

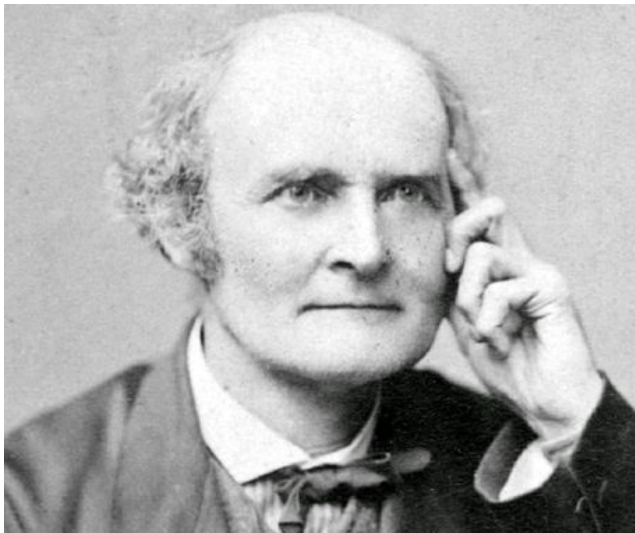
Mathématiques

Chapitre B5 Matrices

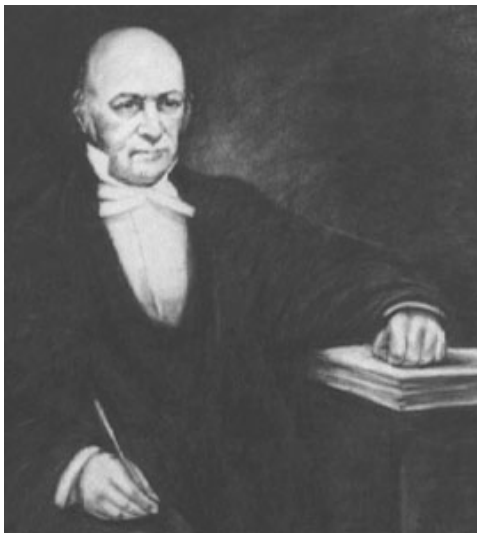
MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Arthur Cayley (Angleterre) 1821 – 1895



William Rowan Hamilton (Irlande) 1805 – 1865



Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

II. Systèmes linéaires

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

II. Systèmes linéaires

III. Matrices carrées

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

II. Systèmes linéaires

III. Matrices carrées

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

n et p entiers naturels non-nuls

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

- A. Matrices
- B. Opérations linéaires
- C. Multiplication
- D. Opérations élémentaires
- E. Transposition

II. Systèmes linéaires

III. Matrices carrées

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

I. Définitions

A. Matrices

B. Opérations linéaires

C. Multiplication

D. Opérations élémentaires

E. Transposition

Définition

Une **matrice**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Définition

Une **matrice** de **taille** (n, p)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Définition

Une **matrice** de **taille** (n, p) à **coefficients** dans $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Définition

Une **matrice** de **taille** (n, p) à **coefficients** dans $\mathbb{K}$ est un tableau de n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Définition

Une **matrice** de **taille** (n, p) à **coefficients** dans $\mathbb{K}$ est un tableau de n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} appartiennent à $\mathbb{K}$

Définition

Une **matrice** de **taille** (n, p) à **coefficients** dans $\mathbb{K}$ est un tableau de n lignes et p colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Les a_{ij} appartiennent à $\mathbb{K}$, ils sont indexés par :

i : **indice de ligne** j : **indice de colonne**

Notation

Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

Exemples

(i) Matrice nulle

$$0_{np} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Exemples

(i) Matrice nulle

$$0_{np} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Matrice-ligne

$$L = (\ell_1 \quad \cdots \quad \ell_p)$$

Matrice-colonne

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Deux matrices sont égales si et seulement si elles sont de même taille et tous leurs coefficients sont égaux.

Notation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Notation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (C_1 \quad \cdots \quad C_p)$$

où les C_j sont les colonnes.

Notation

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

où les L_i sont les lignes.

I. Définitions

A. Matrices

B. Opérations linéaires

C. Multiplication

D. Opérations élémentaires

E. Transposition

Définition : multiplication par un scalaire

$$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$$\text{alors} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

Définition : multiplication par un scalaire

$$A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\text{Si} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$$

$$\text{alors} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}$$

En d'autres termes :

$$\text{Si } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \quad \text{alors} \quad \lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

Remarque

La multiplication par un scalaire définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A\end{aligned}$$

Remarque

La multiplication par un scalaire définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{\text{np}}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{\text{np}}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A\end{aligned}$$

Exemple

$$1A =$$

Remarque

La multiplication par un scalaire définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A\end{aligned}$$

Exemple

$$1A = \textcolor{red}{A} \qquad 0A =$$

Remarque

La multiplication par un scalaire définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A\end{aligned}$$

Exemple

$$1A = A$$

$$0A = 0_{np}$$

Remarque

La multiplication par un scalaire définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathbb{K} \times \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbf{np}}(\mathbb{K}) \\ (\lambda, A) &\longmapsto \lambda A\end{aligned}$$

Exemple

$$1A = \textcolor{red}{A} \qquad 0A = \textcolor{red}{0}_{\mathbf{np}}$$

$(-1)A$ est notée $-A$

Définition : addition

$$A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

Définition : addition

$$A, B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix}$$

En d'autre termes :

$$\text{Si } A = (a_{ij}) \text{ et } B = (b_{ij}) \text{ alors } A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Remarque

L'addition des matrices définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto A + B\end{aligned}$$

Exemple

Remarque

On note $A - B$ pour la soustraction.

