplus G$$

$(u_1, \dots, u_m)$ **base de F** $(v_1, \dots, v_p)$ **base de G**

Alors $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ base de E .

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p = 0_E$$

Suite de la démonstration.

$$(ii) \ E = F \oplus G$$

$(u_1, \dots, u_m)$ **base de F** $(v_1, \dots, v_p)$ **base de G**

Alors $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ base de E .

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_p v_p = 0_E$$

$$\implies \underbrace{\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m}_{\in F} = \underbrace{-\mu_1 v_1 - \dots - \mu_p v_p}_{\in G}$$

$F \cap G = \{0_E\}$ et les familles (u_i) et (v_j) sont libres.

Donc les λ_i et les μ_j sont nuls, et $\mathcal{B}$ est libre.

Suite de la démonstration.

$$(ii) \ E = F \oplus G$$

$(u_1, \dots, u_m)$ **base de F** $(v_1, \dots, v_p)$ **base de G**

Alors $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ base de E .

Soit $w \in E$.

Suite de la démonstration.

$$(ii) \ E = F \oplus G$$

$(u_1, \dots, u_m)$ **base de F** $(v_1, \dots, v_p)$ **base de G**

Alors $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ base de E .

Soit $w \in E$.

$$w = u + v = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^p \mu_j v_j$$

$\mathcal{B}$ est génératrice de E , et finalement c'est une base de E . □

Suite de la démonstration.

$$(ii) \ E = F \oplus G$$

$(u_1, \dots, u_m)$ **base de** F $(v_1, \dots, v_p)$ **base de** G

Alors $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p)$ **base de** E .

(iii) **De plus** $\dim E = \dim F + \dim G$.

Ce point est conséquence du précédent.



Suite de la démonstration.

$$(iv) \dim E = \dim F + \dim G \quad \textbf{et} \quad F \cap G = \{0_E\} \\ \implies E = F \oplus G$$

Par théorème :

$$E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\} \iff E = F \oplus G$$

Il suffit donc de démontrer que $E = F + G$.

Suite de la démonstration.

$$(iv) \dim E = \dim F + \dim G \quad \textbf{et} \quad F \cap G = \{0_E\} \\ \implies E = F \oplus G$$

$$\text{Soit } E' = F + G$$

$$\text{Alors } E' = F \oplus G \quad \text{car } F \cap G = \{0_E\}$$

$$\text{donc } \dim E' = \dim E \quad \text{d'après (iii)}$$

$$\text{or } E' \subseteq E$$

$$\text{donc } E = E' = F \oplus G \quad \text{par théorème.}$$



Corollaire

(Caractérisation de la somme directe)

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Corollaire

(Caractérisation de la somme directe)

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim F + \dim G = \dim E \end{cases}$$

Remarque

F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors tous les supplémentaires de F ont la même dimension : $\dim E - \dim F$.

Lemme

- ▶ $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_p)$ famille libre
- ▶ $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$
- ▶ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_p)$

Alors F et G sont en somme directe.

(i.e., $F \cap G = \{0_E\}$)

Démonstration.

$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_p)$ **famille libre**

$$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m) \quad G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_p)$$

Alors F et G sont en somme directe.

Soit $u \in F \cap G$. Alors :

$$u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m = \lambda_{m+1} u_{m+1} + \dots + \lambda_p u_p$$

Par soustraction :

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m - \lambda_{m+1} u_{m+1} - \dots - \lambda_p u_p = 0_E$$

$(u_1, \dots, u_p)$ est libre donc tous les λ_i sont nuls.

Ainsi $u = 0_E$ puis $F \cap G = \{0_E\}$. □

Théorème de la base adaptée

- ▶ $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ base
- ▶ $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$
- ▶ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors

- ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de F
- ▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G
- ▶ $E = F \oplus G$

Démonstration.

$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ **base de E**

$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ **est une base de F**

▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ **est une base de G**

▶ $E = F \oplus G$

Démonstration.

$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ **base de E**

$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ **est une base de F**

▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ **est une base de G**

▶ $E = F \oplus G$

La famille $(u_1, \dots, u_m)$ est incluse dans la base $(u_1, \dots, u_n)$ donc elle est libre.

Comme $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ alors elle est génératrice de F .

Donc c'est une base de F .

Démonstration.

$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ **base de E**

$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de F

▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ **est une base de G**

▶ $E = F \oplus G$

De même $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G .

