Mathématiques

Chapitre B8
Espaces vectoriels

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

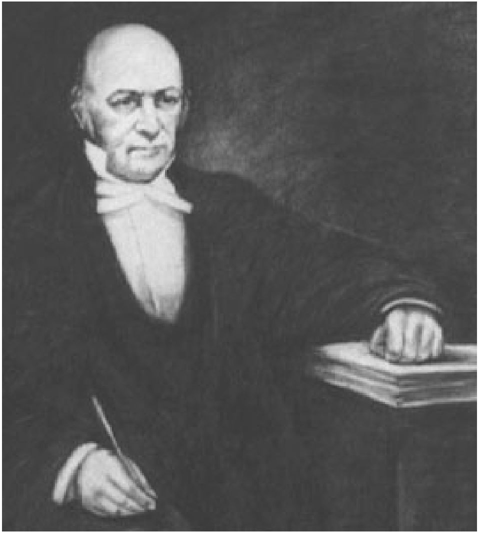
Année 2024-2025

Algèbre linéaire

René Descartes (France) 1596 – 1650

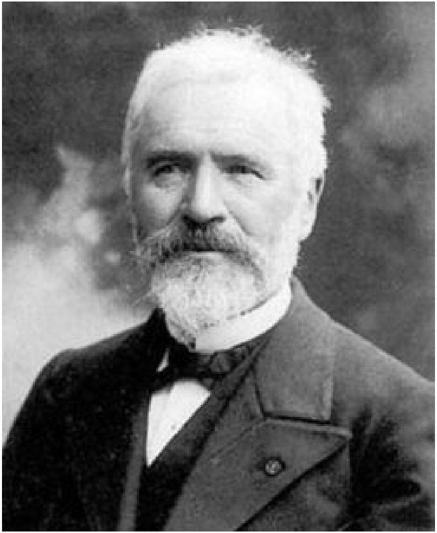
Carl Friedrich Gauss
(Allemagne) 1777 – 1855

William Rowan Hamilton
(Irlande) 1805 – 1865



Hermann Grassmann
(Allemagne) 1809 – 1877

Camille Jordan (France) 1838 – 1922



I. Espaces vectoriels

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad \text{ou} \qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

$\mathbb{K}$ est l'ensemble des scalaires.

Définition d'un espace vectoriel

Définition

- E : ensemble (vecteurs)
- Addition : $$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array}$$
- Multiplication par un scalaire : $$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

Définition d'un espace vectoriel

Définition (suite)

L'addition est

- commutative :
  $\forall (u, v) \in E^2 \qquad u + v = v + u$
- associative :
  $\forall (u, v, w) \in E^3 \qquad (u + v) + w = u + (v + w)$

Définition d'un espace vectoriel

Définition (suite)

- Il existe un vecteur de E noté 0_E et appelé vecteur nul, vérifiant
$$\forall u \in E \qquad u + 0_E = 0_E + u = u$$
- Tout vecteur u de E possède un opposé noté $-u$, satisfaisant
$$u + (-u) = (-u) + u = 0_E$$

On note $v - u$ au lieu de $v + (-u)$.

Définition d'un espace vectoriel

Définition (suite)

La multiplication par un scalaire vérifie :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (u, v) \in E^2 \qquad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in E \qquad 1_{\mathbb{K}} u = u$

Définition d'un espace vectoriel

Définition (alternative)

Un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un groupe abélien $(E, +)$ muni d'une loi de composition externe

$$\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

vérifiant :

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall u \in E \qquad (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (u, v) \in E^2 \qquad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$
- $\forall u \in E \qquad 1_{\mathbb{K}} u = u$

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

Démonstrations.

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

Démonstrations.

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

(iii) $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$

Démonstrations.

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

(iii) $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$

(iv) $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

<u>Démonstrations</u>.

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

(iii) $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$

(iv) $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

(v) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

<u>Démonstrations</u>.

Propositions

Pour tout $(u, v) \in E^2$, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:

(i) $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$

(ii) $\lambda 0_E = 0_E$

(iii) $(-1_{\mathbb{K}})u = -u$

(iv) $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$

(v) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

<u>Démonstrations</u>.

$\square$

Proposition

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda u = 0_E \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } u = 0_E)$$

Proposition

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda u = 0_E \quad \Longleftrightarrow \quad (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \ \text{ ou } \ u = 0_E)$$

Démonstration.

Proposition

Soit $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

$$\lambda u = 0_E \qquad \Longleftrightarrow \qquad (\lambda = 0_{\mathbb{K}} \;\text{ ou }\; u = 0_E)$$

Démonstration. $\square$

Espace vectoriel des n-uplets à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i = 1, \ldots, n \quad x_i \in \mathbb{K}\}}$$

$$(n \in \mathbb{N})$$

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) \\ -x &= (-x_1, \ldots, -x_n) \\ 0_{\mathbb{K}^n} &= (0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

EV des matrices de taille (n, p) à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathcal{M}_{n\,p}(\mathbb{K})} \qquad n,\, p \in \mathbb{N}^*$$

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

$$-A = (-a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \qquad 0_{\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})} = 0_{np} = (0)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

Espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathbb{K}[X]}$$

$$P + Q = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) X^k \qquad \lambda P = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_k X^k$$

$$-P = \sum_{k=0}^{+\infty} -a_k X^k \qquad 0_{\mathbb{K}[X]} = \sum_{k=0}^{+\infty} 0_{\mathbb{K}} X^k = 0_{\mathbb{K}}$$

Espace vectoriel des applications de Ω dans $\mathbb{K}$

$$\boxed{\mathbb{K}^{\Omega} \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})} \qquad (\Omega \neq \varnothing)$$

$$f + g : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \qquad \lambda f : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda\, f(x). \end{array}$$

$$-f : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & -f(x) \end{array} \qquad 0_{\mathbb{K}^{\Omega}} : \begin{array}{rcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & 0_{\mathbb{K}} \end{array}$$

Exemples

- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: suites réelles indexées par $\mathbb{N}$
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
  - $\lambda(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- $\mathbb{R}^{\{1,\dots,n\}} \simeq \mathbb{R}^n$

Produit cartésien de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels

$$\boxed{E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}}$$

$$\begin{aligned}
(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\
\lambda(x, y) &= (\lambda x, \lambda y) \\
-(x, y) &= (-x, -y) \\
0_{E \times F} &= (0_E, 0_F)
\end{aligned}$$

Produit cartésien de n espaces vectoriels

$$\boxed{E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i}$$

Définition

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E non-vide telle que :

- $\forall (u,v) \in F^2 \qquad u+v \in F$
- $\forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u \in F$

Proposition
Caractérisation des sous-espaces vectoriels

F est un sous-espace vectoriel de E ssi :

(i) $F \subseteq E$

(ii) $0_E \in F$

(iii) $\forall (u, v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u + v \in F$

<u>Démonstration</u>.