Remarque

On note $A - B$ pour la soustraction.

Elle est définie par : $A - B = A + (-1)B$

Remarque

On note $A - B$ pour la soustraction.

Elle est définie par : $A - B = A + (-1)B$

On remarque que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad A - A =$$

Remarque

On note $A - B$ pour la soustraction.

Elle est définie par : $A - B = A + (-1)B$

On remarque que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad A - A = 0_{np}$$

Proposition

$$A \text{ et } B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$$

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$$

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$$

Définition

$A_1, \dots, A_m$ matrices de taille (n, p)

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ scalaires

La matrice

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k A_k = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_m A_m$$

est une **combinaison linéaire** de $A_1, \dots, A_m$.

Définition

Pour tout (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Définition

Pour tout (i, j) tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on note E_{ij} la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Proposition

Toute matrice $A = (a_{ij})$ se décompose de façon unique comme combinaison linéaire des matrices E_{ij} :

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} E_{ij}$$

I. Définitions

A. Matrices

B. Opérations linéaires

C. Multiplication

D. Opérations élémentaires

E. Transposition

Définition : multiplication

Produit d'une ligne par une colonne :

$$\begin{aligned} LC &= (\ell_1 \quad \cdots \quad \ell_n) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n \ell_j c_j = \ell_1 c_1 + \cdots + \ell_n c_n \end{aligned}$$

Définition : multiplication

A de taille (m, n) B de taille (n, p)

Le produit AB est la matrice C de taille (m, p) dont les coefficients sont :

$\forall i = 1 \dots m \quad \forall k = 1 \dots p :$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Remarques

(i) La multiplication matricielle définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{K}) \\ (A, B) &\longmapsto AB\end{aligned}$$

(ii) Le coefficient (i, k) est le produit de la ligne i de A par la colonne k de B .

Exemple 1

Calculer AB et BA dans les cas suivants :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Exemple 1 (suite)

Calculer AB et BA dans les cas suivants :

$$(iii) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

Exemple 1 (suite)

Calculer AB et BA dans les cas suivants :

$$(v) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 7 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(vi) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Remarques

(i) **La multiplication matricielle n'est pas commutative :**

En général $AB \neq BA$

Remarques

(i) **La multiplication matricielle n'est pas commutative :**

$$\text{En général} \quad AB \neq BA$$

(ii) **La règle du produit nul est fausse en général :**

$$AB = 0_{mp} \not\Rightarrow (A = 0_{mn} \quad \text{ou} \quad B = 0_{np})$$

Remarques

(i) **La multiplication matricielle n'est pas commutative :**

$$\text{En général} \quad AB \neq BA$$

(ii) **La règle du produit nul est fausse en général :**

$$AB = 0_{mp} \not\Rightarrow (A = 0_{mn} \quad \text{ou} \quad B = 0_{np})$$

Par contre :

$$0_{mn}A = 0_{mp} \quad A0_{pq} = 0_{nq}$$

▷ Exercice 1.

Calculer AB et BA pour

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 10 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 20 & -2 \\ 5 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 2.

Calculer A, A^2, A^3, A^n ($n \in \mathbb{N}$) pour $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$

▷ Exercice 3.

Calculer $(AB)C$ et $A(BC)$ où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Définition

Matrice identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

Matrice identité :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{K}) \quad AI_n = A$$

$$\forall B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) \quad I_n B = B$$

Définition

Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définition

Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc :

$$I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Définition

Symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc : $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

Remarque

Démontrons que $AI_n = A$.

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. $\forall i = 1 \dots m \quad \forall k = 1 \dots p$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + b_{ij})c_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^n b_{ij}c_{jk}$$

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. $\forall i = 1 \dots m \quad \forall k = 1 \dots p$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk} + \sum_{j=1}^n a_{ij}c_{jk}$$

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. $\forall i = 1 \dots m \quad \forall k = 1 \dots p$

$$\sum_{j=1}^n (\lambda a_{ij}) b_{jk} = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$$

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. $\forall i = 1 \dots m \quad \forall k = 1 \dots p$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\lambda b_{jk}) = \lambda \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$$

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. Associativité :

Proposition

Pour toutes matrices A, B, C et tout scalaire λ , en supposant que les produits sont définis :

$$(A + B)C = AC + BC$$

$$(\lambda A)B = \lambda(AB)$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Démonstration. Associativité :



▷ Exercice 4.

Calculer $E_{ij}E_{kl}$ pour tous $(i, j, k, \ell) \in \mathbb{N}^4$.
Utiliser le symbole de Kronecker.

I. Définitions

A. Matrices

B. Opérations linéaires

C. Multiplication

D. Opérations élémentaires

E. Transposition

Définitions

Opérations élémentaires sur une matrice (n, p) :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ ajout de αL_j à L_i ($\alpha \in \mathbb{K}$)

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ multiplication de L_i par λ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$)

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ interversion de L_i et L_j .

Définitions

Opérations élémentaires sur une matrice (n, p) :

$(C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j)$ ajout de αC_j à C_i ($\alpha \in \mathbb{K}$)

$(C_i \leftarrow \lambda C_i)$ multiplication de C_i par λ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$)

$(C_i \leftrightarrow C_j)$ interversion de C_i et C_j .

Définitions

Les **matrices élémentaires** sont $(1 \leq i, j \leq n)$:

► les matrices de **transvection** :

$$T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij} \quad i \neq j \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

Définitions

Les matrices élémentaires sont $(1 \leq i, j \leq n)$:

- ▶ les matrices de transvection :

$$T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij} \quad i \neq j \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

- ▶ les matrices de dilatation :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii} \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$$

Définitions

Les **matrices élémentaires** sont $(1 \leq i, j \leq n)$:

- ▶ les matrices de **transvection** :

$$T_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ij} \quad i \neq j \quad \alpha \in \mathbb{K}$$

- ▶ les matrices de **dilatation** :

$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii} \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$$

- ▶ les matrices de **permutation** :

$$P_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$$

Exemple 2

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Calculer DM TM PM

puis MD MT MP .