Démonstration.

$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ **base de E**

$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de F

▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G

▶ $E = F \oplus G$

Comme la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E alors tout élément de E s'écrit comme combinaison linéaire de ses éléments, donc comme somme d'un élément de F et d'un élément de G .

Ceci montre que $E = F + G$.

Démonstration.

$(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ **base de E**

$F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de F

▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G

▶ $E = F \oplus G$

D'après le lemme précédent F et G sont en somme directe.

Donc $E = F \oplus G$



Théorème de la base adaptée

- ▶ $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ base
- ▶ $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_m)$
- ▶ $G = \text{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$

Alors

- ▶ $(u_1, \dots, u_m)$ est une base de F
- ▶ $(u_{m+1}, \dots, u_n)$ est une base de G
- ▶ $E = F \oplus G$

Remarque

La base $(u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n)$ de E est dite **adaptée** à la somme directe $E = F \oplus G$.

Résumé

- ▶ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.

Résumé

- ▶ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
- ▶ $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.

Résumé

- ▶ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
- ▶ $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
- ▶ Si $E = F \oplus G$ alors l'union d'une base de F et d'une base de G forme une base de E .

Résumé

- ▶ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
- ▶ $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
- ▶ Si $E = F \oplus G$ alors l'union d'une base de F et d'une base de G forme une base de E .
- ▶ En séparant une base de E en deux parties on obtient deux sev supplémentaires.

Résumé

- ▶ Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire.
- ▶ $E = F \oplus G$ si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim F + \dim G = \dim E$.
- ▶ Si $E = F \oplus G$ alors l'union d'une base de F et d'une base de G forme une base de E .
- ▶ En séparant une base de E en deux parties on obtient deux sev supplémentaires.

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

A. Dimension d'un sous-espace vectoriel

B. Sous-espaces supplémentaires

C. Dimension d'une somme de deux
sous-espaces vectoriels

D. Rang d'une famille de vecteurs

Rappel

Soit A et B deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}(A \cup B) =$$

Rappel

Soit A et B deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B)$$

Théorème (Formule de Grassmann)

F, G sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration.

Théorème (Formule de Grassmann)

F, G sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

Démonstration.



II. Dimension et sous-espaces vectoriels

A. Dimension d'un sous-espace vectoriel

B. Sous-espaces supplémentaires

C. Dimension d'une somme de deux
sous-espaces vectoriels

D. Rang d'une famille de vecteurs

Définition

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs

Le **rang** de $\mathcal{F}$ est la dimension du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

$$\text{rg } \mathcal{F} = \dim (\text{Vect } (\mathcal{F}))$$

Exemple 2

$$E = \mathbb{R}^4$$

$$\mathcal{F} = ((1, 1, 0, 0), (2, 1, 1, 1), (0, -1, 1, 1))$$

Proposition

$\mathcal{F}$: famille de p vecteurs de E de dimension n .

$$(i) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq p$$

$$(ii) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq n$$

Proposition

$\mathcal{F}$: famille de p vecteurs de E de dimension n .

$$(i) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq p$$

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = p \iff \mathcal{F} \text{ libre}$$

Proposition

$\mathcal{F}$: famille de p vecteurs de E de dimension n .

$$(i) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq p$$

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = p \iff \mathcal{F} \text{ libre}$$

$$(ii) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq n$$

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = n \iff \mathcal{F} \text{ génératrice de } E$$

Proposition

$\mathcal{F}$: famille de p vecteurs de E de dimension n .

$$(i) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq p$$

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = p \iff \mathcal{F} \text{ libre}$$

$$(ii) \operatorname{rg} \mathcal{F} \leq n$$

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = n \iff \mathcal{F} \text{ génératrice de } E$$

Corollaire

$\mathcal{F}$: famille de n vecteurs de E de dimension n .

$$\operatorname{rg} \mathcal{F} = n \iff \mathcal{F} \text{ base de } E$$

Démonstration. On note $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

$$(i) \text{ rg } \mathcal{F} \leq p$$

$$\text{ rg } \mathcal{F} = p \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ libre}$$

$\mathcal{F}$ est génératrice de F donc $\dim F \leq \text{Card } \mathcal{F}$ puis $\text{ rg } \mathcal{F} \leq p$.