F partie de E non vide telle que :

(i') $\forall (u,v) \in F^2 \qquad u+v \in F$

(ii') $\forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u \in F$

$\iff$

(i) $F \subseteq E$

(ii) $0_E \in F$

(iii) $\forall (u,v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u + v \in F$

Démonstration.

F partie de E non vide telle que :

(i') $\forall (u,v) \in F^2 \qquad u+v \in F$

(ii') $\forall u \in F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u \in F$

$\Longleftrightarrow$

(i) $F \subseteq E$

(ii) $0_E \in F$

(iii) $\forall (u,v) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda u + v \in F$

$\square$

Remarque

Pour démontrer qu'un ensemble F est un sous-espace vectoriel de E on utilise la caractérisation plutôt que la définition.

Proposition

F sous-espace vectoriel de E
$\Longrightarrow F$ espace vectoriel

Remarque

Pour démontrer qu'un ensemble E est un espace vectoriel, il est souvent plus facile de vérifier qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence, comme $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou $\mathbb{R}[X]$.

Démonstration. Les lois de E sont :

$$+ : E \times E \to E \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times E \to E$$

Leurs restrictions à F sont :

$$+ : F \times F \to E \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times F \to E$$

Or F est stable par ces lois donc :

$$+ : F \times F \to F \qquad \text{et} \qquad \cdot : \mathbb{K} \times F \to F$$

Les axiomes sont vérifiés dans E donc ils le sont aussi dans F. $\square$

Définition

Soit

$u_1, u_2, \ldots, u_n$ des éléments de E

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires.

Alors le vecteur

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$$

est appelé combinaison linéaire des vecteurs u_1, $u_2, \ldots, u_n$.

Remarques

(i) Une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel est élément de cet espace vectoriel

Remarques

(i) Une combinaison linéaire de plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel est élément de cet espace vectoriel

(ii) Un sous-espace vectoriel de E est une partie non-vide de E stable par combinaisons linéaires.

Remarque : sous-espaces vectoriels triviaux

$\{0_E\}$ et E sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemples géométriques

(i) Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ est l'ensemble

$$\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Exemples géométriques

(i) Soit $\vec{u}$ un vecteur non-nul de $\mathbb{R}^2$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ est l'ensemble

$$\{\lambda\vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(ii) Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble

$$\left\{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Remarques

(i) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont :

- $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$
- les droites passant par $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$
- $\mathbb{R}^2$

Remarques

(ii) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :

- $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- les droites passant par $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0)$
- les plans contenant $0_{\mathbb{R}^3}$
- $\mathbb{R}^3$

Exemple 1

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 1

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemple 1

$\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2

$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
De même pour $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\infty$, etc.

▷ Exercice 1.

Les trois ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- $F_1 = \{(x, 2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- $F_2 = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$
- $F_3 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$

▷ Exercice 2.

Soit a un réel et :

- C_a l'ensemble des suites convergeant vers a
- $C = \bigcup_{a \in \mathbb{R}} C_a$

Les ensembles C_a et C sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

▷ Exercice 3.

Démontrer que

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \qquad \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$$

sont des espaces vectoriels.

Proposition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Proposition

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

Alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

$\square$

II. Sous-espaces vectoriels

A. Définition

B. Exemples

C. Intersection de sous-espaces vectoriels

D. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs

Définition

E : $\mathbb{K}$-espace vectoriel

$\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ famille de vecteurs de E

On note $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Définition

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposition

$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

$$\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposition

$\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Si $\mathcal{F}$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E alors l'ensemble $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ est appelé sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{F}$.

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \text{Vect}\,(u)$ est

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est la droite engendrée par u

$G = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est la droite engendrée par u

$G = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est $\mathbb{R}^2$

si u et v ne sont pas colinéaires.

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est la droite engendrée par u

$G = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est $\mathbb{R}^2$ si u et v ne sont pas colinéaires.

(ii) $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1, X) =$

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est la droite engendrée par u

$G = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est $\mathbb{R}^2$

si u et v ne sont pas colinéaires.

(ii) $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1, X) = \mathbb{K}_1[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1) =$

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est la droite engendrée par u

$G = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est $\mathbb{R}^2$

si u et v ne sont pas colinéaires.

(ii) $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1, X) = \mathbb{K}_1[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1) = \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$

$\mathbb{K}_2[X] =$

Exemples

(i) $E = \mathbb{R}^2$

$F = \mathrm{Vect}\,(u)$ est la droite engendrée par u

$G = \mathrm{Vect}\,(u, v)$ est $\mathbb{R}^2$

si u et v ne sont pas colinéaires.

(ii) $E = \mathbb{K}[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1, X) = \mathbb{K}_1[X]$

$\mathrm{Vect}\,(1) = \mathbb{K}_0[X] = \mathbb{K}$

$\mathbb{K}_2[X] = \mathrm{Vect}\,(1, X, X^2)$

Exemples

(iii) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}\right) =$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{22}\right) =$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{21}, E_{22}\right) =$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right) =$$

Exemples

(iii) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{22}\right) = \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{22}\right) =$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{21}, E_{22}\right) =$$

$$\mathrm{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right) =$$

Exemples

(iii) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Vect}\left(E_{11}, E_{22}\right) = \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$$

$$\text{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{22}\right) = \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$$

$$\text{Vect}\left(E_{11}, E_{21}, E_{22}\right) =$$

$$\text{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right) =$$

Exemples

(iii) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{22}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{22}) = \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{21}, E_{22}) = \mathcal{T}_2'(\mathbb{K})$$

$$\mathrm{Vect}\,(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) =$$

Exemples

(iii) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Vect}\left(E_{11}, E_{22}\right) = \mathcal{D}_2(\mathbb{K})$$

$$\operatorname{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{22}\right) = \mathcal{T}_2(\mathbb{K})$$

$$\operatorname{Vect}\left(E_{11}, E_{21}, E_{22}\right) = \mathcal{T}_2'(\mathbb{K})$$

$$\operatorname{Vect}\left(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Définition

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposition

$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

Définition

$$\operatorname{Vect}(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposition

$\operatorname{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

<u>Démonstration</u>.

$\square$

Définition

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

Proposition

$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarque

$$\mathrm{Vect}\,(\varnothing) = \{0_E\}$$

▷ Exercice 4.