Proposition

Les opérations

$$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j) \quad (L_i \leftarrow \lambda L_i) \quad (L_i \leftrightarrow L_j)$$

reviennent à la multiplier à gauche par :

$$T_{ij}(\alpha) \quad D_i(\lambda) \quad P_{ij}$$

Proposition

Les opérations

$$(C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i) \quad (C_i \leftarrow \lambda C_i) \quad (C_i \leftrightarrow C_j)$$

reviennent à la multiplier à droite par :

$$T_{ij}(\alpha) \quad D_i(\lambda) \quad P_{ij}$$

I. Définitions

A. Matrices

B. Opérations linéaires

C. Multiplication

D. Opérations élémentaires

E. Transposition

Définition

Transposée de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ avec $a'_{ji} = a_{ij}$

Définition

Transposée de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: $A^{\top} \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^t A = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ avec $a'_{ji} = a_{ij}$

Définition

Transposée de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ avec $a'_{ji} = a_{ij}$

Définition

Transposée de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ avec $a'_{ji} = a_{ij}$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA =$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

Définition

Transposée de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ avec $a'_{ji} = a_{ij}$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB =$

Définition

Transposée de $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$: ${}^tA \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ alors ${}^tA = (a'_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq n}}$ avec $a'_{ji} = a_{ij}$

Exemple

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Si $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ alors ${}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

Remarque

La transposition définit l'application :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K}) \\ A &\longmapsto {}^t A\end{aligned}$$

Proposition

(i) Pour toutes matrices A et B de même taille :

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

(ii) Pour toute matrice A et tout scalaire λ :

$${}^t(\lambda A) = \lambda({}^tA)$$

(iii) Pour toute matrice A de taille (m, n) et toute matrice B de taille (n, p) :

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

Exemple (suite)

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB =$$

$${}^tB {}^tA =$$

Exemple (suite)

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 32 \\ 6 & 24 \\ 8 & 40 \end{pmatrix} \quad {}^tB {}^tA =$$

Exemple (suite)

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Si } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{alors } {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 32 \\ 6 & 24 \\ 8 & 40 \end{pmatrix} \quad {}^tB {}^tA = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 8 \\ 32 & 24 & 40 \end{pmatrix}$$

Proposition

(i) Pour toutes matrices A et B de même taille :

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$$

Démonstration.

Pour tout $j = 1 \dots p$ et $i = 1 \dots n$ le coefficient (j, i) de ${}^t(A + B)$ est :

$$a_{ij} + b_{ij} = a'_{ji} + b'_{ji}$$

Proposition

(ii) Pour toute matrice A et tout scalaire λ :

$${}^t(\lambda A) = \lambda({}^t A)$$

Démonstration.

Pour tout $j = 1 \dots p$ et $i = 1 \dots n$ le coefficient (j, i) de ${}^t(\lambda A)$ est :

$$\lambda a_{ij} = \lambda a'_{ji}$$

Proposition

(iii) Pour toute matrice A de taille (m, n) et toute matrice B de taille (n, p) :

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

Démonstration. On note :

- ▶ a_{ij} b_{jk} c_{ik} les coefficients de A B et AB
- ▶ a'_{ji} b'_{kj} c'_{ki} ceux de tA tB ${}^t(AB)$

Proposition

(iii) Pour toute matrice A de taille (m, n) et toute matrice B de taille (n, p) :

$${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$$

Démonstration. Alors :

$$c'_{ki} = c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a'_{ji} b'_{kj} = \sum_{j=1}^n b'_{kj} a'_{ji}$$

Les coefficients de ${}^t(AB)$ sont bien ceux de ${}^tB {}^tA$,
donc ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$. □

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

II. Systèmes linéaires

- A. Écriture matricielle
- B. Algorithme du pivot de Gauss
- C. Structure de l'ensemble des solutions

III. Matrices carrées

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

II. **Systèmes linéaires**

A. Écriture matricielle

B. Algorithme du pivot de Gauss

C. Structure de l'ensemble des solutions

Notation

Système linéaire :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Notation

Système linéaire :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Matrice de S :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Notation

Système linéaire :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Matrice inconnue :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Notation

Système linéaire :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Matrice du second membre :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Notation

Système linéaire :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Notation

Système linéaire :

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Matrices :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Écriture matricielle

$$S : AX = B$$

Exemples

$$S : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 3y = 3 \\ x - 5y = -1 \end{cases}$$

$$S' : \begin{cases} x + 5y + z = 7 \\ 4x - 6y - z + t = 12 \end{cases}$$

Exemple 3

Résolution matricielle du système :

$$\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 7x + 9y = 1 \end{cases}$$

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes peuvent être appliquées sur la représentation matricielle.

Elles modifient les matrices A et B mais pas la matrice X .

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes peuvent être appliquées sur la représentation matricielle.

Elles modifient les matrices A et B mais pas la matrice X .

En effet une opération élémentaire sur les lignes est une multiplication à gauche par une matrice élémentaire E , et :

$$\begin{aligned} AX = B &\implies E(AX) = EB \\ &\implies (EA)X = (EB) \end{aligned}$$

Remarque

Les opérations élémentaires sur les lignes peuvent être appliquées sur la représentation matricielle.

Elles modifient les matrices A et B mais pas la matrice X .