Démonstration. On note $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

$$(i) \text{ rg } \mathcal{F} \leq p$$

$$\text{ rg } \mathcal{F} = p \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{F} \text{ libre}$$

$\mathcal{F}$ est génératrice de F donc $\dim F \leq \text{Card } \mathcal{F}$ puis $\text{ rg } \mathcal{F} \leq p$.

Si $\text{ rg } \mathcal{F} = p$ alors $\mathcal{F}$ est génératrice de F de cardinal $p = \dim F$, donc $\mathcal{F}$ est une base de F .

Elle est donc libre.

Réciproquement si $\mathcal{F}$ est libre alors elle est une base de F donc $\text{ rg } \mathcal{F} = \dim F = \text{Card } \mathcal{F} = p$. $\square$

Démonstration. On note $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

$$(ii) \text{ rg } \mathcal{F} \leq n$$

$$\text{rg } \mathcal{F} = n \iff \mathcal{F} \text{ génératrice de } E$$

Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim F \leq \dim E$, donc $\text{rg } \mathcal{F} \leq n$.

Démonstration. On note $F = \text{Vect}(\mathcal{F})$.

$$(ii) \text{ rg } \mathcal{F} \leq n$$

$$\text{rg } \mathcal{F} = n \iff \mathcal{F} \text{ génératrice de } E$$

Comme F est un sous-espace vectoriel de E alors $\dim F \leq \dim E$, donc $\text{rg } \mathcal{F} \leq n$.

Le rang de $\mathcal{F}$ est égal   n si et seulement si $\dim F = \dim E$, ce qui équivaut   $F = E$ puisque $F \subseteq E$.

Or $F = E$ ssi $\mathcal{F}$ est génératrice de E .



▷ Exercice 2.

$$E = \mathbb{R}^4$$

Déterminer le rang des familles suivantes :

$$\mathcal{F}_1 = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 0))$$

$$\mathcal{F}_3 = \emptyset$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1, 0, 0, 0), \dots, (n, 0, 0, 0)) \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1, 0, 0, 0), (2, 1, 0, 0), (3, 2, 1, 0), (4, 3, 2, 1), (5, 4, 3, 2))$$

Chapitre B10. Dimension

I. Dimension d'un espace vectoriel

II. Dimension et sous-espaces vectoriels

III. Applications linéaires en dimension finie

- A. Image d'une base
- B. Rang d'une application linéaire
- C. Isomorphismes en dimension finie
- D. Théorème du rang
- E. Application aux hyperplans

III. Applications linéaires en dimension finie

- A. Image d'une base
- B. Rang d'une application linéaire
- C. Isomorphismes en dimension finie
- D. Théorème du rang
- E. Application aux hyperplans

Remarque

Si

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E

Alors :

Remarque

Si

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E

Alors :

- ▶ $f(\mathcal{G}) = (f(u_1), \dots, f(u_p))$ est une famille de vecteurs de F .
- ▶ $\text{im } f = \text{Vect}(f(\mathcal{G}))$
i.e., $f(\mathcal{G})$ est génératrice de $\text{im } f$.

Remarque

Si

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E

Alors $f(\mathcal{G})$ est génératrice de $\text{im } f$.

Démonstration.

Remarque

Si

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ est génératrice de E

Alors $f(\mathcal{G})$ est génératrice de $\text{im } f$.

Démonstration.



Remarque

En particulier, si :

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E

Alors $f(\mathcal{B})$ est génératrice de $\text{im } f$.

Proposition (Image d'une base)

$f : E \rightarrow F$ linéaire $\mathcal{B}$ base de E

- (i) $f(\mathcal{B})$ libre $\iff f$ injective
- (ii) $f(\mathcal{B})$ génératrice de F $\iff f$ surjective
- (iii) $f(\mathcal{B})$ base de F $\iff f$ bijective

Proposition (Image d'une base)

$f : E \rightarrow F$ linéaire $\mathcal{B}$ base de E

- (i) $f(\mathcal{B})$ libre $\iff f$ injective
- (ii) $f(\mathcal{B})$ génératrice de F $\iff f$ surjective
- (iii) $f(\mathcal{B})$ base de F $\iff f$ bijective

Remarque

Ainsi un isomorphisme envoie une base sur une base.

Proposition (Image d'une base) $f : E \rightarrow F$ linéaire $\mathcal{B}$ base de E

- (i) $f(\mathcal{B})$ libre $\iff f$ injective
- (ii) $f(\mathcal{B})$ génératrice de F $\iff f$ surjective
- (iii) $f(\mathcal{B})$ base de F $\iff f$ bijective

Démonstration.

