

Mathématiques

Chapitre B9
Applications linéaires

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

II. Image et noyau

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

II. Image et noyau

III. Formes linéaires

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

II. Image et noyau

III. Formes linéaires

IV. Projecteurs et symétries

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

$$E, F \quad \text{deux} \quad \mathbb{K}\text{-ev}$$

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

- A. Définition
- B. Opérations sur les applications linéaires
- C. Isomorphismes
- D. Applications linéaires et somme directe

II. Image et noyau

III. Formes linéaires

IV. Projecteurs et symétries

I. Généralités

A. Définition

B. Opérations sur les applications linéaires

C. Isomorphismes

D. Applications linéaires et somme directe

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** si :

$$\forall (u, v) \in E^2 \qquad f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda u) = \lambda f(u)$$

Définition

Une application $f : E \rightarrow F$ est **linéaire** si :

$$\forall (u, v) \in E^2 \qquad f(u + v) = f(u) + f(v)$$

$$\forall u \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$$

Définition

Endomorphisme :

$$f : E \rightarrow E \quad \text{linéaire}$$

Proposition

Caractérisation d'une application linéaire

Une application $f : E \rightarrow F$ est linéaire ssi

$$\forall (u, v) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$$

Contre-exemples

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x + 1$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto x^2$$

Remarque

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors

$$f(0_E) =$$

Remarque

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors

$$f(0_E) = 0_F$$

Remarque

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors

$$f(0_E) = 0_F$$

$$\forall u \in E \quad f(-u) =$$

Remarque

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors

$$f(0_E) = 0_F$$

$$\forall u \in E \quad f(-u) = -f(u)$$

Exemple 1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto ax$$

Exemple 1

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto ax$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \longmapsto (ax + by, cx + dy)$$

Exemples et définitions

(i) Identité de E

$$\text{Id}_E : E \longrightarrow E$$

$$u \longmapsto u$$

Exemples et définitions

(i) Identité de E

$$\text{id}_E : E \longrightarrow E$$

$$u \longmapsto u$$

Exemples et définitions

(i) Identité de E

$$\begin{aligned}\text{id} : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u\end{aligned}$$

Exemples et définitions

(ii) Application nulle de E dans F

$$E \longrightarrow F$$

$$u \longmapsto 0_F$$

Exemples et définitions

(iii) Homothétie de E de rapport α $(\alpha \in \mathbb{K})$

$$\begin{aligned} h_\alpha : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \alpha u \end{aligned}$$

Exemples et définitions

(iv) Dérivation

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Exemples et définitions

(v) Spécialisation en α $(\alpha \in \mathbb{K})$

$$\begin{aligned} f_\alpha : \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto P(\alpha) \end{aligned}$$

Exemples et définitions

(iv) Dérivation

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Démonstration.

Exemples et définitions

(iv) Dérivation

$$\begin{aligned} D : \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

Démonstration.



I. Généralités

A. Définition

B. Opérations sur les applications linéaires

C. Isomorphismes

D. Applications linéaires et somme directe

Notations

$\mathcal{L}(E, F)$: ensemble des applications linéaires
de E dans F

$\mathcal{L}(E)$: ensemble des endomorphismes de E

Rappel

$$f, g : E \rightarrow F \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{aligned} f + g : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u) + g(u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda f : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto \lambda f(u) \end{aligned}$$

Proposition

Si f et g sont linéaires alors $f+g$ et λf sont linéaires.

Proposition

Si f et g sont linéaires alors $f + g$ et λf sont linéaires.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(f + g)(\alpha u + v) &= f(\alpha u + v) + g(\alpha u + v) \\ &= \alpha f(u) + f(v) + \alpha g(u) + g(v) \\ &= \alpha(f(u) + g(u)) + (f(v) + g(v)) \\ &= \alpha(f + g)(u) + (f + g)(v)\end{aligned}$$

Proposition

Si f et g sont linéaires alors $f+g$ et λf sont linéaires.

Démonstration.

$$\begin{aligned}(\lambda f)(\alpha u + v) &= \lambda(f(\alpha u + v)) \\ &= \lambda(\alpha f(u) + f(v)) \\ &= \lambda\alpha f(u) + \lambda f(v) \\ &= \alpha(\lambda f)(u) + (\lambda f)(v)\end{aligned}$$

Proposition

Si f et g sont linéaires alors $f+g$ et λf sont linéaires.

Remarque

Ainsi l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire.

Proposition

Si f et g sont linéaires alors $f+g$ et λf sont linéaires.

Remarque

Ainsi l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition

Si f et g sont linéaires alors $f+g$ et λf sont linéaires.

Remarque

Ainsi l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est muni d'une addition et d'une multiplication par un scalaire.

Proposition

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
Son élément nul $0_{\mathcal{L}(E, F)}$ est l'application nulle de E dans F .

Proposition

Si

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g : F \rightarrow G$$

sont linéaires alors

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

est linéaire.

Proposition

Si

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g : F \rightarrow G$$

sont linéaires alors

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

est linéaire.

Démonstration.

Proposition

Si

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad g : F \rightarrow G$$

sont linéaires alors

$$g \circ f : E \rightarrow G$$

est linéaire.

Démonstration.



Proposition

E , F et G trois evs.

L'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f\end{aligned}$$

est bilinéaire.

Proposition

E , F et G trois evs.

L'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(F, G) \times \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E, G) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f\end{aligned}$$

est **bilinéaire**.

i.e., elle est linéaire par rapport à ses deux variables.

Proposition

E, F et G trois evs.