En effet une opération élémentaire sur les lignes est une multiplication à gauche par une matrice élémentaire E , et :

$$\begin{aligned} AX = B &\iff E(AX) = EB \\ &\iff (EA)X = (EB) \end{aligned}$$

Ces implications sont en fait des équivalences.

II. Systèmes linéaires

A. Écriture matricielle

B. Algorithme du pivot de Gauss

C. Structure de l'ensemble des solutions

Remarque

L'algorithme du pivot de Gauss permet de :

- ▶ résoudre un système linéaire,

Remarque

L'algorithme du pivot de Gauss permet de :

- ▶ résoudre un système linéaire,
- ▶ prouver qu'une matrice est inversible, et calculer sa matrice inverse.

Remarque

L'algorithme du pivot de Gauss permet de :

- ▶ résoudre un système linéaire,
- ▶ prouver qu'une matrice est inversible, et calculer sa matrice inverse.
- ▶ calculer le rang d'une matrice,

Remarque

L'algorithme du pivot de Gauss permet de :

- ▶ résoudre un système linéaire,
- ▶ prouver qu'une matrice est inversible, et calculer sa matrice inverse.
- ▶ calculer le rang d'une matrice,
- ▶ calculer le déterminant d'une matrice carrée.

Méthode pour les systèmes linéaires

On utilise uniquement des opérations élémentaires sur les lignes.

Méthode pour les systèmes linéaires

On utilise uniquement des opérations élémentaires sur les lignes.

On agit sur les représentations matricielles plutôt que sur les systèmes.

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad EAX = EB$$

Méthode pour les systèmes linéaires

On utilise uniquement des opérations élémentaires sur les lignes.

On agit sur les représentations matricielles plutôt que sur les systèmes.

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad EAX = EB$$

L'ensemble des solutions n'est pas modifié.

Exemple 4

$$S_1 : \begin{cases} 2x + y + z - t = 4 \\ x + 2y \qquad \qquad t = 1 \\ 3x + 5y + z + t = 6 \\ 3x \qquad \qquad - 2z = 2 \end{cases}$$

Exemple 4

$$S_2 : \begin{cases} x - 2y + z + t = 2 \\ -x + y - 2z - t = -1 \\ 2x \quad \quad + 6z + 3t = 1 \\ x - 3y \quad \quad + 4t = 6 \end{cases}$$

Exemple 4

$$S_3 : \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ x + y - 3z + t = 1 \\ x - 3y + z + t = 1 \\ -3x + y + z + t = 1 \end{cases}$$

Le cas des systèmes de Cramer

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Le cas des systèmes de Cramer

$$1. \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont non-nuls.

Le cas des systèmes de Cramer

$$2. \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients diagonaux a_{ii} sont non-nuls.

Le cas des systèmes de Cramer

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas général

Quel que soit le système on peut obtenir une matrice **échelonnée**, puis **échelonnée réduite**.

Définitions

- ▶ Une matrice est **échelonnée par lignes** si chaque ligne non-nulle commence par strictement plus de zéros que la précédente.

Définitions

- ▶ Une matrice est **échelonnée par lignes** si chaque ligne non-nulle commence par strictement plus de zéros que la précédente.
- ▶ On note

$$a_{1 j_1} \quad a_{2 j_2} \quad \dots \quad a_{r j_r}$$

les premiers coefficients **non-nuls** de chaque ligne.

Ce sont les **pivots**.

$$(r \leq n \text{ et } r \leq p)$$

Définitions

- ▶ Une matrice est **échelonnée par lignes** si chaque ligne non-nulle commence par strictement plus de zéros que la précédente.

- ▶ On note

$$a_{1 j_1} \quad a_{2 j_2} \quad \dots \quad a_{r j_r}$$

les premiers coefficients **non-nuls** de chaque ligne.

Ce sont les **pivots**. $(r \leq n \text{ et } r \leq p)$

- ▶ Une matrice est **échelonnée réduite par lignes** si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls éléments non-nuls de leurs colonnes.

Définitions (suite)

Un système linéaire est **échelonné** ou **échelonné réduit** si sa matrice est échelonnée par lignes ou échelonnée réduite par ligne.

Théorème

Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné réduit.

Théorème

Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné réduit.

Démonstration. Ceci est conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss.

Théorème

Tout système linéaire est équivalent à un système linéaire échelonné réduit.

Démonstration. Ceci est conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss.

À partir de toute matrice A on peut obtenir une matrice échelonnée par ligne réduite en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, donc tout système $AX = B$ est équivalent à un système échelonné réduit. □

Définition

Les inconnues $x_{j_1} \ x_{j_2} \ \dots \ x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**.

Les autres sont appelées **inconnues secondaires** ou **paramètres**.

Définition

Les inconnues $x_{j_1} \ x_{j_2} \ \dots \ x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**.

Les autres sont appelées **inconnues secondaires** ou **paramètres**.

Remarque

Les inconnues principales sont exprimées en fonction des inconnues secondaires.

Définition

Les inconnues $x_{j_1} \ x_{j_2} \ \dots \ x_{j_r}$ sont appelées **inconnues principales**.

Les autres sont appelées **inconnues secondaires** ou **paramètres**.

Exemple 5

Résolution du système :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 5.

Résoudre les systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + 4t = 5 \\ x + 3y + 6z + 10t = 15 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} x + y - z - 2t = -2 \\ 2x + 2y + 2z + t = 6 \end{cases}$$

II. Systèmes linéaires

A. Écriture matricielle

B. Algorithme du pivot de Gauss

C. Structure de l'ensemble des solutions

Théorème

Un système linéaire admet :

- ▶ une infinité de solution
- ▶ ou une solution unique
- ▶ ou aucune solution.