(ii) car $\text{im } f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$

(iii) conséquence de (i) et (ii)

Proposition (Image d'une base)

$f : E \rightarrow F$ linéaire $\mathcal{B}$ base de E

- (i) $f(\mathcal{B})$ libre $\iff f$ injective
- (ii) $f(\mathcal{B})$ génératrice de F $\iff f$ surjective
- (iii) $f(\mathcal{B})$ base de F $\iff f$ bijective

Démonstration.

- (ii) car $\text{im } f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$
- (iii) conséquence de (i) et (ii)
- (i) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Proposition (Image d'une base) $f : E \rightarrow F$ linéaire $\mathcal{B}$ base de E

- (i) $f(\mathcal{B})$ libre $\iff f$ injective
- (ii) $f(\mathcal{B})$ génératrice de F $\iff f$ surjective
- (iii) $f(\mathcal{B})$ base de F $\iff f$ bijective

Démonstration.

(ii) car $\text{im } f = \text{Vect}(f(\mathcal{B}))$

(iii) conséquence de (i) et (ii)

(i) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.



Théorème

- ▶ E, F espaces vectoriels, E de dimension finie
- ▶ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E
- ▶ $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ vecteurs de F

Alors il existe une unique application linéaire

$$f : E \rightarrow F$$

telle que : $\forall i = 1 \dots p \quad f(e_i) = v_i$

Théorème

- ▶ E, F espaces vectoriels, E de dimension finie
- ▶ $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E
- ▶ $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_p)$ vecteurs de F

Alors il existe une unique application linéaire

$$f : E \rightarrow F$$

telle que : $\forall i = 1 \dots p \quad f(e_i) = v_i$

Remarque

Une application linéaire est uniquement déterminée par l'image d'une base.

Exemple 3

$$(i) \quad E = \mathbb{R}^2 \quad \mathcal{B}_c = (e_1, e_2) \\ v_1 = (8, -2) \quad v_2 = (3, 5)$$

Par théorème il existe un et un seul endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tel que :

$$f(e_1) = v_1 \quad \text{et} \quad f(e_2) = v_2$$

Exemple 3 (suite)

(ii) $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, -1))$

Par théorème il existe une et une seule application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$f(1, 1) = (2, 4, 2) \quad f(1, -1) = (0, 4, -2)$$

▷ Exercice 3.

Démontrer qu'il existe une unique forme linéaire

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\varphi(1, 1, 1) = 3 \quad \varphi(1, 2, 3) = 5 \quad \varphi(1, 3, 6) = -2$$

Donner $\varphi(x, y, z)$ pour tout élément $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p &\longmapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p &\longmapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \end{aligned}$$

► f est bien définie

Démonstration.

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p &\longmapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \end{aligned}$$

- ▶ f est bien définie
- ▶ f est linéaire (voir ci-après)

Démonstration.

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p &\longmapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \end{aligned}$$

- ▶ f est bien définie
- ▶ f est linéaire (voir ci-après)
- ▶ Pour tout $i = 1 \dots n$: $f(e_i) = v_i$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p &\longmapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \end{aligned}$$

- ▶ f est bien définie
- ▶ f est linéaire (voir ci-après)
- ▶ Pour tout $i = 1 \dots n$: $f(e_i) = v_i$
- ▶ f est la seule application linéaire vérifiant ces conditions.

Démonstration.

$$f : E \longrightarrow F$$

$$u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p \longmapsto \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

- ▶ Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ sont les coordonnées respectives de u et v dans la base $\mathcal{B}$, alors $(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_p + \mu_p)$ sont les coordonnées de $u + v$.
- ▶ Si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et α est un scalaire, alors $(\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_p)$ sont les coordonnées de αu . □

III. Applications linéaires en dimension finie

- A. Image d'une base
- B. Rang d'une application linéaire
- C. Isomorphismes en dimension finie
- D. Théorème du rang
- E. Application aux hyperplans