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$$

L'application $\mathcal{L}(F, G) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G)$ est linéaire.
 $g \longmapsto g \circ f$

$$\forall g \in \mathcal{L}(F, G)$$

L'application $\mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E, G)$ est linéaire.
 $f \longmapsto g \circ f$

Proposition

E, F et G trois evs.

$$\forall (f, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^3 \quad \forall (g, g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^3$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda(g \circ f_1) + g \circ f_2 \\ (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda(g_1 \circ f) + g_2 \circ f \end{cases}$$

Proposition

E, F et G trois evs.

$$\forall (f, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^3 \quad \forall (g, g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^3$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda(g \circ f_1) + g \circ f_2 \\ (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda(g_1 \circ f) + g_2 \circ f \end{cases}$$

Démonstration.

La première linéarité est conséquence de la linéarité de g .

Proposition

E , F et G trois evs.

$$\forall (f, f_1, f_2) \in \mathcal{L}(E, F)^3 \quad \forall (g, g_1, g_2) \in \mathcal{L}(F, G)^3$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\begin{cases} g \circ (\lambda f_1 + f_2) = \lambda(g \circ f_1) + g \circ f_2 \\ (\lambda g_1 + g_2) \circ f = \lambda(g_1 \circ f) + g_2 \circ f \end{cases}$$

Démonstration.

La seconde est conséquence de la définition de l'application $\lambda g_1 + g_2$.



Remarque

Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Remarque

Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Il n'est pas commutatif en général.

Remarque

Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Il n'est pas commutatif en général.

L'élément neutre pour la loi $\circ$ est Id_E .

Remarque

Le triplet $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau.

Il n'est pas commutatif en général.

L'élément neutre pour la loi $\circ$ est Id_E .

On note gf au lieu de $g \circ f$
 f^2 au lieu de $f \circ f$
 f^k au lieu de $f \circ \dots \circ f$
etc...

I. Généralités

A. Définition

B. Opérations sur les applications linéaires

C. Isomorphismes

D. Applications linéaires et somme directe

Définition

Un **isomorphisme** est une application linéaire bijective.

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection.

Si f est linéaire alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire.

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection.

Si f est linéaire alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire.

Démonstration.

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection.

Si f est linéaire alors $f^{-1} : F \rightarrow E$ est linéaire.

Démonstration.



Proposition

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ deux isomorphismes.

Alors $g \circ f$ est un isomorphisme et :

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Définition

Un **automorphisme** est

- ▶ un endomorphisme bijectif,
- ▶ un isomorphisme d'un ev dans lui-même.

Définition

Un **automorphisme** est

- ▶ un endomorphisme bijectif,
- ▶ un isomorphisme d'un ev dans lui-même.

$GL(E)$: ensemble des automorphismes de E
Groupe Linéaire de E

Définition

Un **automorphisme** est

- ▶ un endomorphisme bijectif,
- ▶ un isomorphisme d'un ev dans lui-même.

$GL(E)$: ensemble des automorphismes de E
Groupe Linéaire de E

$(GL(E), \circ)$ est un groupe,

Définition

Un **automorphisme** est

- ▶ un endomorphisme bijectif,
- ▶ un isomorphisme d'un ev dans lui-même.

$GL(E)$: ensemble des automorphismes de E
Groupe Linéaire de E

$(GL(E), \circ)$ est un groupe, c'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

I. Généralités

A. Définition

B. Opérations sur les applications linéaires

C. Isomorphismes

D. Applications linéaires et somme directe

Définition

E_1 sev de E $f : E \rightarrow F$ linéaire

Restriction de f à E_1 :

$$\begin{aligned} f|_{E_1} : E_1 &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

Définition

E_1 sev de E $f : E \rightarrow F$ linéaire

Restriction de f à E_1 :

$$\begin{aligned} f|_{E_1} : E_1 &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors sa restriction à E_1 est linéaire.

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors sa restriction à E_1 est linéaire.

De plus l'application **restriction à E_1** :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1, F) \\ f &\longmapsto f|_{E_1}\end{aligned}$$

est linéaire.

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. $(u, v) \in E_1^2 \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$$f|_{E_1}(\lambda u + v) =$$

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. $(u, v) \in E_1^2 \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$$f|_{E_1}(\lambda u + v) = f(\lambda u + v)$$

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. $(u, v) \in E_1^2 \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f|_{E_1}(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Proposition

Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire alors sa restriction à E_1 est linéaire.

Démonstration. $(u, v) \in E_1^2 \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} f|_{E_1}(\lambda u + v) &= f(\lambda u + v) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \\ &= \lambda f|_{E_1}(u) + f|_{E_1}(v) \end{aligned}$$

Donc $f|_{E_1}$ est linéaire.

Proposition

De plus l'application **restriction à E_1** :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1, F) \\ f &\longmapsto f|_{E_1}\end{aligned}$$

est linéaire.

Démonstration. $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2 \quad \lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}\forall u \in E_1 \quad (\lambda f + g)|_{E_1}(u) &= (\lambda f + g)(u) \\ &= \lambda f(u) + g(u) \\ &= \lambda f|_{E_1}(u) + g|_{E_1}(u)\end{aligned}$$

donc $(\lambda f + g)|_{E_1} = \lambda f|_{E_1} + g|_{E_1}$.



Proposition

$$\blacktriangleright E = E_1 \oplus E_2$$

$$\blacktriangleright f_1 : E_1 \rightarrow F \quad f_2 : E_2 \rightarrow F$$

Alors il existe une unique application linéaire

$$f : E \rightarrow F$$

telle que :

$$f|_{E_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f|_{E_2} = f_2$$

Proposition

$$\blacktriangleright E = E_1 \oplus E_2$$

$$\blacktriangleright f_1 : E_1 \rightarrow F \quad f_2 : E_2 \rightarrow F$$

Alors il existe une unique application linéaire

$$f : E \rightarrow F$$

telle que :

$$f|_{E_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f|_{E_2} = f_2$$

Remarque

Une application linéaire définie sur $E_1 \oplus E_2$ est **uniquement déterminée** par ses restrictions à E_1 et E_2 .