Démonstration. On note $(c_1, \dots, c_n)$ les éléments du second membre d'un système échelonné réduit équivalent à S .

Les lignes L_{r+1} à L_n sont de la forme $0 = c_i$.

Démonstration. On note $(c_1, \dots, c_n)$ les éléments du second membre d'un système échelonné réduit équivalent à S .

Les lignes L_{r+1} à L_n sont de la forme $0 = c_i$.

- Si l'un des c_i est non-nul alors le système n'admet pas de solution.

Démonstration. On note $(c_1, \dots, c_n)$ les éléments du second membre d'un système échelonné réduit équivalent à S .

Les lignes L_{r+1} à L_n sont de la forme $0 = c_i$.

- ▶ Si l'un des c_i est non-nul alors le système n'admet pas de solution.

Sinon, les lignes L_1 à L_r permettent d'exprimer les inconnues principales en fonction des inconnues secondaires.

- ▶ S'il existe au moins un paramètre alors on obtient une infinité de solution.
- ▶ Sinon on obtient une unique solution.



Remarques

On note r le nombre d'inconnues principales
(appelé **rang** de la matrice).

► Nombre d'inconnues secondaires :

Remarques

On note r le nombre d'inconnues principales
(appelé **rang** de la matrice).

► Nombre d'inconnues secondaires : $p - r$

Remarques

On note r le nombre d'inconnues principales
(appelé **rang** de la matrice).

- ▶ Nombre d'inconnues secondaires : $p - r$
- ▶ Si $n = p$ le système admet une et une seule solution ssi :

Remarques

On note r le nombre d'inconnues principales
(appelé **rang** de la matrice).

- ▶ Nombre d'inconnues secondaires : $p - r$
- ▶ Si $n = p$ le système admet une et une seule solution ssi :

$$r = n = p$$

Définitions

- (i) Un système qui n'a pas de solution est dit incompatible.
- (ii) Un système qui a au moins une solution est dit compatible.

Définition

Un système linéaire est **homogène** si son second membre est nul.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Définition

Un système linéaire est **homogène** si son second membre est nul.

Le **système homogène associé** à S est le système S_0 égal à S sauf le second membre qui est annulé.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Définition

Un système linéaire est **homogène** si son second membre est nul.

Le **système homogène associé** à S est le système S_0 égal à S sauf le second membre qui est annulé.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Définition

Un système linéaire est **homogène** si son second membre est nul.

Le **système homogène associé** à S est le système S_0 égal à S sauf le second membre qui est annulé.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

$$S : AX = B$$

$$S_0 : AX = 0$$

Définition

Un système linéaire est **homogène** si son second membre est nul.

$$S_0 : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}$$

Remarque

Un système homogène admet toujours au moins une solution : le p -uplet nul $(0, \dots, 0)$.

Théorème

$\mathcal{S}$: ensemble des solutions de S

$\mathcal{S}_0$: ensemble de solutions de S_0 .

Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une **solution particulière** de S .

Alors l'ensemble des solutions de S est l'ensemble des p -uplets $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$ où y est élément de $\mathcal{S}_0$.

$$\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Exemple 4 (suite)

Réécriture des solutions du système :

$$S_2 : \begin{cases} x - 2y + z + t = 2 \\ -x + y - 2z - t = -1 \\ 2x + 6z + 3t = 1 \\ x - 3y + 4t = 6 \end{cases}$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

x solution de S : $AX = B$

y solution de S_0 : $AY = 0$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$x \text{ solution de } \mathcal{S} : AX = B$$

$$y \text{ solution de } \mathcal{S}_0 : AY = 0$$

$$\implies x + y \text{ solution de } \mathcal{S} : A(X + Y) = B$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

$$x \text{ solution de } S : AX = B$$

$$y \text{ solution de } S_0 : AY = 0$$

$$\implies x + y \text{ solution de } S : A(X + Y) = B$$

Ceci démontre :

$$\mathcal{S} \supseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

x solution de S : $AX = B$

z solution de S : $AZ = B$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $z = (z_1, \dots, z_n)$ on note :

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$x \text{ solution de } S : AX = B$$

$$z \text{ solution de } S : AZ = B$$

$$\implies z - x \text{ solution de } S_0 : A(Z - X) = 0$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

$$x \text{ solution de } S : AX = B$$

$$z \text{ solution de } S : AZ = B$$

$$\implies z - x \text{ solution de } S_0 : A(Z - X) = 0$$

Donc $z = x + (z - x)$ avec $(z - x) \in \mathcal{S}_0$.

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

$$x \text{ solution de } S : AX = B$$

$$z \text{ solution de } S : AZ = B$$

$$\implies z - x \text{ solution de } S_0 : A(Z - X) = 0$$

Donc $z = x + (z - x)$ avec $(z - x) \in \mathcal{S}_0$.

Ceci démontre :

$$\mathcal{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Démonstration. $\mathcal{S} = \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

$$x \text{ solution de } S : AX = B$$

$$z \text{ solution de } S : AZ = B$$

$$\implies z - x \text{ solution de } S_0 : A(Z - X) = 0$$

Donc $z = x + (z - x)$ avec $(z - x) \in \mathcal{S}_0$.

Ceci démontre :

$$\mathcal{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Par double inclusion l'égalité est démontrée.