Soit
$$E = \mathbb{R}^5$$
$$F = \operatorname{Vect}(u_1, u_2)$$

où
$$u_1 = (0, 1, 0, 0, 0)$$
$$u_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$$

On pose ensuite
$$v_1 = (5, 3, 5, 5, 5)$$
$$v_2 = (2, 2, 1, 1, 2)$$
$$v_3 = (-5, -5, -5, -5, -5)$$

Les vecteurs v_1, v_2, v_3 appartiennent-ils à F ?

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}^3$ et

$$u = (1, 3, 1) \quad v = (-1, -1, 0) \quad w = (0, 4, 2)$$

Quel est le sous-espace vectoriel F de E engendré par u, v, et w ?

Remarques

(i) Si $w \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ alors :

$$\mathrm{Vect}(\mathcal{F} \cup \{w\}) =$$

Remarques

(i) Si $w \in \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ alors :

$$\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F} \cup \{w\}\right) = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$$

(ii) Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors :

$$\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$$

Remarques

(i) Si $w \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ alors :

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F} \cup \{w\}) = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$$

(ii) Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors :

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G})$$

Propositions (autres définitions de Vect)

(i) $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

Propositions (autres définitions de Vect)

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Propositions (autres définitions de Vect)

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.

(ii) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

Remarque

(i) Si G est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\mathcal{F} \subseteq G \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subseteq G$$

Propositions (autres définitions de Vect)

(ii) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

Démonstration.

(ii) Soit $$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Propositions (autres définitions de Vect)

(ii) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

<u>Démonstration</u>.

(ii) Soit $$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Alors $F \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$

Propositions (autres définitions de Vect)

(ii) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

<u>Démonstration</u>.

(ii) Soit $$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Si $u \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ alors $u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$ où les u_i sont éléments de $\mathcal{F}$.

Les u_i appartiennent alors à tous les sev G de E contenant $\mathcal{F}$.

Donc $u \in F$.

Propositions (autres définitions de Vect)

(ii) $\mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{F}$.

Démonstration.

(ii) Soit $$F = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{F} \subseteq G}} G$$

Par double inclusion $F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$

Propositions (autres définitions de Vect)

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.

Démonstration.

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est un sev de E contenant $\mathcal{F}$.

Propositions (autres définitions de Vect)

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$.

<u>Démonstration</u>.

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est un sev de E contenant $\mathcal{F}$.
Si G est un autre sev de E contenant $\mathcal{F}$ alors $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subset G$, d'après le *(ii)*.
Ceci signifie que $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$. $\square$

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

A. Somme

B. Somme directe

C. Supplémentaires

Remarque

En général $F \cup G$ n'est pas un sev de E.

Remarque

En général $F \cup G$ n'est pas un sev de E.

Notation

F, G sous-espaces vectoriels de E.

On note $F + G$ l'ensemble des sommes d'un élément de F et d'un élément de G :

$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}$$

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Le sous-espace vectoriel $F+G$ de E est appelé somme de F et de G.

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(i) Si $u \in F$ et $v \in G$
alors $u \in E$ et $v \in E$
donc $u+v \in E$

Ceci montre que : $F+G \subseteq E$

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(ii) F, G sev donc $0_E \in F$ et $0_E \in G$

$$0_E = 0_E + 0_E \text{ donc } 0_E \in F+G$$

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(iii) $w_1 \in F+G \qquad w_2 \in F+G \qquad \lambda \in \mathbb{K}$

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(iii) $w_1 \in F+G \qquad w_2 \in F+G \qquad \lambda \in \mathbb{K}$

$$w_1 = u_1 + v_1 \quad w_2 = u_2 + v_2$$

avec $(u_1, u_2) \in F^2$ et $(v_1, v_2) \in G^2$

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(iii) $w_1 \in F + G \qquad w_2 \in F + G \qquad \lambda \in \mathbb{K}$

$$w_1 = u_1 + v_1 \quad w_2 = u_2 + v_2$$

avec $(u_1, u_2) \in F^2$ et $(v_1, v_2) \in G^2$

$$\begin{aligned} \lambda w_1 + w_2 &= \lambda(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \\ &= (\lambda u_1 + u_2) + (\lambda v_1 + v_2) \in F + G \end{aligned}$$

Proposition

Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E alors $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

(i) $F+G \subseteq E$

(ii) $0_E \in F+G$

(iii) $\forall (w_1, w_2) \in (F+G)^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda w_1 + w_2 \in F+G$$

$F+G$ est un sous-espace vectoriel de E. $\square$

Remarques

(i) $F \subseteq F + G$ $\qquad$ $G \subseteq F + G$

Remarques

(i) $F \subseteq F + G$ $\qquad$ $G \subseteq F + G$

(ii) $F + \{0_E\} =$ $\qquad$ $F + E =$

$F + F =$

Remarques

(i) $F \subseteq F + G$ $\qquad$ $G \subseteq F + G$

(ii) $F + \{0_E\} = F$ $\qquad$ $F + E =$

$F + F =$

Remarques

(i) $F \subseteq F + G$ $\qquad$ $G \subseteq F + G$

(ii) $F + \{0_E\} = F$ $\qquad$ $F + E = E$

$F + F =$

Remarques

(i) $F \subseteq F + G$ $\qquad$ $G \subseteq F + G$

(ii) $F + \{0_E\} = F$ $\qquad$ $F + E = E$

$F + F = F$

Remarques

(i) $F \subseteq F + G$ $\qquad$ $G \subseteq F + G$

(ii) $F + \{0_E\} = F$ $\qquad$ $F + E = E$

$F + F = F$

▷ Exercice 5.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité $F = F + G$.

Exemple 4

$E = \mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (1, 1, 0) \qquad F = \text{Vect}\left(\vec{u}_1\right)$$

$$\vec{v}_1 = (0, 2, 1) \qquad G = \text{Vect}\left(\vec{v}_1\right)$$

Donner une équation de $F + G$.

Exemple 4

$E = \mathbb{R}^3$

$$\vec{u}_1 = (1,1,0) \qquad F = \text{Vect}\left(\vec{u}_1\right)$$

$$\vec{v}_1 = (0,2,1) \qquad G = \text{Vect}\left(\vec{v}_1\right)$$

Donner une équation de $F + G$.

Remarque

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux familles de vecteurs de E alors :

$$\text{Vect}\left(\mathcal{F}\right) + \text{Vect}\left(\mathcal{G}\right) = \text{Vect}\left(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\right)$$

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition

F et G sous-espaces vectoriels de E

F et G sont en somme directe
ou la somme $F + G$ est directe

si tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Définition

F et G sous-espaces vectoriels de E

F et G sont en somme directe
ou la somme $F + G$ est directe

si tout élément de $F + G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall w \in F + G \qquad \exists! (u, v) \in F \times G \quad w = u + v$$

Proposition

F et G sont en somme directe

$$\iff F \cap G = \{0_E\}$$

Proposition

F et G sont en somme directe

$$\iff F \cap G = \{0_E\}$$

Démonstration.