Définition

Rang de f :

$$\operatorname{rg} f = \dim(\operatorname{im} f)$$

Remarque

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E

$$\operatorname{im} f = \{ f(u) \mid u \in E \}$$

$$= \{ f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \}$$

$$= \{ \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \}$$

$$= \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$$

► $\operatorname{im} f$ est bien de dimension finie

Remarque

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ base de E

$$\operatorname{im} f = \{ f(u) \mid u \in E \}$$

$$= \{ f(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_p e_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \}$$

$$= \{ \lambda_1 f(e_1) + \dots + \lambda_p f(e_p) \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \}$$

$$= \operatorname{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \operatorname{Vect}(f(\mathcal{B}))$$

► $\operatorname{im} f$ est bien de dimension finie

► $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B})$

Exemple 4

$$(i) \operatorname{rg} f = 0 \quad \Longleftrightarrow$$

Exemple 4

$$(i) \operatorname{rg} f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0$$

Exemple 4

$$(i) \operatorname{rg} f = 0? \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0?$$

Exemple 4

$$(i) \operatorname{rg} f = 0_{\mathbb{N}} \iff f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Exemple 4

$$(i) \quad \operatorname{rg} f = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$$

$$(ii) \quad \begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^5 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x_1, \dots, x_5) &\longmapsto (x_1, x_2, 0, 0) \end{aligned}$$

Proposition

$$f : E \rightarrow F$$

$$\operatorname{rg} f \leqslant \dim E \qquad \operatorname{rg} f \leqslant \dim F$$

Démonstration.

$$\blacktriangleright \operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{Card} f(\mathcal{B})$$

$$\text{Or} \quad \operatorname{Card} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim E$$

$$\blacktriangleright \operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f$$

$$\text{Or} \quad \operatorname{im} f \subseteq F$$



Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Démonstration.

(i) f injective $\iff f(\mathcal{B})$ est libre

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Démonstration.

(i) f injective $\iff f(\mathcal{B})$ est libre

$\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} f(\mathcal{B})$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Démonstration.

(i) f injective $\iff f(\mathcal{B})$ est libre

$$\begin{aligned} &\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} f(\mathcal{B}) \\ &= \operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim E = p \end{aligned}$$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Démonstration.

(ii) f surjective $\iff f(\mathcal{B})$ est génératrice de F

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Démonstration.

(ii) f surjective $\iff f(\mathcal{B})$ est génératrice de F

$\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \dim F = n$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire $p = \dim E$ $n = \dim F$

(i) f injective $\iff \operatorname{rg} f = p$

(ii) f surjective $\iff \operatorname{rg} f = n$

(iii) f bijective $\iff \operatorname{rg} f = n = p$

Démonstration.

(ii) f surjective $\iff f(\mathcal{B})$ est génératrice de F

$\iff \operatorname{rg} f(\mathcal{B}) = \dim F = n$

(iii) D'après (i) et (ii).



Proposition

$f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ linéaires. Alors

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \text{Min}(\text{rg } g, \text{rg } f)$$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ linéaires. Alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{Min}(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$$

Démonstration.

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{Min}(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$$

$$\iff \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} f$$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ linéaires. Alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{Min}(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$$

Démonstration.

► Comme $\operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im} g$
alors $\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{rg} g$

Proposition

$f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ linéaires. Alors

$$\operatorname{rg}(g \circ f) \leq \operatorname{Min}(\operatorname{rg} g, \operatorname{rg} f)$$

Démonstration.

► $\operatorname{im}(g \circ f) = g(\operatorname{im} f) = \operatorname{Vect}(g(\mathcal{B}))$
où $\mathcal{B}$ est une base de $\operatorname{im} f$

donc $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg}(g(\mathcal{B})) \leq \operatorname{Card} g(\mathcal{B})$

or $\operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim \operatorname{im} f = \operatorname{rg} f$ □

III. Applications linéaires en dimension finie

- A. Image d'une base
- B. Rang d'une application linéaire
- C. Isomorphismes en dimension finie
- D. Théorème du rang
- E. Application aux hyperplans

Définition

Deux espaces vectoriels E et F sont dits **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \rightarrow F$.

Remarque

La relation d'isomorphisme est une relation d'équivalence. En effet elle est :

- ▶ **réflexive** : E est isomorphe à lui-même,
- ▶ **symétrique** : si E est isomorphe à F alors F est isomorphe à E ,
- ▶ **transitive** : si E est isomorphe à F et F est isomorphe à G alors E est isomorphe à G .

Proposition

E, F de dimension finie.

$$E \text{ et } F \text{ isomorphes} \iff \dim E = \dim F$$

Démonstration.