Démonstration.

► Si une telle application existe alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad \forall u_2 \in E_2$$

$$f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

Démonstration.

- Si une telle application existe alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad \forall u_2 \in E_2$$
$$f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

- On pose donc :

$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

Démonstration.

- Si une telle application existe alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad \forall u_2 \in E_2$$
$$f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

- On pose donc :

$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

- Cette application est bien définie.

Démonstration.

- ▶ Si une telle application existe alors :

$$\forall u_1 \in E_1 \quad \forall u_2 \in E_2$$
$$f(u_1 + u_2) = f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

- ▶ On pose donc :

$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

- ▶ Cette application est bien définie.
- ▶ Elle est linéaire.

Démonstration.

▶
$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

▶ Cette application est linéaire.

$$f(\lambda u + v) = f(\lambda(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2))$$

Démonstration.

►
$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

► Cette application est linéaire.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)) \\ &= f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) \end{aligned}$$

Démonstration.

►
$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

► Cette application est linéaire.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)) \\ &= f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) \\ &= f_1(\lambda u_1 + v_1) + f_2(\lambda u_2 + v_2) \end{aligned}$$

Démonstration.

▶
$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

▶ Cette application est linéaire.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)) \\ &= f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) \\ &= f_1(\lambda u_1 + v_1) + f_2(\lambda u_2 + v_2) \\ &= \lambda f_1(u_1) + f_1(v_1) + \lambda f_2(u_2) + f_2(v_2) \end{aligned}$$

Démonstration.

►
$$f : E_1 \oplus E_2 \longrightarrow F$$
$$u_1 + u_2 \longmapsto f_1(u_1) + f_2(u_2)$$

► Cette application est linéaire.

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda(u_1 + u_2) + (v_1 + v_2)) \\ &= f((\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2)) \\ &= f_1(\lambda u_1 + v_1) + f_2(\lambda u_2 + v_2) \\ &= \lambda f_1(u_1) + f_1(v_1) + \lambda f_2(u_2) + f_2(v_2) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned} \quad \square$$

Proposition

► $E = E_1 \oplus E_2$

► $f_1 : E_1 \rightarrow F \quad f_2 : E_2 \rightarrow F$

Alors il existe une unique application linéaire

$$f : E \rightarrow F$$

telle que :

$$f|_{E_1} = f_1 \quad \text{et} \quad f|_{E_2} = f_2$$

Proposition - Autre formulation

► $E = E_1 \oplus E_2$

Alors l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{L}(E_1, F) \times \mathcal{L}(E_2, F) \\ f &\longmapsto (f|_{E_1}, f|_{E_2})\end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

II. Image et noyau

A. Définitions

B. Propriétés

C. Application : systèmes et équations différentielles linéaires

III. Formes linéaires

IV. Projecteurs et symétries

II. Image et noyau

A. Définitions

B. Propriétés

C. Application : systèmes et équations
différentielles linéaires

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad E_1 \text{ sev de } E \quad \implies \quad f(E_1) \text{ sev de } F$$

$$(ii) \quad F_1 \text{ sev de } F \quad \implies \quad f^{-1}(F_1) \text{ sev de } E$$

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad E_1 \text{ sev de } E \quad \implies \quad f(E_1) \text{ sev de } F$$

$$(ii) \quad F_1 \text{ sev de } F \quad \implies \quad f^{-1}(F_1) \text{ sev de } E$$

Démonstration.

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad E_1 \text{ sev de } E \quad \implies \quad f(E_1) \text{ sev de } F$$

$$(ii) \quad F_1 \text{ sev de } F \quad \implies \quad f^{-1}(F_1) \text{ sev de } E$$

Démonstration.



Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad E_1 \text{ sev de } E \quad \implies \quad f(E_1) \text{ sev de } F$$

$$(ii) \quad F_1 \text{ sev de } F \quad \implies \quad f^{-1}(F_1) \text{ sev de } E$$

Exemple

$$f(\{0_E\}) = \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad f^{-1}(F) =$$

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad E_1 \text{ sev de } E \quad \implies \quad f(E_1) \text{ sev de } F$$

$$(ii) \quad F_1 \text{ sev de } F \quad \implies \quad f^{-1}(F_1) \text{ sev de } E$$

Exemple

$$f(\{0_E\}) = \{0_F\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(F) =$$

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad E_1 \text{ sev de } E \quad \implies \quad f(E_1) \text{ sev de } F$$

$$(ii) \quad F_1 \text{ sev de } F \quad \implies \quad f^{-1}(F_1) \text{ sev de } E$$

Exemple

$$f(\{0_E\}) = \{0_F\} \quad \text{et} \quad f^{-1}(F) = E$$

Définitions

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

Image de f :

$$\operatorname{im} f = f(E) = \{ f(u) \mid u \in E \}$$

Définitions

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

Image de f :

$$\operatorname{im} f = f(E) = \{ f(u) \mid u \in E \}$$

Noyau de f :

$$\ker f = f^{-1}(\{0_F\}) = \{ u \in E \mid f(u) = 0_F \}$$

II. Image et noyau

A. Définitions

B. Propriétés

C. Application : systèmes et équations
différentielles linéaires

Proposition

$f : E \rightarrow F$ linéaire

$\text{im } f$: sev de F $\text{ker } f$: sev de E

Remarque

Caractérisation des éléments de l'image et du noyau :

$$\forall u \in E \quad u \in \ker f \iff f(u) = 0_F$$

Remarque

Caractérisation des éléments de l'image et du noyau :

$$\forall v \in F \quad v \in \operatorname{im} f \iff \exists u \in E \quad f(u) = v$$

$$\forall u \in E \quad u \in \ker f \iff f(u) = 0_F$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x - 2y - z, 2x - z) \end{aligned}$$

Démontrer que f est linéaire.