Proposition

F et G sont en somme directe

$$\iff F \cap G = \{0_E\}$$

<u>Démonstration</u>.

$\square$

▷ Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire :

$$\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) + \mathcal{T}'_n(\mathbb{K})$$

Cette somme est-elle directe ?

III. Sommes de sous-espaces vectoriels

Définition

Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits supplémentaires si tout élément de E s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G.

$$\forall w \in E \qquad \exists!(u, v) \in F \times G \qquad w = u + v$$

Exemple 5

$E = \mathbb{R}^2$

$F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\vec{\imath})$

$G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\,(\vec{\jmath})$

Alors F et G sont supplémentaires.

Notation

F et G sont supplémentaires :

$$E = F \oplus G$$

Exemple 6

$$E = \mathbb{R}^3$$

$$F = \{(x, y, 0) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\,(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$$

$$G = \{(0, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\left(\vec{\jmath}, \vec{k}\right)$$

Alors $E = F + G$ mais cette somme n'est pas directe.

Théorème

F, G sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} (i) & F \cap G = \{0_E\} \\ (ii) & F + G = E \end{array}$$

Théorème

F, G sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E

$$E = F \oplus G \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ll} (i) & F \cap G = \{0_E\} \\ (ii) & F + G = E \end{array}$$

<u>Démonstration</u>. Évidente d'après ce qui précède. $\square$

Remarques

(i) Il est possible d'avoir

$$E = F \oplus G = F \oplus H$$

avec G et H différents.

On ne dit pas le supplémentaire de F
mais un supplémentaire de F.

Remarques

(i) Il est possible d'avoir

$$E = F \oplus G = F \oplus H$$

avec G et H différents.

On ne dit pas le supplémentaire de F mais un supplémentaire de F.

(ii) Toujours : $E = E \oplus \{0_E\}$

Remarques

(i) Il est possible d'avoir

$$E = F \oplus G = F \oplus H$$

avec G et H différents.

On ne dit pas le supplémentaire de F mais un supplémentaire de F.

(ii) Toujours : $E = E \oplus \{0_E\}$

(iii) Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

▷ Exercice 7.

Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et

F l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ paires

G l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaires

a. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

b. Démontrer que F et G sont supplémentaires. (*Raisonner par analyse-synthèse.*)

- On note E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.
- Une famille de vecteurs est ordonnée :

$$\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$$

Définition

$\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E

$\mathcal{F}$ est génératrice de E si :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$$

Exemple 7

$E = \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}_1 = ((1,0,0),(0,1,0))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0))$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1))$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0),(0,0,1))$$

Proposition

Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E
et u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$
alors $(u_1, \ldots, u_{p-1})$ est génératrice.

Démonstration.

u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$:

$\exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{p-1} u_{p-1}$$

<u>Démonstration</u>.

u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$:

$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{p-1} u_{p-1}$$

Soit $u \in E$

$(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E donc :

$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \qquad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$

Démonstration.

u_p est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_{p-1}$:

$\exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^{p-1}$

$$u_p = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{p-1} u_{p-1}$$

Soit $u \in E$

$(u_1, \ldots, u_p)$ est génératrice de E donc :

$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \qquad u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p$

Ceci donne :

$$u = (\lambda_1 + \lambda_p \alpha_1) u_1 + \cdots + (\lambda_{p-1} + \lambda_p \alpha_{p-1}) u_{p-1}$$

Donc $(u_1, \ldots, u_{p-1})$ est génératrice de E. $\square$

Proposition

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ familles de vecteurs de E

Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E
alors $\mathcal{G}$ est génératrice de E.

Proposition

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ familles de vecteurs de E

Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E

alors $\mathcal{G}$ est génératrice de E.

Démonstration. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors :

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G})$$

Proposition

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ familles de vecteurs de E

Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E
alors $\mathcal{G}$ est génératrice de E.

Démonstration. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors :

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subseteq \mathrm{Vect}\,(\mathcal{G}) \subseteq E$$

Proposition

$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ familles de vecteurs de E

Si $\mathcal{F}$ est génératrice de E
alors $\mathcal{G}$ est génératrice de E.

Démonstration. Si $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ alors :

$$E \subseteq \operatorname{Vect}(\mathcal{G}) \subseteq E$$

Donc $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{G})$, *i.e.*, $\mathcal{G}$ est génératrice de E. $\square$

Exemple 8

Donner une famille génératrice de :

(i) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.

(ii) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 4z = 0\}$

Exemple 8

Donner une famille génératrice de :

(i) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$.

(ii) $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 5y + 4z = 0\}$

▷ Exercice 8.

Donner une famille génératrice de :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z - 5t = 0\}$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y = z + 3t = 0\}$$

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5y - 4z = 0\}$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$

Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$
Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_p\right) \\ = &\mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \dots, u_p\right) \end{aligned}$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$

Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \\ = &\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \\ &\qquad (\lambda \neq 0) \end{aligned}$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$

Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_p) \\ = & \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$

Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \\ = &\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \ldots, u_p) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\mathcal{F}' \subseteq F \implies \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}') \subseteq F$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$
Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} & \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p\right) \\ = & \mathrm{Vect}\left(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i + \alpha u_j, u_{i+1}, \ldots, u_p\right) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' \subseteq F & \implies \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}'\right) \subseteq F \\ \mathcal{F} \subseteq F' & \implies \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right) \subseteq F' \end{aligned}$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$
Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \\ = &\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_{i-1}, \lambda u_i, u_{i+1}, \ldots, u_p) \\ &\hfill (\lambda \neq 0) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' \subseteq F &\implies \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}') \subseteq F \\ \mathcal{F} \subseteq F' &\implies \mathrm{Vect}\,(\mathcal{F}) \subseteq F' \end{aligned}$$

Proposition

$F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right)$ avec $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$

Alors F est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs de $\mathcal{F}$.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_p\right) \\ = \; &\mathrm{Vect}\left(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_p\right) \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' \subseteq F &\implies \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}'\right) \subseteq F \\ \mathcal{F} \subseteq F' &\implies \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right) \subseteq F' \end{aligned}$$

$\square$

Proposition

$$\begin{cases} F = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F}\right) \\ G = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{G}\right) \end{cases} \implies F + G = \mathrm{Vect}\left(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}\right)$$

Démonstration.

$$F = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p\}$$
$$G = \{\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q \mid (\mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^q\}$$

donc

$$\begin{aligned} F + G &= \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\} \\ &= \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p + \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_q v_q \\ &\qquad \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q) \in \mathbb{K}^{p+q}\} \\ &= \operatorname{Vect}(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q) \\ &= \operatorname{Vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G}) \end{aligned}$$

$\square$

Définitions

$\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E

$\mathcal{F}$ est libre si

$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$$

Définitions

$\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E

$\mathcal{F}$ est libre si

$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0_{\mathbb{K}}$$

On dit aussi que les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ sont linéairement indépendants.