E, F isomorphes

$\implies \exists \varphi : E \rightarrow F$ isomorphisme

$\implies \dim E = \dim F$

Car l'image d'une base par un isomorphisme est une base.

Démonstration. (suite)

Supposons que $\dim E = \dim F$

► $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E

► $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ base de F

Par théorème il existe une (unique) application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \varphi(e_i) = f_i$$

L'image de la base $\mathcal{B}$ de E par φ est une base de F
donc par propriété φ est un isomorphisme. $\square$

Exemple 5

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathcal{M}_{1n}(\mathbb{R}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (x_1 \ \cdots \ x_n)\end{aligned}$$

Lemme

► $\varphi : E \rightarrow F$ isomorphisme

► E_1 sev de E

$$\implies \dim \varphi(E_1) = \dim E_1$$

La dimension est invariante par isomorphisme.

Lemme

► $\varphi : E \rightarrow F$ isomorphisme

► E_1 sev de E

$$\implies \dim \varphi(E_1) = \dim E_1$$

La dimension est invariante par isomorphisme.

Démonstration.

$$\varphi : E \xrightarrow{\sim} F$$

$$\begin{aligned} \psi : E_1 &\xrightarrow{\sim} F_1 = \varphi(E_1) \\ u &\longmapsto \varphi(u) \end{aligned}$$



Proposition

$$D \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\psi} G$$

$$(i) \quad \varphi \text{ isomorphisme} \implies \operatorname{rg}(f \circ \varphi) = \operatorname{rg} f$$

$$(ii) \quad \psi \text{ isomorphisme} \implies \operatorname{rg}(\psi \circ f) = \operatorname{rg} f$$

Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.

Proposition

Le rang est invariant par composition avec un isomorphisme.

Démonstration.

$$D \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\psi} G$$

$$(i) \operatorname{im}(f \circ \varphi) = f(\varphi(D)) = f(E) = \operatorname{im} f$$

$$(ii) \operatorname{im}(\psi \circ f) = \psi(\operatorname{im} f) \text{ donc}$$

$$\dim(\operatorname{im}(\psi \circ f)) = \dim(\operatorname{im} f)$$



III. Applications linéaires en dimension finie

- A. Image d'une base
- B. Rang d'une application linéaire
- C. Isomorphismes en dimension finie
- D. Théorème du rang**
- E. Application aux hyperplans

Théorème du rang

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ E de dimension finie

Alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Lemme

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ E de dimension finie
- ▶ $E = E' \oplus \ker f$

Alors

$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration.

$$f : E \longrightarrow F$$

$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

► g est bien définie

Démonstration.

$$f : E \longrightarrow F$$

$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

► g est bien définie

► g est injective $(E' \cap \ker f = \{0_E\})$

Démonstration.

$$f : E \longrightarrow F$$

$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

- ▶ g est bien définie
- ▶ g est injective $(E' \cap \ker f = \{0_E\})$
- ▶ g est surjective $(E' + \ker f = E)$

Démonstration.

$$f : E \longrightarrow F$$

$$\begin{aligned} g : E' &\longrightarrow \operatorname{im} f \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

► g est bien définie

► g est injective $(E' \cap \ker f = \{0_E\})$

► g est surjective $(E' + \ker f = E)$ □

Théorème du rang

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ E de dimension finie

Alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Théorème du rang

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ E de dimension finie

Alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Démonstration.

Théorème du rang

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ E de dimension finie

Alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Démonstration.



Théorème du rang

- ▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire
- ▶ E de dimension finie

Alors

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Exemple 6

$$(i) \quad f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \operatorname{rg} f = 2$$

Théorème du rang

$$\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{im} f)$$

Exemple 6

$$(ii) \quad f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$f \text{ injective} \quad \implies \quad p \leq n$$

$$f \text{ surjective} \quad \implies \quad p \geq n$$

▷ Exercice 4.

Soit f l'application linéaire définie par :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^4 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) &\longmapsto (3x + 3y + 3z + 3t, \\ &\quad 3x - 3y + z + t, \\ &\quad 2x + 2y + z + t) \end{aligned}$$

Calculer le noyau de f et démontrer qu'elle est surjective.