Autre démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Soit $y = (y_1, \dots, y_p)$ une solution de S_0 . Alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1p}y_p = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{np}y_p = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \supseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Autre démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Soit $y = (y_1, \dots, y_p)$ une solution de S_0 . Alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1p}y_p = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{np}y_p = 0 \end{cases}$$

Par sommes :

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1p}(x_p + y_p) = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{np}(x_p + y_p) = b_n \end{cases}$$

Donc $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$ est solution de S .

$$\mathcal{S} \supseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Autre démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Soit $y = (y_1, \dots, y_p)$ une solution de S_0 . Alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \dots + a_{1p}y_p = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}y_1 + \dots + a_{np}y_p = 0 \end{cases}$$

Par sommes :

$$\begin{cases} a_{11}(x_1 + y_1) + \dots + a_{1p}(x_p + y_p) = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(x_1 + y_1) + \dots + a_{np}(x_p + y_p) = b_n \end{cases}$$

Donc $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p)$ est solution de S .

On a démontré : $\mathcal{S} \supseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$

Autre démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Soit $z = (z_1, \dots, z_p)$ une autre solution de S . Alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \cdots + a_{1p}z_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}z_1 + \cdots + a_{np}z_p = b_n \end{cases}$$

$$\mathcal{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Autre démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Soit $z = (z_1, \dots, z_p)$ une autre solution de S . Alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \cdots + a_{1p}z_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}z_1 + \cdots + a_{np}z_p = b_n \end{cases}$$

Par soustraction :

$$\begin{cases} a_{11}(z_1 - x_1) + \cdots + a_{1p}(z_p - x_p) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(z_1 - x_1) + \cdots + a_{np}(z_p - x_p) = 0 \end{cases}$$

Donc $z = x + (z - x)$ avec $z - x$ solution de S_0 .

$$\mathcal{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

Autre démonstration. Soit $x = (x_1, \dots, x_p)$ une solution de S .

Soit $z = (z_1, \dots, z_p)$ une autre solution de S . Alors :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}z_1 + \cdots + a_{1p}z_p = b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}z_1 + \cdots + a_{np}z_p = b_n \end{cases}$$

Par soustraction :

$$\begin{cases} a_{11}(z_1 - x_1) + \cdots + a_{1p}(z_p - x_p) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(z_1 - x_1) + \cdots + a_{np}(z_p - x_p) = 0 \end{cases}$$

Donc $z = x + (z - x)$ avec $z - x$ solution de S_0 .

On a démontré : $\mathcal{S} \subseteq \{x + y \mid y \in \mathcal{S}_0\}$



Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

II. Systèmes linéaires

III. Matrices carrées

- A. Matrices triangulaires et diagonales
- B. Matrices symétriques et antisymétriques
- C. Puissances
- D. Matrices inversibles

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

Définitions

Une matrice de taille (n, n) est dite **carrée**.

Définitions

Une matrice de taille (n, n) est dite **carrée**.

Ensemble de matrices carrées de taille (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Définitions

Une matrice de taille (n, n) est dite **carrée**.

Ensemble de matrices carrées de taille (n, n) à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Les coefficients

$$a_{11}, \dots, a_{nn}$$

sont appelés coefficients **diagonaux**.

III. Matrices carrées

- A. Matrices triangulaires et diagonales
- B. Matrices symétriques et antisymétriques
- C. Puissances
- D. Matrices inversibles

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

La somme de deux matrices diagonales est diagonale.

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

Le produit de deux matrices diagonales est diagonal.

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

La somme de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

La somme de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

Définitions

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite :

- ▶ diagonale si : $\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire supérieure si : $\forall i > j \quad a_{ij} = 0$
- ▶ triangulaire inférieure si : $\forall i < j \quad a_{ij} = 0$

Proposition

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieur.

Proposition

La somme de deux matrices diagonales est diagonale.

La somme de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

La somme de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieure.

Démonstration pour la somme. On note :

$$A = (a_{ij}) \quad B = (b_{ij}) \quad C = A + B = (c_{ij})$$

Alors $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Ce coefficient est nul si a_{ij} et b_{ij} sont nuls, ce qui prouve la propriété. $\square$

Proposition

Le produit de deux matrices diagonales est diagonal.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieur.

Démonstration pour le produit.

Proposition

Le produit de deux matrices diagonales est diagonal.

Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieur.

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est triangulaire inférieur.

Démonstration pour le produit.



Remarque

On démontre de même que pour toute matrice A et tout scalaire λ :

$$\begin{array}{l} A \text{ diagonale} \\ \implies \lambda A \text{ diagonale} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \text{ triangulaire supérieure} \\ \implies \lambda A \text{ triangulaire supérieure} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \text{ triangulaire inférieure} \\ \implies \lambda A \text{ triangulaire inférieure} \end{array}$$

Définition

Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on note :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Définition

Pour tous scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ on note :

$$\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Proposition

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $\mu_1, \dots, \mu_n$ des scalaires. Alors :

$$\begin{aligned} \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \\ = \text{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_n) \end{aligned}$$

III. Matrices carrées

- A. Matrices triangulaires et diagonales
- B. Matrices symétriques et antisymétriques
- C. Puissances
- D. Matrices inversibles

Définitions

Une matrice carrée A est dite :

► **symétrique** si ${}^tA = A$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$$

► **antisymétrique** si ${}^tA = -A$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

En particulier si A est antisymétrique alors sa diagonale est nulle.

Définitions

Une matrice carrée A est dite :

► **symétrique** si ${}^tA = A$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad a_{ij} = a_{ji}$$

► **antisymétrique** si ${}^tA = -A$

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2 \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

En particulier si A est antisymétrique alors sa diagonale est nulle.

Exemple.

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. Soit M une matrice carrée.

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. On pose :

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

Ces matrices sont bien définies car M est carrée.