Définitions (suite)

Si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est liée, ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ sont linéairement dépendants.

Proposition

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Proposition

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Remarque

Donc une famille est libre si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

Proposition

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Démonstration.

Proposition

Une famille est liée si et seulement si un de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres.

<u>Démonstration</u>.

$\square$

Exemple 7 (suite)

$E = \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}_1 = ((1,0,0),(0,1,0))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0))$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1))$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0),(0,0,1))$$

▷ Exercice 9.

$E = \mathbb{R}^3$

Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = ((3,2,1),(1,1,1),(6,3,1))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((4,3,1),(1,2,4),(6,5,3))$$

▷ Exercice 10.

$E = \mathbb{K}[X]$

Les familles suivantes sont-elles libres ?

$$\mathcal{F}_1 = (2 + X^2, -2 - X + X^2, 3X)$$

$$\mathcal{F}_2 = (1 + X^2, 2 + X + X^2, 1 + X)$$

$$\mathcal{F}_3 = (1, (X - 3), (X - 4)^2)$$

$$\mathcal{F}_4 = ((X - 1)(X - 2), (X - 1)(X - 3), (X - 2)(X - 3))$$

Proposition

$(u_1, \dots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(i) Si la famille $(u_1, \dots\dots, u_{p+1})$ est libre alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(i) Si la famille $(u_1, \ldots \ldots, u_{p+1})$ est libre alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

(ii) Si la famille $(u_1, \ldots \ldots, u_p)$ est liée alors la famille $(u_1, \ldots \ldots \ldots, u_{p+1})$ est liée.

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(i) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_{p+1})$ est libre
alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

(ii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est liée
alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée.

(iii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \ldots, u_p$.

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(i) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_{p+1})$ est libre alors la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

(ii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est liée alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée.

(iii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est libre alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \ldots, u_p$.

<u>Démonstration</u>. *(ii)* est conséquence de la proposition précédente.

Proposition

$(u_1, \dots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(i) Si la famille $(u_1, \dots\dots, u_{p+1})$ est libre
alors la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

(ii) Si la famille $(u_1, \dots\dots, u_p)$ est liée
alors la famille $(u_1, \dots\dots\dots, u_{p+1})$ est liée.

(iii) Si la famille $(u_1, \dots\dots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \dots\dots\dots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \dots, u_p$.

Démonstration. *(i)* est la contraposée de *(ii)*.

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(iii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \ldots, u_p$.

Démonstration. Démontrons la propriété *(iii)*.

Supposons que la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre.

Proposition

$(u_1, \dots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(iii) Si la famille $(u_1, \dots\dots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \dots\dots\dots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \dots, u_p$.

Démonstration. Démontrons la propriété *(iii)*.

Si la famille $(u_1, \dots, u_{p+1})$ est liée alors :

$\exists(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+1} \setminus \{0_{\mathbb{K}^{p+1}}\}$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$$

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(iii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \ldots, u_p$.

Démonstration. Démontrons la propriété *(iii)*.

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{p+1} u_{p+1} = 0_E$$

Si $\lambda_{p+1} = 0$
alors $\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p = 0_E$,
donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$.
Contradiction.

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(iii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \ldots, u_p$.

Démonstration. Démontrons la propriété *(iii)*.

Ainsi $\lambda_{p+1} \neq 0$, donc

$$u_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{p+1}} \right) u_i$$

u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$.

Proposition

$(u_1, \ldots, u_{p+1})$ famille de vecteurs de E

(iii) Si la famille $(u_1, \ldots\ldots, u_p)$ est libre
alors la famille $(u_1, \ldots\ldots\ldots, u_{p+1})$ est liée
ssi u_{p+1} est CL de $u_1, \ldots, u_p$.

Démonstration. Démontrons la propriété *(iii)*.

Réciproquement, si la famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre et u_{p+1} est combinaison linéaire de $u_1, \ldots, u_p$ alors la famille $(u_1, \ldots, u_{p+1})$ est liée d'après la proposition précédente. $\square$

Proposition

- La famille $\varnothing$ est libre.

Proposition

- La famille $\varnothing$ est libre.
- Soit $u \in E$.
  La famille (u) est libre ssi

Proposition

- La famille $\varnothing$ est libre.
- Soit $u \in E$.
  La famille (u) est libre ssi $u \neq 0_E$.

Proposition

- La famille $\varnothing$ est libre.
- Soit $u \in E$.
  La famille (u) est libre ssi $u \neq 0_E$.
- Soit $(u, v) \in E^2$.
  La famille (u, v) est libre ssi aucun des deux vecteurs n'est colinéaire à l'autre.

Proposition

- La famille $\varnothing$ est libre.
- Soit $u \in E$.
  La famille (u) est libre ssi $u \neq 0_E$.
- Soit $(u, v) \in E^2$.
  La famille (u, v) est libre ssi aucun des deux vecteurs n'est colinéaire à l'autre.
  La famille (u, v) est liée si et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad u = \lambda v \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{K} \quad v = \lambda u$$

Exemple 9

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} f_1(x) &= \cos x \\ f_2(x) &= \sin x \end{aligned}$$

Alors la famille (f_1, f_2) est libre.

▷ Exercice 11.

$E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} f_1(x) &= \cos x \\ f_2(x) &= \sin x \\ f_3(x) &= \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

La famille (f_1, f_2, f_3) est-elle libre ou liée ?