Calculer son noyau et son image.

▷ Exercice 1.

Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (3x - y, x + 2y + z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x - y, 3x + 3y, x + 2y) \end{aligned}$$

Déterminer leurs noyaux et leurs images.

▷ Exercice 2.

Démontrer que les applications suivantes sont linéaires.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K} \\ P &\longmapsto P(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g : \mathbb{K}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_2[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

Déterminer leurs noyaux et leurs images.

Exemple 3

A : matrice fixée de taille (n, p)

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

f est linéaire.

Exemple 3

A : matrice fixée de taille (n, p)

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX \end{aligned}$$

f est linéaire.

Remarque

L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Exemple 4

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y &\longmapsto y'' + 5y' - 6y \end{aligned}$$

f est bien définie

Exemple 4

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y &\longmapsto y'' + 5y' - 6y \end{aligned}$$

f est bien définie et linéaire.

Exemple 4

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \\ y &\longmapsto y'' + 5y' - 6y \end{aligned}$$

f est bien définie et linéaire.

Remarque

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + 5y' - 6y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

- (i) f injective $\iff \ker f = \{0_E\}$
- (ii) f surjective $\iff \operatorname{im} f = F$

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad f \text{ injective} \iff \ker f = \{0_E\}$$

$$(ii) \quad f \text{ surjective} \iff \operatorname{im} f = F$$

▷ Exercice 3.

Parmi les applications linéaires proposées dans les deux exercices précédents, lesquelles sont injectives ?
Surjectives ?

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad f \text{ injective} \iff \ker f = \{0_E\}$$

$$(ii) \quad f \text{ surjective} \iff \operatorname{im} f = F$$

Démonstration du (ii).

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad f \text{ injective} \iff \ker f = \{0_E\}$$

$$(ii) \quad f \text{ surjective} \iff \operatorname{im} f = F$$

Démonstration du (i).

Théorème

Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire.

$$(i) \quad f \text{ injective} \iff \ker f = \{0_E\}$$

$$(ii) \quad f \text{ surjective} \iff \operatorname{im} f = F$$

Démonstration du (i).



II. Image et noyau

A. Définitions

B. Propriétés

C. Application : systèmes et équations
différentielles linéaires

Propositions

- (i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Propositions

(ii) Soit $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle I .
L'ensemble des solutions de l'équation
différentielle **homogène**

$$y' - a(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Propositions

(iii) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle **homogène**

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Propositions

(i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \\ X &\longmapsto AX. \end{aligned}$$

f est linéaire.

Son noyau est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Propositions

(ii) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle **homogène**

$$y' - a(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ y &\longmapsto y' - a(t)y. \end{aligned}$$

f est linéaire. Son noyau est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$.

Propositions

(iii) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle **homogène**

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Démonstration. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \\ y &\longmapsto ay'' + by' + cy. \end{aligned}$$

f est linéaire. Son noyau est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. □

Proposition

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire
 b un élément de F .

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est

- ▶ soit vide,
- ▶ soit un sous-espace affine de E ,
de direction $\ker f$.

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est

- ▶ soit vide,
- ▶ soit un sous-espace affine de E ,
de direction $\ker f$.

Remarques

Une équation d'inconnue u de la forme

$$f(u) = b$$

où f est linéaire, est appelée **équation linéaire**.

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est

- ▶ soit vide,
- ▶ soit un sous-espace affine de E ,
de direction $\ker f$.

Remarques

- (i) L'ensemble des solutions d'un système linéaire est soit vide, soit un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions du système homogène associé.

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est

- ▶ soit vide,
- ▶ soit un sous-espace affine de E ,
de direction $\ker f$.

Remarques

- (ii) L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire est un sous-espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée.

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vidé.

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vidé.

Il contient alors un vecteur u_1 de E : $f(u_1) = b$

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vide.

Il contient alors un vecteur u_1 de E : $f(u_1) = b$

Pour tout autre vecteur u de E :

$$\begin{aligned} f(u) = b & \iff f(u) = f(u_1) \\ & \iff f(u) - f(u_1) = 0_F \\ & \iff f(u - u_1) = 0_F \\ & \iff u - u_1 \in \ker f \\ & \iff u \in u_1 + \ker f \end{aligned}$$

Démonstration. Supposons que l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est non-vide.

$$\begin{aligned} f(u) = b & \iff f(u) = f(u_1) \\ & \iff f(u) - f(u_1) = 0_F \\ & \iff f(u - u_1) = 0_F \\ & \iff u - u_1 \in \ker f \\ & \iff u \in u_1 + \ker f \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = b$ est l'ensemble $u_1 + \ker f$, qui est un sous-espace affine de E dirigé par $\ker f$. □

Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

II. Image et noyau

III. Formes linéaires

A. Définitions et exemples

B. Applications à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

C. Droites et hyperplans

IV. Projecteurs et symétries

III. Formes linéaires

A. Définitions et exemples

B. Applications à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

C. Droites et hyperplans

Définition

Forme linéaire : application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Définition

Forme linéaire : application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5

$$\begin{aligned}(i) \quad f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longmapsto x - 2y + 5z\end{aligned}$$

Définition

Forme linéaire : application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5

$$\begin{array}{ll} (ii) \quad \mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K} & \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto P(5) & f \longmapsto f(3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u_n) \longmapsto u_6 \end{array}$$

Définition

Forme linéaire : application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemple 5

$$\begin{aligned} (iii) \quad \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f'(2) \end{aligned}$$

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} e_i^* : \quad E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} e_i^* : \quad E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} e_i^* : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Définition

Les e_i^* sont appelées **formes coordonnées** relativement à la base $\mathcal{B}$.