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. On pose :

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

Leurs transposées sont :

$${}^tS = \frac{1}{2}({}^tM + M) = S \quad {}^tA = \frac{1}{2}({}^tM - M) = -A$$

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. On pose :

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

Ainsi S est symétrique, A est antisymétrique.

Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. On pose :

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

De plus $M = S + A$, ce qui montre bien que M s'exprime comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

Démonstration. Démontrons l'unicité. Si

$$M = S + A$$

avec S symétrique et A antisymétrique, alors :

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$$

Démonstration. Démontrons l'unicité. Si

$$M = S + A$$

avec S symétrique et A antisymétrique, alors :

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$$

Donc :

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

Démonstration. Démontrons l'unicité. Si

$$M = S + A$$

avec S symétrique et A antisymétrique, alors :

$${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$$

Donc :

$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \quad \text{et} \quad A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$$

S et A sont uniquement déterminées.



Proposition

Toute matrice carrée s'exprime de façon unique comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

▷ Exercice 6.

Exprimer les matrices suivantes comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III. Matrices carrées

- A. Matrices triangulaires et diagonales
- B. Matrices symétriques et antisymétriques
- C. Puissances
- D. Matrices inversibles

Exemple 6

Calculer les puissances des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition

Cas d'une matrice diagonale :

$$\text{Si } D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{alors : } \forall k \in \mathbb{N}^* \quad D^k = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & (\lambda_n)^k \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 7.

Soit : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

- a. Calculer A^2 et A^3 .
- b. Démontrer qu'il existe deux matrices B et C telles que $I_2 = B + C$ et $A = 2B + 3C$.
- c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = 2^n B + 3^n C$$

Exemple 7

Soit : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(i) Calculer : A^2 B^2 AB BA

(ii) Calculer : $(A + B)^2$ et $A^2 + 2AB + B^2$

Proposition - Formule du binôme

Soit A et B deux matrices **telles que** $AB = BA$.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Proposition - Formule du binôme

Soit A et B deux matrices **telles que** $AB = BA$.

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$$

Démonstration. Identique à celle pour les réels ou complexes. □

Exemple 8

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{en utilisant : } B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 8.

Calculer les puissances n -èmes de :

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(ii) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

III. Matrices carrées

- A. Matrices triangulaires et diagonales
- B. Matrices symétriques et antisymétriques
- C. Puissances
- D. Matrices inversibles

Définition

Une matrice A est dite **inversible** si elle est carrée et :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA = I_n$$

Définition

Une matrice A est dite **inversible** si elle est carrée et :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA = I_n$$

Notation

L'ensemble des matrices inversibles de taille (n, n) est noté :

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$$

et appelé **groupe linéaire**.

Définition

Une matrice A est dite **inversible** si elle est carrée et :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA = I_n$$

Remarque

Si A est inversible, et si B et B' vérifient

$$AB = BA = I_n \quad \text{et} \quad AB' = B'A = I_n$$

alors $BAB' = B = B'$.

Ainsi, si A est inversible alors il existe une **unique** matrice B telle que $AB = BA = I_n$.

Définition

Une matrice A est dite **inversible** si elle est carrée et :

$$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = BA = I_n$$

Définition

Si A est inversible alors **la** matrice B telle que

$$AB = BA = I_n$$

est appelée **matrice inverse** de A , et notée A^{-1} .

Exemple 9

(i) Si $n = 1$, alors $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right) = (a^{-1})$.

Exemple 9

- (i) Si $n = 1$, alors $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right) = (a^{-1})$.
- (ii) La matrice nulle n'est pas inversible, car pour toute matrice B : $0_n B = 0_n \neq I_n$

Exemple 9

- (i) Si $n = 1$, alors $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right) = (a^{-1})$.
- (ii) La matrice nulle n'est pas inversible, car pour toute matrice B : $0_n B = 0_n \neq I_n$
- (iii) La matrice identité est inversible, d'inverse elle-même.

Exemple 9

- (i) Si $n = 1$, alors $A = (a)$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, et $(a)^{-1} = \left(\frac{1}{a}\right) = (a^{-1})$.
- (ii) La matrice nulle n'est pas inversible, car pour toute matrice $B : 0_n B = 0_n \neq I_n$
- (iii) La matrice identité est inversible, d'inverse elle-même.
- (iv) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas inversibles.

Exemple 9

(v) La matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse :

$$\begin{pmatrix} -2 & \frac{5}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exemple 9

(vi) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ \frac{4}{7} & -\frac{12}{7} & \frac{5}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{13}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -7 & 21 & -7 \\ 4 & -12 & 5 \\ -2 & 13 & -6 \end{pmatrix}$$

Propositions

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si A et B sont inversibles alors AB est inversible, d'inverse :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(ii) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible, d'inverse A .

(iii) Si A est inversible alors tA est inversible, et :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Propositions

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si A et B sont inversibles alors AB est inversible, d'inverse :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(ii) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible, d'inverse A .

(iii) Si A est inversible alors tA est inversible, et :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Démonstration.

Propositions

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Si A et B sont inversibles alors AB est inversible, d'inverse :

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

(ii) Si A est inversible alors A^{-1} est inversible, d'inverse A .

(iii) Si A est inversible alors tA est inversible, et :

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Démonstration.



Exemple 8 (suite)

On vérifie que les formules obtenues sont valables aussi pour $n = -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3 & 5n \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Exemple 8 (suite)

On vérifie que les formules obtenues sont valables aussi pour $n = -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 8 (suite)

On vérifie que les formules obtenues sont valables aussi pour $n = -1$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^n + 1 & 1 - 3^n \\ 1 - 3^n & 3^n + 1 \end{pmatrix}$$

On vérifie de même les formules obtenues dans les exercices 7 et 8 pour $n = -1$.