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. Quitte à permuter les polynômes, on peut supposer que leurs degrés sont croissants :

$$\deg P_0 < \deg P_1 < \cdots < \deg P_n$$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 P_0 + \cdots\cdots + \lambda_n P_n = 0$$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\lambda_0 P_0 + \cdots\cdots + \lambda_n P_n = 0$$

$$\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_m P_m = 0 \qquad \lambda_m \neq 0$$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\begin{aligned} & \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_m P_m = 0 \qquad \lambda_m \neq 0 \\ \Longrightarrow \qquad & P_m = -\frac{\lambda_0}{\lambda_m} P_0 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} P_{m-1} \end{aligned}$$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\begin{aligned} & \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_m P_m = 0 \qquad \lambda_m \neq 0 \\ \Longrightarrow \qquad & P_m = -\frac{\lambda_0}{\lambda_m} P_0 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} P_{m-1} \\ \deg P_m \quad & \leqslant \mathrm{Max}\,\{\deg P_0, \ldots, \deg P_{m-1}\} \end{aligned}$$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Démonstration. On suppose qu'il existe des scalaires $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls tels que :

$$\begin{aligned} & \lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_m P_m = 0 \qquad \lambda_m \neq 0 \\ \Longrightarrow \quad & P_m = -\frac{\lambda_0}{\lambda_m} P_0 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} P_{m-1} \\ \deg P_m \quad & \leqslant \operatorname{Max}\{\deg P_0, \ldots, \deg P_{m-1}\} \\ & < \deg P_m \end{aligned}$$

$\square$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Définition

Une famille $(P_0, \ldots, P_n)$ de polynômes est dite de degrés échelonnés si la suite $(\deg P_i)_{i=0\ldots n}$ est strictement croissante.

$$\deg P_0 < \deg P_1 < \cdots < \deg P_n$$

Proposition

Une famille de polynômes non-nuls de degrés distincts est libre.

Corollaire

Une famille de polynômes non-nuls de degrés échelonnés est libre.

IV. Familles de vecteurs

Définition

$\mathcal{F} = (u_1, \ldots, u_p)$ famille de vecteurs de E

$\mathcal{F}$ est une base de E si elle est libre et génératrice.

Exemple 7 (suite)

$E = \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F}_1 = ((1,0,0),(0,1,0))$$

$$\mathcal{F}_2 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0))$$

$$\mathcal{F}_3 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,1,1))$$

$$\mathcal{F}_4 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,0))$$

$$\mathcal{F}_5 = ((1,0,0),(0,1,0),(2,0,0),(0,0,1))$$

Théorème

$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ base de E $\qquad u \in E$

Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Théorème

$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ base de E $\qquad u \in E$

Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Définition

On dit que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$.

Théorème

$\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ base de E $\qquad u \in E$

Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Démonstration.

Théorème

$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ base de E $\qquad u \in E$

Il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tel que :

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

Démonstration.

$\square$

Proposition

E un espace vectoriel

$\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ famille de vecteurs de E

Si pour tout $u \in E$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que

$$u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$$

alors $\mathcal{B}$ est une base de E.

Démonstration. La famille $\mathcal{B}$ est génératrice.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_E$$

Or :

$$0_{\mathbb{K}} u_1 + \cdots + 0_{\mathbb{K}} u_n = 0_E$$

Par unicité :

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$$

La famille $\mathcal{B}$ est libre. $\square$

Exemple 10

$E = \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B}_1 = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$$

$$\mathcal{B}_2 = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$$

$$u = (9,3,7)$$

▷ Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}^2 \quad u_1 = (2, 1) \quad u_2 = (1, 2)$

a. Démontrer que la famille (u_1, u_2) est une base de E.

b. Donner les coordonnées des vecteurs $v = (13, 11)$ et $w = (-5, 1)$ dans cette base.

IV. Familles de vecteurs

Définition

Base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_c = (\ & (1,0,0,\dots,0),\\ & (0,1,0,\dots,0),\\ & (0,0,1,\dots,0),\\ & \dots\\ & (0,0,\dots,0,1)\ )\end{aligned}$$

Définition

Base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{B}_c = (e_1, \ldots, e_n)$$

avec pour tout $i = 1, \ldots, n$:

$$e_i = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0)$$

Définition

Base canonique de $\mathbb{K}^n$:

$$\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$$

avec pour tout $i = 1, \dots, n$:

$$e_i = (0, \dots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)$$

Les coordonnées de $u = (a_1, \dots, a_n)$ dans cette base sont $(a_1, \dots, a_n)$.

Définition

Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$:

$$\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$$

Les coordonnées de $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ dans cette base sont $(a_0, \ldots, a_n)$.

Définition

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{B}_c = (E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$$

Définition

Base canonique de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$:

$$\mathcal{B}_c = (E_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'ont pas de base canonique.

▷ Exercice 13.

$E = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}$ la famille contenant :

$$u_1 = (2, 1, 0, 0) \qquad u_2 = (0, 0, 0, 1)$$
$$u_3 = (1, 0, 1, 1) \qquad u_4 = (0, 0, 1, 0)$$

a. Démontrer que la famille $\mathcal{B}$ est libre.

b. Exprimer les quatre vecteurs de la base canonique de E en fonction des u_i.

c. En déduire que la famille $\mathcal{B}$ est génératrice de E.

d. Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$.

$$v_1 = (8, 2, 4, 4) \qquad v_2 = (-1, -2, 1, 8)$$

▷ Exercice 14.

Soit $\mathcal{B} = (3, 2 - X, 1 + 2X + X^2)$.

a. Démontrer que 1, X et X^2 sont combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{B}$.

b. En déduire que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$

c. Donner les coordonnées du polynôme $2 + 2X + 2X^2$ dans cette base.

IV. Familles de vecteurs

Définition

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Définition

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème

(i) Si un espace vectoriel est de dimension finie alors il admet une base.

(ii) Dans ce cas toutes ses bases ont le même cardinal.

Théorème

(i) Si un espace vectoriel est de dimension finie alors il admet une base.

(ii) Dans ce cas toutes ses bases ont le même cardinal.

Définition

On appelle dimension de E et on note $\dim E$ le cardinal de ses bases.

Théorème

(i) Si un espace vectoriel est de dimension finie alors il admet une base.

(ii) Dans ce cas toutes ses bases ont le même cardinal.

Définition

On appelle dimension de E et on note $\dim E$ le cardinal de ses bases.

La suite au chapitre B10 : dimension.

Exemple 11

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

$$\dim \mathbb{K}^n =$$

Exemple 11

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

Exemple 11

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

$$\dim \mathbb{K}_n[X] \ =$$

Exemple 11

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$$

Exemple 11

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$$

$$\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) =$$

Exemple 11

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont de dimensions finies.

$$\dim \mathbb{K}^n = n$$

$$\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$$

$$\dim \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) = np$$

Remarque

Nous verrons que :

$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \qquad \mathbb{K}[X]$$

ne sont pas de dimension finie.

IV. Familles de vecteurs

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une partie de E.

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Exemple

Tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est combinaison linéaire d'éléments de $\left\{X^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \qquad n \in \mathbb{N} \qquad (a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$$

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Définition

$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$: ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$.

$$u \in \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}) \iff \begin{array}{l} \exists n \in \mathbb{N} \\ \exists (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{E}^n \\ \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \\ u = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \end{array}$$

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Proposition

$\mathrm{Vect}\left(\mathcal{E}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Proposition

$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. La somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{E}$ est bien une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$. $\square$

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Remarques

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{E}$.