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} e_i^* : \quad E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Exemple

Formes coordonnées selon la base canonique :

$$\begin{aligned} e_i^* : \quad \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} e_i^* : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Démonstration.

u et v de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \longmapsto \lambda_i$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Démonstration.

u et v de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$\begin{aligned} \alpha u + v &= \alpha(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &\quad + (\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n) \\ &= (\alpha \lambda_1 + \mu_1) e_1 + \dots + (\alpha \lambda_n + \mu_n) e_n \end{aligned}$$

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$\begin{aligned} e_i^* : \quad E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n &\longmapsto \lambda_i \end{aligned}$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Démonstration.

u et v de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$\alpha u + v = (\alpha \lambda_1 + \mu_1) e_1 + \dots + (\alpha \lambda_n + \mu_n) e_n$$

Proposition

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ base de E $\forall i = 1, \dots, n :$

$$e_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \longmapsto \lambda_i$$

Les e_i^* sont des formes linéaires.

Démonstration.

u et v de coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$

$$\alpha u + v$$

Donc

$$e_i^*(\alpha u + v) = \alpha \lambda_i + \mu_i = \alpha e_i^*(u) + e_i^*(v) \quad \square$$

Proposition

Toute forme linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ est de la forme :

$$f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_px_p$$

Proposition

Toute forme linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ est de la forme :

$$f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_px_p$$

Rappel

$$\begin{aligned} e_i^* : \quad \mathbb{K}^p &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Remarque

$$f = a_1e_1^* + \dots + a_pe_p^*$$

Par combinaison linéaire f est bien linéaire.

Proposition

Toute forme linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ est de la forme :

$$f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto a_1x_1 + \dots + a_px_p$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}$ **linéaire**

On pose : $\forall i = 1, \dots, p \quad a_i = f(e_i)$

Alors :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) &= f(x_1e_1 + \dots + x_pe_p) \\ &= x_1f(e_1) + \dots + x_pf(e_p) \\ &= x_1a_1 + \dots + x_pa_p \end{aligned}$$



III. Formes linéaires

A. Définitions et exemples

B. Applications à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

C. Droites et hyperplans

Définition

$$f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\forall u \in E \quad f(u) = \underbrace{(f_1(u), \dots, f_n(u))}_{\text{composantes de } f}$$

Définition

$$f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\forall u \in E \quad f(u) = \underbrace{(f_1(u), \dots, f_n(u))}_{\text{composantes de } f}$$

Proposition

Une application $E \rightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si toutes ses composantes sont linéaires.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x + 3y, x - 5y) \end{aligned}$$

admet pour composantes :

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x + 3y, x - 5y) \end{aligned}$$

admet pour composantes :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 4x + 3y & & & (x, y) &\longmapsto x - 5y \end{aligned}$$

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (4x + 3y, x - 5y) \end{aligned}$$

admet pour composantes :

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & & f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 4x + 3y & & & (x, y) &\longmapsto x - 5y \end{aligned}$$

Ces deux applications sont des formes linéaires car elles sont de la forme $(x, y) \mapsto ax + by$ donc par propriété f est linéaire.

Définition

$$f : E \rightarrow \mathbb{K}^n$$

$$\forall u \in E \quad f(u) = \underbrace{(f_1(u), \dots, f_n(u))}_{\text{composantes de } f}$$

Proposition

Une application $E \rightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire si et seulement si toutes ses composantes sont linéaires.

Démonstration. Supposons que f est linéaire.

$$u \xrightarrow{f} (f_1(u), \dots, f_n(u)) \xrightarrow{e_i^*} f_i(u)$$

$f_i = e_i^* \circ f$ donc par composition f_i est linéaire.

Démonstration. Supposons que les f_i sont linéaires.

Alors pour tout $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= (f_1(\lambda u + v), \dots, f_n(\lambda u + v)) \\ &= (\lambda f_1(u) + f_1(v), \dots, \lambda f_n(u) + f_n(v)) \\ &= \lambda(f_1(u), \dots, f_n(u)) \\ &\quad + (f_1(v), \dots, f_n(v)) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

Ceci montre que f est linéaire.



Remarque

Toute application linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est de la forme :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_p) = & (a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p, \\ & a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p, \\ & \dots \dots \dots \\ & a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p) \end{aligned}$$

Remarque

Toute application linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est de la forme :

$$f(x_1, \dots, x_p) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p, \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p)$$

En colonnes :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p \end{pmatrix}$$

Remarque

Toute application linéaire $f : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est de la forme :

$$f(x_1, \dots, x_p) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p, \\ \dots \dots \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p)$$

En colonnes :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{f}} \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p \end{pmatrix} = AX$$

Remarque

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^n \\ \varphi_p \downarrow & & \uparrow \varphi_n^{-1} \\ \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) & \xrightarrow[m_A]{\tilde{f}} & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{array}$$

Remarque

$$\begin{array}{ccccc}
 (x_1, \dots, x_p) & \mathbb{K}^p & \xrightarrow{f} & \mathbb{K}^n & (y_1, \dots, y_n) \\
 \downarrow & \downarrow \varphi_p & & \uparrow \varphi_n^{-1} & \uparrow \\
 \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mathcal{M}_{p1}(\mathbb{K}) & \xrightarrow[m_A]{\tilde{f}} & \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K}) & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
 & X & \longmapsto & AX &
 \end{array}$$

Remarque

Toute application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est donnée par une matrice de taille (n, p) .