Corollaire

► $f : E \rightarrow F$ linéaire

► $\dim E = \dim F$

Alors :

(i) f injective $\implies f$ bijective

(ii) f surjective $\implies f$ bijective

Corollaire

▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire

▶ $\dim E = \dim F$

Alors :

(i) f injective $\implies f$ bijective

(ii) f surjective $\implies f$ bijective

Démonstration.

Corollaire

▶ $f : E \rightarrow F$ linéaire

▶ $\dim E = \dim F$

Alors :

(i) f injective $\implies f$ bijective

(ii) f surjective $\implies f$ bijective

Démonstration.



Corollaire

► $f : E \rightarrow F$ linéaire

► $\dim E = \dim F$

Alors :

(i) f injective $\implies f$ bijective

(ii) f surjective $\implies f$ bijective

Corollaire

- ▶ $f : E \rightarrow E$ linéaire
- ▶ E est de dimension finie

Alors :

- (i) f injective $\implies f$ bijective
- (ii) f surjective $\implies f$ bijective

Corollaire

- ▶ $f : E \rightarrow E$ linéaire
- ▶ E est de dimension finie

Alors :

- (i) f injective $\implies f$ bijective
- (ii) f surjective $\implies f$ bijective

Remarque

Dans les deux cas ci-dessus :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ bijective} \iff f \text{ surjective}$$

Exemple 7

$n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaires distincts

a. Démontrer que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Exemple 7

$n \in \mathbb{N}^*$ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ scalaires distincts

a. Démontrer que :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ P &\longmapsto (P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

b. $\beta_1, \dots, \beta_n$ scalaires.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme P de degré au plus $n - 1$ tel que :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad P(\alpha_i) = \beta_i$$

III. Applications linéaires en dimension finie

- A. Image d'une base
- B. Rang d'une application linéaire
- C. Isomorphismes en dimension finie
- D. Théorème du rang
- E. Application aux hyperplans

Rappel

Soit E un espace vectoriel.

- (i) Un **hyperplan** est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.
- (ii) Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E .

$$E = H \oplus D \quad \text{avec} \quad \dim D = 1$$

Rappel

Soit E un espace vectoriel.

- (i) Un **hyperplan** est le noyau d'une forme linéaire non-nulle.
- (ii) Un sous-espace vectoriel H de E est un hyperplan si et seulement s'il existe une droite vectorielle supplémentaire de H dans E .

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .

Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi \subseteq \mathbb{K}$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi \subseteq \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi \neq \{0_{\mathbb{K}}\} \text{ car } \varphi \text{ est non-nulle.}$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi \neq \{0_{\mathbb{K}}\} \text{ car } \varphi \text{ est non-nulle.}$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$$

Théorème du rang :

$$\dim E = \dim \operatorname{im} \varphi + \dim \ker \varphi$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$$

Théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \operatorname{im} \varphi + \dim \ker \varphi \\ n &= 1 + \dim H \end{aligned}$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Supposons que H est un hyperplan.

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$$

$$\operatorname{im} \varphi = \mathbb{K}$$

Théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim E &= \dim \operatorname{im} \varphi + \dim \ker \varphi \\ n &= 1 + \dim H \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \dim H = n - 1.$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Réciproquement :

Supposons que H est un sev de E de dimension $n - 1$.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Réciproquement :

Supposons que H est un sev de E de dimension $n - 1$. Alors H admet un supplémentaire D :

$$E = H \oplus D$$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Réciproquement :

Supposons que H est un sev de E de dimension $n - 1$. Alors H admet un supplémentaire D :

$$E = H \oplus D$$

Donc $\dim E = \dim H + \dim D$

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Réciproquement :

Supposons que H est un sev de E de dimension $n - 1$. Alors H admet un supplémentaire D :

$$E = H \oplus D$$

Donc $\dim E = \dim H + \dim D$

$\dim H = n - 1$ donc $\dim D = 1$,

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Réciproquement :

Supposons que H est un sev de E de dimension $n - 1$. Alors H admet un supplémentaire D :

$$E = H \oplus D$$

Donc $\dim E = \dim H + \dim D$

$\dim H = n - 1$ donc $\dim D = 1$, donc D est une droite vectorielle,

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n .
Les hyperplans de E sont les sev de dimension $n - 1$.