Pour tout sev G $\quad \mathcal{E} \subseteq G \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}) \subseteq G$

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Remarques

(i) $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant $\mathcal{E}$.

$$\mathrm{Vect}\,(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{G \text{ sev de } E \\ \mathcal{E} \subseteq G}} G$$

Définition

Une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{E}$ est une combinaison linéaire d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$.

Remarques

(ii) F sous-espace vectoriel de E.
$\mathcal{E}$ est une partie génératrice de F si $F = \mathrm{Vect}\,(\mathcal{E})$.

Notation

Soit I un ensemble infini.

(i) $\mathbb{K}^I$: ensemble des familles de scalaires indexées par I.

$$\mathbb{K}^I = \{(\lambda_i)_{i\in I} \mid \forall i \in I \quad \lambda_i \in \mathbb{K}\}$$

(ii) $\mathbb{K}^{(I)}$: ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.

Tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.

Notation

Soit I un ensemble infini.

(ii) $\mathbb{K}^{(I)}$: ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.
Tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.

Remarque

Soit $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$
Le support de λ est : $\quad J = \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$

Les familles presque nulles sont les familles à support fini.

Notation

Soit I un ensemble infini.

(ii) $\mathbb{K}^{(I)}$: ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.
Tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.

Exemples

(i) Si $I = \mathbb{N}$:
Une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque nulle ssi elle est nulle à partir d'un certain rang.

Notation

Soit I un ensemble infini.

(ii) $\mathbb{K}^{(I)}$: ensemble des familles presque nulles de scalaires indexées par I.
Tous les termes sont nuls sauf un nombre fini.

Exemples

(ii) On peut définir l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ par :

$$\mathbb{K}[X] = \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \;\middle|\; (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \right\}$$

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une partie de E

(i) $\mathcal{E}$ est libre si toute famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ est libre.

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une partie de E

(i) $\mathcal{E}$ est libre si toute famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ est libre.

(ii) $\mathcal{E}$ est liée s'il existe une famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ linéairement dépendants.

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une partie de E

(i) $\mathcal{E}$ est libre si toute famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ est libre.

(ii) $\mathcal{E}$ est liée s'il existe une famille finie d'éléments de $\mathcal{E}$ linéairement dépendants.

Exemple 12

$$f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto a^x$$

La famille $\mathcal{A} = \{ f_a \mid a \in \mathbb{R}_+^* \}$ est libre.

Remarque

Une base de E est une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ libre et génératrice de E.

Remarque

Une base de E est une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ libre et génératrice de E.
Tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille :

$$\forall u \in E \qquad \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Remarque

Une base de E est une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i \in I}$ libre et génératrice de E.
Tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille :

$$\forall u \in E \qquad \exists! (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont appelés coordonnées de u dans la base $\mathcal{E}$.

Remarque

Une base de E est une famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ libre et génératrice de E.
Tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de cette famille :

$$\forall u \in E \qquad \exists!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{(I)} \qquad u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$$

Les λ_i sont appelés coordonnées de u dans la base $\mathcal{E}$.

Exemple

La famille $\left\{ X^k \;\middle|\; k \in \mathbb{N} \right\}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Définition

$a \in E$. La translation de E de vecteur a est :

$$\begin{aligned} t_a : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u + a \end{aligned}$$

Propositions

(i) Pour tous vecteurs a et b de E :

$$t_a \circ t_b = t_b \circ t_a = t_{a+b}$$

(ii) La translation t_a est bijective de réciproque t_{-a}.

Définition

Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

où
- $a \in E$
- F est un sous-espace vectoriel de E.

Définition

Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

où
- $a \in E$
- F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques

(i) En d'autres termes :

$$A = t_a(F)$$

Définition

Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

où
- $a \in E$
- F est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques

(ii) Tout singleton $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E.

Remarques

(ii) Tout singleton $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E.

Remarques

(ii) Tout singleton $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E. L'image d'un point par une translation est un point.

Remarques

(ii) Tout singleton $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E.
L'image d'un point par une translation est un point.
On peut additionner un point et un vecteur, la somme est un point :

Remarques

(ii) Tout singleton $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E.
L'image d'un point par une translation est un point.
On peut additionner un point et un vecteur, la somme est un point :

$$A + \vec{u} = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

Remarques

(ii) Tout singleton $A = \{a\}$ avec $a \in E$ est un sous-espace affine de E, appelé point de E.
L'image d'un point par une translation est un point.
On peut additionner un point et un vecteur, la somme est un point :

$$A + \vec{u} = B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

Tout élément de E peut être considéré comme un point ou un vecteur.

Définition

Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

Exemple 13

(i) Soit $E = \mathbb{R}^2$. La droite A d'équation

$$y = 2x - 5$$

est un sous-espace affine.

Définition

Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

Exemple 13

(i) Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ sont :

- les points
- les droites
- le plan.

Définition

Un sous-espace affine de E est un sous-ensemble de la forme :

$$A = a + F = \{a + u \mid u \in F\}$$

Exemple 13

(ii) Les sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$ sont :

- les points
- les droites
- les plans
- l'espace.

Proposition

a, b points de E et F, G sevs de E.

Alors :

$$a + F = b + G \implies F = G \quad \text{et} \quad b - a \in F$$

Proposition

a, b points de E et F, G sevs de E.

Alors :

$$a + F = b + G \implies F = G \quad \text{et} \quad b - a \in F$$

Remarque

L'espace vectoriel définissant un sous-espace affine A est uniquement déterminé.
Par contre le point a peut être remplacé par n'importe quel point de A.

Proposition

a, b points de E et F, G sevs de E.

Alors :

$$a + F = b + G \implies F = G \quad \text{et} \quad b - a \in F$$

Définition

Soit $A = a + F$ un sous-espace affine de E

Alors F est la direction de A,

ou A est dirigé par F.

Proposition

a, b points de E et F, G sevs de E.

Alors :

$$a + F = b + G \implies F = G \quad \text{et} \quad b - a \in F$$

Démonstration.

Proposition

a, b points de E et F, G sevs de E.

Alors :

$$a + F = b + G \implies F = G \quad \text{et} \quad b - a \in F$$

Démonstration.

$\square$

V. Sous-espaces affines

Proposition

S système linéaire de n équations à p inconnues.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

- Si l'ensemble des solutions de S est non-vide alors c'est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$.

Proposition

S système linéaire de n équations à p inconnues.

$$S_h : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

- Si l'ensemble des solutions de S est non-vide alors c'est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$.
- Sa direction est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène S_h associé.