L'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ A &\longmapsto \varphi_n^{-1} \circ m_A \circ \varphi_p\end{aligned}$$

III. Formes linéaires

A. Définitions et exemples

B. Applications à valeurs dans $\mathbb{K}^n$

C. Droites et hyperplans

Définition

Une **droite vectorielle** est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul :

$$D = \text{Vect}(u) \quad u \neq 0_E$$

Définition

Une **droite vectorielle** est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul :

$$D = \text{Vect}(u) \quad u \neq 0_E$$

Remarque

Si $u_0 \in D$ est non-nul alors :

$$D = \text{Vect}(u_0)$$

Définition

Une **droite vectorielle** est un sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non-nul :

$$D = \text{Vect}(u) \quad u \neq 0_E$$

Exemple

Toute droite de $\mathbb{K}^p$ est de la forme :

$$D = \{ (\lambda a_1, \dots, \lambda a_p) \mid \lambda \in \mathbb{K} \}$$

où les a_i ne sont pas tous nuls.

Définition

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E .

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{non-nulle}$$

Définition

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E .

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{non-nulle}$$

Remarque

H est un sous-espace vectoriel de E .

Définition

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E .

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{non-nulle}$$

Exemple

Hyperplan de $\mathbb{K}^p$:

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \mid a_1x_1 + \dots + a_px_p = 0 \right\}$$

où les a_i sont des scalaires non tous nuls.

Définition

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E .

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{non-nulle}$$

Exemple

Hyperplan de $\mathbb{R}^2$:

$$H = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0 \}$$

Il s'agit d'une droite vectorielle.

Définition

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non-nulle de E .

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{non-nulle}$$

Exemple

Hyperplan de $\mathbb{R}^3$:

$$H = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0 \}$$

Il s'agit d'un plan vectoriel.

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Toute droite vectorielle non contenue dans H est supplémentaire de H .

$$D \not\subset H \implies E = H \oplus D$$

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Soit $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Soit $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$.

u_0 est non-nul donc D est une droite vectorielle.

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Soit $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$.

u_0 est non-nul donc D est une droite vectorielle.

Démontrons que $E = H \oplus D$.

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Soit $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) \neq 0$.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$.

u_0 est non-nul donc D est une droite vectorielle.

On a démontré que $E = H \oplus D$.

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Toute droite vectorielle non contenue dans H est supplémentaire de H .

$$D \not\subseteq H \implies E = H \oplus D$$

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Proposition

Soit H un hyperplan de E .

Toute droite vectorielle non contenue dans H est supplémentaire de H .

$$D \not\subseteq H \implies E = H \oplus D$$

Démonstration. H est un hyperplan donc :

$$H = \ker \varphi \quad \text{avec} \quad \varphi : E \rightarrow \mathbb{K} \text{ non-nulle.}$$

Si $D \not\subseteq H$ alors il existe $u_0 \in D \setminus H$.

$\varphi(u_0) \neq 0$ donc comme ci-dessus : $E = H \oplus D$ $\square$

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E . Tout supplémentaire de D est un hyperplan de E .

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E . Tout supplémentaire de D est un hyperplan de E .

Démonstration. Soit H un supplémentaire de D .

Soit u_0 engendrant D : $D = \text{Vect}(u_0)$

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E . Tout supplémentaire de D est un hyperplan de E .

Démonstration. Soit H un supplémentaire de D .

Soit u_0 engendrant D : $D = \text{Vect}(u_0)$

Comme $E = D \oplus H$ alors il existe une unique application linéaire $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall u \in D \quad \varphi(u) = u_0^*(u) \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_D = u_0^*$$

$$\forall u \in H \quad \varphi(u) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_H = 0$$

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E . Tout supplémentaire de D est un hyperplan de E .

Démonstration.

$$\forall u \in D \quad \varphi(u) = u_0^*(u) \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_D = u_0^*$$

$$\forall u \in H \quad \varphi(u) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_H = 0$$

Pour tout $u \in E$: $u = \lambda u_0 + v \quad \lambda \in \mathbb{K}, v \in H$

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E . Tout supplémentaire de D est un hyperplan de E .

Démonstration.

$$\forall u \in D \quad \varphi(u) = u_0^*(u) \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_D = u_0^*$$

$$\forall u \in H \quad \varphi(u) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_H = 0$$

Pour tout $u \in E$: $u = \lambda u_0 + v \quad \lambda \in \mathbb{K}, v \in H$

Donc : $\varphi(u) = \lambda \varphi(u_0) + \varphi(v) = \lambda$

Proposition

Soit D une droite vectorielle de E . Tout supplémentaire de D est un hyperplan de E .

Démonstration.

$$\forall u \in D \quad \varphi(u) = u_0^*(u) \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_D = u_0^*$$

$$\forall u \in H \quad \varphi(u) = 0 \quad \text{i.e.,} \quad \varphi|_H = 0$$

Pour tout $u \in E$: $u = \lambda u_0 + v \quad \lambda \in \mathbb{K}, v \in H$

Donc : $\varphi(u) = \lambda \varphi(u_0) + \varphi(v) = \lambda$

Donc $\ker \varphi = H$, et comme φ est non-nulle alors H est un hyperplan de E . $\square$

Proposition

φ, ψ formes linéaires.

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Proposition

φ, ψ formes linéaires.

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Remarque

Ainsi, pour tout hyperplan H , les formes linéaires dont H est le noyau sont proportionnelles.

Proposition

φ, ψ formes linéaires.

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Remarque

Par exemple pour le plan de $\mathbb{R}^3$:

$$H : \quad ax + by + cz = 0$$

Les équations de H sont :

$$\lambda ax + \lambda by + \lambda cz = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}^*)$$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Si $\varphi = 0$ alors $\ker \varphi = E$

donc $\ker \psi = E$ puis $\psi = 0$.

φ et ψ sont proportionnelles dans ce cas.