Démonstration. Réciproquement :

Supposons que H est un sev de E de dimension $n - 1$. Alors H admet un supplémentaire D :

$$E = H \oplus D$$

Donc $\dim E = \dim H + \dim D$

$\dim H = n - 1$ donc $\dim D = 1$, donc D est une droite vectorielle, donc H est un hyperplan. $\square$

Proposition

E ev de dim finie n $m \in \mathbb{N}^*$

$H_1, \dots, H_m$ hyperplans. Alors :

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

Les composantes de f sont des formes linéaires
donc f est linéaire.

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

$$u \in \ker f \iff \varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

$$u \in \ker f \iff \varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

$$\iff \forall k = 1, \dots, m \quad u \in H_k$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

$$u \in \ker f \iff \varphi_1(u) = \dots = \varphi_m(u) = 0_{\mathbb{K}}$$

$$\iff u \in \bigcap_{k=1}^m H_k$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

Alors $\ker f = \bigcap_{k=1}^m H_k$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

Alors $\ker f = \bigcap_{k=1}^m H_k$

Théorème du rang :

$$\dim \ker f = \dim E - \dim \operatorname{im} f$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) = n - \dim \operatorname{im} f$$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) = n - \dim \operatorname{im} f$$

Or $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{K}^m$ donc $\dim \operatorname{im} f \leq m$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) = n - \dim \operatorname{im} f$$

Or $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{K}^m$ donc $-\dim \operatorname{im} f \geq -m$

Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) = n - \dim \operatorname{im} f$$

Or $\operatorname{im} f \subseteq \mathbb{K}^m$ donc $-\dim \operatorname{im} f \geq -m$

Finalement :

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$



Proposition

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^m H_k \right) \geq n - m$$

Démonstration.

$$\forall k = 1, \dots, m \quad H_k = \ker \varphi_k \quad \text{où} \quad \varphi_k : E \rightarrow \mathbb{K}$$

On définit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$$u \longmapsto (\varphi_1(u), \dots, \varphi_m(u))$$

Remarque

L'égalité a lieu ssi la famille $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ est libre.

Corollaire

n et p entiers strictement positifs.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est de dimension au moins $p - n$.

Corollaire

n et p entiers strictement positifs.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène de n équations à p inconnues est de dimension au moins $p - n$.

Remarque

Un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ est un ensemble d'équation :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires non tous nuls.

Démonstration.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Démonstration.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 & H_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 & H_n \end{cases}$$

$$S_0 = H_1 \cap \cdots \cap H_n$$

Démonstration.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 & H_1 \subseteq \mathbb{K}^p \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 & H_n \subseteq \mathbb{K}^p \end{cases}$$

$$\mathcal{S}_0 = H_1 \cap \cdots \cap H_n \quad \text{donc} \quad \dim \mathcal{S}_0 \geq p - n. \quad \square$$

Proposition

$$\dim E = n \qquad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$(e_1, \dots, e_{n-m})$ base de F

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$(e_1, \dots, e_{n-m})$ base de F (famille libre)

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

(Théorème de la base incomplète)

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$(e_1, \dots, e_{n-m})$ base de F

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

Pour tout $k = n - m + 1, \dots, n$, soit :

$$H_k = \text{Vect}(e_1, \dots, \cancel{e_k}, \dots, e_n)$$

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$(e_1, \dots, e_{n-m})$ base de F

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(e_1, \dots, \cancel{e_k}, \dots, e_n)$ base de H_k

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$(e_1, \dots, e_{n-m})$ base de F

$(e_1, \dots, e_n)$ base de E

$(e_1, \dots, \cancel{e_k}, \dots, e_n)$ base de H_k

H_k hyperplan pour $k = n - m + 1, \dots, n$

(donc m hyperplans)

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$$F = \bigcap_{k=n-m+1}^n H_k$$

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$$F = \bigcap_{k=n-m+1}^n H_k$$

Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

$$u \in H_k \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda_k = 0_{\mathbb{K}}$$

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$$F = \bigcap_{k=n-m+1}^n H_k$$

Soit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$

$$u \in \bigcap_{k=n-m+1}^n H_k \iff \lambda_{n-m+1} = \cdots = \lambda_n = 0$$

$$\iff u \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-m}) = F$$

Proposition

$$\dim E = n \quad \dim F = n - m$$

Alors F est l'intersection de m hyperplans de E .

Démonstration.

$$F = \bigcap_{k=n-m+1}^n H_k$$

Ainsi F est bien l'intersection des m hyperplans $H_{n-m+1}, \dots, H_n$. □

Prochain chapitre

Chapitre A11
Intégration