Exemple 14

Résolution du système linéaire :

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = 5 \\ 2x + 5y - z = 4 \end{cases}$$

Démonstration. Soit F l'ensemble des solutions du système homogène S_h.

$$S_h : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

Démonstration. Soit F l'ensemble des solutions du système homogène S_h.

$$S_h : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$:

(i) $F \subseteq \mathbb{K}^p$

(ii) $0_{\mathbb{K}^p} \in F$

Suite de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \cdots + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \cdots + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\text{et} \quad \left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}y_1 & + \cdots + & a_{1p}y_p & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & + \cdots + & a_{np}y_p & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a_{11}(x_1+y_1) & + \cdots + & a_{1p}(x_p+y_p) & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x_1+y_1) & + \cdots + & a_{np}(x_p+y_p) & = & 0 \end{array}\right.$$

(iii) Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de S_h
et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ est solution de S_h
alors $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_p + y_p)$ est solution de S_h.

Suite de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\lambda x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}\lambda x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\lambda x_1 & + & \cdots & + & a_{np}\lambda x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

(iii) Si $x = (x_1, \dots, x_p)$ est solution de S_h
alors $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$ est solution de S_h.

Suite de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\lambda x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}\lambda x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\lambda x_1 & + & \cdots & + & a_{np}\lambda x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

(iii) Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de S_h
alors $\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_p)$ est solution de S_h.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Suite de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}\lambda x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}\lambda x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}\lambda x_1 & + & \cdots & + & a_{np}\lambda x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

(iii) Si $x = (x_1, \dots, x_p)$ est solution de S_h
alors $\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_p)$ est solution de S_h.

Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Supposons que S admet au moins une solution $x = (x_1, \dots, x_p)$.

Démontrons que $\mathcal{S} = x + F$.

Suite de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

$$\text{et} \qquad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{1p}y_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & + & \cdots & + & a_{np}y_p & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}(x_1+y_1) & + & \cdots & + & a_{1p}(x_p+y_p) & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x_1+y_1) & + & \cdots & + & a_{np}(x_p+y_p) & = & b_n \end{array}\right.$$

Si x est solution de S et y est solution de S_h
alors $x+y$ est solution de S.

$$\mathcal{S} \supseteq x + F$$

Suite de la démonstration.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

et $$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}y_1 & + & \cdots & + & a_{1p}y_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}y_1 & + & \cdots & + & a_{np}y_p & = & b_n \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} a_{11}(x_1 - y_1) & + & \cdots & + & a_{1p}(x_p - y_p) & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(x_1 - y_1) & + & \cdots & + & a_{np}(x_p - y_p) & = & 0 \end{array}\right.$$

Si y est solution de S alors $y - x$ est solution de S_h.
Or $y = x + (y - x)$ donc $y \in x + F$.

$$\mathcal{S} \subseteq x + F$$

Fin de la démonstration.
L'ensemble des solutions du système S est

$$\mathcal{S} = x + F$$

avec x un élément de S et F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$, donc $\mathcal{S}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$. $\square$

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y' - a(t)y = b(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$y' - a(t)y = 0$$

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

est un sous-espace affine de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Sa direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Remarque

Dans les deux cas l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\mathcal{S} = \{y_1 + y_0 \mid y_0 \in \mathcal{S}_h\} = y_1 + \mathcal{S}_h$$

où

- y_1 est une solution particulière de l'équation
- $\mathcal{S}_h$ est l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Proposition

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y' - a(t)y = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Démonstration. Ces ensembles contiennent la fonction nulle, ils sont stables par addition et multiplication par un scalaire d'après le principe de superposition. $\square$

V. **Sous-espaces affines**

Proposition

$A = a + F$ et $B = b + G$ sous-espaces affines.
Alors l'intersection $A \cap B$ est :

- soit vide
- soit un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration.

$A \cap B$ est :

- Soit vide
- Soit non-vide.

Démonstration.

$A \cap B$ est :

- Soit vide
- Soit non-vide.

Montrons que dans ce dernier cas c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Démonstration.

$A \cap B$ est :

- Soit vide
- Soit non-vide.

Montrons que dans ce dernier cas c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Comme $A \cap B$ est non-vide alors il contient au moins un point c.

Démonstration.

$A \cap B$ est :

- Soit vide
- Soit non-vide.

Montrons que dans ce dernier cas c'est un sous-espace affine de direction $F \cap G$.

Comme $A \cap B$ est non-vide alors il contient au moins un point c.

On démontre qu'alors $A \cap B = c + (F \cap G)$.

Démonstration. $A \cap B = c + (F \cap G)$

$c \in A$ donc $A = c + F$

Démonstration. $A \cap B = c + (F \cap G)$

$c \in A$ donc $A = c + F$

$c \in B$ donc $B = c + G$.

<u>Démonstration</u>. $(c+F)\cap(c+G)=c+F\cap G$

$c \in A$ donc $A = c + F$

$c \in B$ donc $B = c + G$.

Démonstration. $(c+F)\cap(c+G) = c+F\cap G$

$c \in A$ donc $A = c+F$

$c \in B$ donc $B = c+G$.

Inclusion directe :

Si $d = c+u = c+v$ avec $u \in F$ et $v \in G$

Alors $u = v \in F\cap G$.

Donc $d \in c+F\cap G$.

Démonstration. $(c+F) \cap (c+G) = c + F \cap G$

$c \in A$ donc $A = c + F$

$c \in B$ donc $B = c + G$.

Inclusion indirecte :

$$F \cap G \subseteq F \quad \text{donc} \quad c + F \cap G \subseteq c + F.$$

$$F \cap G \subseteq G \quad \text{donc} \quad c + F \cap G \subseteq c + G.$$

Démonstration. $(c+F)\cap(c+G) = c + F\cap G$

$c \in A$ donc $A = c + F$

$c \in B$ donc $B = c + G$.

Inclusion indirecte :

$$c + F \cap G \subseteq c + F.$$

$$c + F \cap G \subseteq c + G.$$

donc $c + F \cap G \subseteq (c+F)\cap(c+G)$.

Démonstration. $(c+F)\cap(c+G) = c+F\cap G$

$c \in A$ donc $A = c+F$

$c \in B$ donc $B = c+G$.

Inclusion indirecte :

$$c+F\cap G \subseteq c+F.$$

$$c+F\cap G \subseteq c+G.$$

donc $c+F\cap G \subseteq (c+F)\cap(c+G)$.

Par double inclusion :

$$A\cap B = c+(F\cap G) \qquad \square$$

▷ Exercice 15.

Soit $E = \mathbb{R}^3$, A et B les plans d'équations :

$$2x + y - 5z = 3 \qquad \text{et} \qquad x + 2y + z = 7$$

a. Donner un point et la direction de ces plans.

b. Décrire de même $A \cap B$.

Prochain chapitre

Chapitre B9

Applications linéaires