($\lambda = 1$ convient)

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Si $\varphi = 0$ alors $\ker \varphi = E$

donc $\ker \psi = E$ puis $\psi = 0$.

φ et ψ sont proportionnelles dans ce cas.

($\lambda = 1$ convient)

Supposons maintenant que φ est non-nulle.

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $H = \ker \varphi$: H est un hyperplan.

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $H = \ker \varphi$: H est un hyperplan.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$ un supplémentaire de H .

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $H = \ker \varphi$: H est un hyperplan.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$ un supplémentaire de H .

$\varphi(u_0)$ et $\psi(u_0)$ ne sont pas nuls.

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $H = \ker \varphi$: H est un hyperplan.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$ un supplémentaire de H .

$\varphi(u_0)$ et $\psi(u_0)$ ne sont pas nuls.

On pose $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$ puis on démontre que $\psi = \lambda \varphi$.

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $H = \ker \varphi$: H est un hyperplan.

Soit $D = \text{Vect}(u_0)$ un supplémentaire de H .

$\varphi(u_0)$ et $\psi(u_0)$ ne sont pas nuls.

On pose $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$ puis on démontre que $\psi = \lambda \varphi$.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

Par combinaison linéaire f est une forme linéaire.

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

$$\forall v \in H \quad f(v) = \psi(v) - \lambda \varphi(v) = 0$$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

$$\forall v \in H \quad f(v) = \psi(v) - \lambda \varphi(v) = 0$$

$$\forall w \in D \quad f(w) = f(\alpha u_0) \quad (\alpha \in \mathbb{K})$$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

$$\forall v \in H \quad f(v) = \psi(v) - \lambda \varphi(v) = 0$$

$$\forall w \in D \quad f(w) = \psi(\alpha u_0) - \lambda \varphi(\alpha u_0)$$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

$$\forall v \in H \quad f(v) = \psi(v) - \lambda \varphi(v) = 0$$

$$\forall w \in D \quad f(w) = \alpha(\psi(u_0) - \lambda \varphi(u_0)) = 0$$

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

$$\forall v \in H \quad f(v) = \psi(v) - \lambda \varphi(v) = 0$$

$$\forall w \in D \quad f(w) = \alpha(\psi(u_0) - \lambda \varphi(u_0)) = 0$$

$E = H \oplus D$ donc f est uniquement déterminée par ses restrictions à H et D .

Proposition

Si $\ker \varphi = \ker \psi$ alors φ et ψ sont proportionnelles :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad \psi = \lambda \varphi$$

Démonstration.

Soit $f = \psi - \lambda \varphi$ avec $\lambda = \frac{\psi(u_0)}{\varphi(u_0)}$

$$\forall v \in H \quad f(v) = \psi(v) - \lambda \varphi(v) = 0$$

$$\forall w \in D \quad f(w) = \alpha(\psi(u_0) - \lambda \varphi(u_0)) = 0$$

Donc f est nulle.

Donc ψ et φ sont proportionnelles.



Chapitre B9. Applications linéaires

I. Généralités

II. Image et noyau

III. Formes linéaires

IV. Projecteurs et symétries

A. Projecteurs

B. Symétries

IV. Projecteurs et symétries

A. Projecteurs

B. Symétries

Définition

$$E = F \oplus G$$

Projecteur de E sur F parallèlement à G :

$$\begin{aligned} p : \quad E &\longrightarrow E \\ v + w &\longmapsto v \end{aligned}$$

Définition

$$E = F \oplus G$$

Projecteur de E sur F parallèlement à G :

$$\begin{aligned} p : \quad E &\longrightarrow E \\ v + w &\longmapsto v \end{aligned}$$

Proposition

- (i) p est un endomorphisme de E
- (ii) $\operatorname{im} p = F \quad \operatorname{ker} p = G$

Démonstration.

$$\begin{array}{ll} (i) \quad f_1 : F \longrightarrow E & f_2 : G \longrightarrow E \\ u \longmapsto u & u \longmapsto 0_E \end{array}$$

p est l'unique endomorphisme de E tel que
 $p|_F = f_1$ et $p|_G = f_2$.

Suite de la démonstration.

$$(ii) \quad u = v + w \quad \text{avec } v \in F \text{ et } w \in G$$

Suite de la démonstration.

$$(ii) \quad u = v + w \quad \text{avec } v \in F \text{ et } w \in G$$

$$p(u) = v \text{ donc } p(u) \in F \qquad \text{im } p \subseteq F$$

Suite de la démonstration.

$$(ii) \quad u = v + w \quad \text{avec } v \in F \text{ et } w \in G$$

$$p(u) = v \text{ donc } p(u) \in F \qquad \text{im } p \subseteq F$$

$$\begin{aligned} \text{Si } u \in F \text{ alors } u &= u + 0_E \text{ donc} \\ u &= p(u) \in \text{im } p \end{aligned}$$

$$F \subseteq \text{im } p$$

Suite de la démonstration.

$$(ii) \quad u = v + w \quad \text{avec } v \in F \text{ et } w \in G$$

$$p(u) = v \text{ donc } p(u) \in F \qquad \text{im } p \subseteq F$$

$$\text{Si } u \in F \text{ alors } u = u + 0_E \text{ donc}$$

$$u = p(u) \in \text{im } p \qquad F \subseteq \text{im } p$$

$$\text{Si } u \in G \text{ alors } u = 0_E + u \text{ donc } p(u) = 0_E$$

$$G \subseteq \ker p$$

Suite de la démonstration.

$$(ii) \quad u = v + w \quad \text{avec } v \in F \text{ et } w \in G$$

$$p(u) = v \text{ donc } p(u) \in F \qquad \text{im } p \subseteq F$$

$$\begin{aligned} \text{Si } u \in F \text{ alors } u &= u + 0_E \text{ donc} \\ u &= p(u) \in \text{im } p \qquad F \subseteq \text{im } p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } u \in G \text{ alors } u &= 0_E + u \text{ donc } p(u) = 0_E \\ G &\subseteq \ker p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } p(u) = 0_E \text{ alors } u &= 0 \text{ donc } u \in G \\ \ker p &\subseteq G \end{aligned}$$



Remarque

$$\forall v \in F \quad p(v) = v$$

Théorème

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$

$$p \text{ projecteur} \iff p \circ p = p$$

p est alors le projecteur ► sur $\text{im } p$
► parallèlement à $\ker p$.

Lemme

$$p \in \mathcal{L}(E) \quad F = \operatorname{im} p \quad G = \ker p$$

Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Lemme

$$p \in \mathcal{L}(E) \quad F = \operatorname{im} p \quad G = \ker p$$

Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Démonstration.

Lemme

$$p \in \mathcal{L}(E) \quad F = \operatorname{im} p \quad G = \ker p$$

Si $p \circ p = p$ alors $E = F \oplus G$.

Démonstration.



Démonstration du théorème.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G alors :

$$p \circ p = p \qquad F = \operatorname{im} p \qquad G = \ker p$$

Démonstration du théorème.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G alors :

$$p \circ p = p \qquad F = \operatorname{im} p \qquad G = \ker p$$

Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Soit $F = \operatorname{im} p$ et $G = \ker p$. Alors

► $E = F \oplus G$ d'après le lemme,

Démonstration du théorème.

Si p est le projecteur sur F parallèlement à G alors :

$$p \circ p = p \qquad F = \operatorname{im} p \qquad G = \ker p$$

Réciproquement, soit $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Soit $F = \operatorname{im} p$ et $G = \ker p$. Alors

- ▶ $E = F \oplus G$ d'après le lemme,
- ▶ p est le projecteur sur F parallèlement à G car :

$$\forall u \in E \qquad u = \underbrace{p(u)}_{\in F} + \underbrace{(u - p(u))}_{\in G} \qquad \square$$

▷ Exercice 4.

Soit p l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in E \quad p(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y - z, \\ x + y - z, \\ x + y - z \end{pmatrix}$$

Démontrer que p est un projecteur, déterminer ses éléments caractéristiques (i.e., F et G).

▷ Exercice 5.

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$.

a. Démontrer que l'application :

$$p : u = (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \left(\sum_{k=1}^n a_k x_k \right) a$$

est un endomorphisme de $E = \mathbb{R}^n$.

b. Démontrer que p est un projecteur sur une droite vectorielle parallèlement à un hyperplan.

IV. Projecteurs et symétries

A. Projecteurs

B. Symétries

Définition

$$E = F \oplus G$$

Symétrie de E par rapport à F parallèlement à G :

$$\begin{aligned} s : \quad E &\longrightarrow E \\ v + w &\longmapsto v - w \end{aligned}$$

Proposition

Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G .
Alors

$$s = 2p - \text{Id}_E \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$$

Proposition

Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G .
Alors

$$s = 2p - \text{Id}_E \quad \text{et} \quad p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$$

$$\begin{aligned} \forall u \in E \quad s(u) &= 2p(u) - u \\ \text{et} \quad p(u) &= \frac{1}{2}(s(u) + u) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$2p(u) - u = 2v - (v + w) = v - w = s(u) \quad \square$$

Proposition

- (i) s est un endomorphisme de E
- (ii) $F = \{u \in E \mid s(u) = u\}$
 $G = \{u \in E \mid s(u) = -u\}$

Démonstration.

$$\begin{aligned} (i) \quad & p \text{ et } \text{Id}_E \text{ endomorphismes de } E \\ \implies & s = 2p - \text{Id}_E \text{ endomorphisme de } E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad s(u) = u & \iff 2p(u) - u = u \\ & \iff p(u) = u \\ & \iff u \in F \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(u) = -u & \iff 2p(u) - u = -u \\ & \iff p(u) = 0 \\ & \iff u \in G \end{aligned}$$



Théorème

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$

$$s \text{ symétrie} \iff s \circ s = \text{Id}_E$$

s est alors la symétrie ▶ par rapport à F
▶ parallèlement à G

$$\begin{aligned} \text{où } F &= \{u \in E \mid s(u) = u\} \\ G &= \{u \in E \mid s(u) = -u\} \end{aligned}$$

Démonstration. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G alors :

$$s \circ s(u) = s(v - w) = v - (-w) = u$$

Ceci montre que $s \circ s = \text{Id}_E$.

Suite de la démonstration. Réciproquement,
supposons que $s \circ s = \text{Id}_E$.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Alors :

Suite de la démonstration. Réciproquement,
supposons que $s \circ s = \text{Id}_E$.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Alors :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) = p$$

Suite de la démonstration. Réciproquement, supposons que $s \circ s = \text{Id}_E$.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Alors :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) = p$$

Donc p est le projecteur de E sur $F = \text{im } p$ sur $G = \text{ker } p$.

Suite de la démonstration. Réciproquement, supposons que $s \circ s = \text{Id}_E$.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$. Alors :

$$p \circ p = \frac{1}{4}(s \circ s + 2s + \text{Id}_E) = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E) = p$$

Donc p est le projecteur de E sur $F = \text{im } p$ sur $G = \text{ker } p$.

Comme $s = 2p - \text{Id}_E$, alors s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G . □

Remarque

Une symétrie est bijective, égale à sa propre réciproque.

▷ Exercice 6.

Soit s l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x, y) \in E \quad s(x, y) = (x, -2x - y)$$

Démontrer que s est une symétrie et en déterminer les éléments caractéristiques.

Prochain chapitre

Chapitre A10

Développements limités