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} =$$

$$D_i(\lambda)^{-1} =$$

$$P_{ij}^{-1} =$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} =$$

$$P_{ij}^{-1} =$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} =$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Démonstration. On vérifie les produits.



Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Remarque

Effectivement l'inverse de l'opération

$$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j) \quad \text{est} \quad (L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j).$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Remarque

Effectivement l'inverse de l'opération

$$(L_i \leftarrow \lambda L_i) \quad \text{est} \quad (L_i \leftarrow \lambda^{-1} L_i).$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Remarque

Effectivement l'inverse de l'opération

$$(L_i \leftrightarrow L_j) \qquad \text{est} \qquad (L_i \leftrightarrow L_j).$$

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Corollaire (i)

Un produit de matrices élémentaires est inversible.

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Corollaire (ii)

Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Proposition

Les matrices élémentaires sont inversibles, d'inverses :

$$T_{ij}(\alpha)^{-1} = T_{ij}(-\alpha)$$

$$D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$$

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}$$

Corollaire (iii)

Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire donnent un système équivalent.

Démonstration.

(i) Un produit de matrices élémentaires est inversible.

Si $E_1 \quad E_2 \quad \dots \quad E_n$

sont inversibles alors par produit :

$$A = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$$

est inversible.

Démonstration.

(ii) Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ matrice quelconque
 $E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice élémentaire.

Démonstration.

(ii) Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ matrice quelconque

$E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice élémentaire.

Alors :

$$A \text{ inversible} \implies EA \text{ inversible}$$

$$\implies E^{-1}EA \text{ inversible}$$

Démonstration.

(ii) Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ matrice quelconque

$E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice élémentaire.

Alors :

$$\begin{aligned} A \text{ inversible} &\implies EA \text{ inversible} \\ &\implies E^{-1}EA \text{ inversible} \end{aligned}$$

Donc :

$$A \text{ inversible} \iff EA \text{ inversible}$$

Démonstration.

(ii) Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ matrice quelconque

$E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice élémentaire.

$$A \text{ inversible} \iff EA \text{ inversible}$$

Démonstration.

(ii) Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ matrice quelconque

$E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrice élémentaire.

$$A \text{ inversible} \iff EA \text{ inversible}$$

Par contraposées :

$$A \text{ non inversible} \iff EA \text{ non inversible.}$$

Démonstration.

(ii) Les opérations élémentaires ne changent pas le caractère inversible d'une matrice.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ matrice quelconque

$E \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ matrice élémentaire.

$$A \text{ inversible} \iff AE \text{ inversible}$$

Par contraposées :

$$A \text{ non inversible} \iff AE \text{ non inversible.}$$



Démonstration.

(iii) Les opérations élémentaires sur les lignes d'un système linéaire donnent un système équivalent.

Soit $S : AX = B$

soit E une matrice élémentaire. Alors E est inversible donc :

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad EAX = EB$$

L'opération élémentaire de matrice E donne un système linéaire équivalent au système S . □

Chapitre B5. Matrices

I. Définitions

II. Systèmes linéaires

III. Matrices carrées

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

B. Théorie

C. Pratique

D. Cas $n = 2$

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

B. Théorie

C. Pratique

D. Cas $n = 2$

Gabriel Cramer (Suisse) 1704 – 1752



Définition

Un système linéaire est dit **de Cramer** si sa matrice est inversible.

Définition

Un système linéaire est dit **de Cramer** si sa matrice est inversible.

Théorème

Un système de Cramer admet une unique solution.

Définition

Un système linéaire est dit **de Cramer** si sa matrice est inversible.

Théorème

Un système de Cramer admet une unique solution.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système de Cramer. Alors A est inversible.

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Définition

Un système linéaire est dit **de Cramer** si sa matrice est inversible.

Théorème

Un système de Cramer admet une unique solution.

Démonstration. Soit $AX = B$ l'écriture matricielle d'un système de Cramer. Alors A est inversible.

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Le système admet donc une unique solution, les coefficients de la matrice colonne $A^{-1}B$. □

Définition

Un système linéaire est dit **de Cramer** si sa matrice est inversible.

$$AX = B \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Remarque

La résolution d'un système de Cramer $AX = B$ revient au calcul de A^{-1} .

Remarque

Un système linéaire de n équations
à p inconnues
de rang r
est de Cramer si et seulement si :

$$n = p = r$$

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

B. Théorie

C. Pratique

D. Cas $n = 2$

Définition

A est équivalente par lignes à A' :

$$A \underset{L}{\sim} A'$$

si on peut obtenir A' à partir de A en effectuant un nombre fini d'opérations élémentaires sur ses lignes.

Remarques

(i) Ceci signifie qu'il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_m$ telles que :

$$A' = E_m \times \cdots \times E_1 \times A$$

Remarques

(i) Ceci signifie qu'il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_m$ telles que :

$$A' = E_m \times \dots \times E_1 \times A$$

Ou aussi qu'il existe une matrice E produit de matrices élémentaires telle que :

$$A' = EA$$

Remarques

(ii) Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Pour toutes matrices A, A', A'' :

$$\blacktriangleright A \underset{L}{\sim} A$$

$$\blacktriangleright A \underset{L}{\sim} A' \implies A' \underset{L}{\sim} A$$

$$\blacktriangleright A \underset{L}{\sim} A' \text{ et } A' \underset{L}{\sim} A'' \implies A \underset{L}{\sim} A''$$

Remarques

(i) Ceci signifie qu'il existe des matrices élémentaires $E_1, \dots, E_m$ telles que :

$$A' = E_m \times \dots \times E_1 \times A$$

Ou aussi qu'il existe une matrice E produit de matrices élémentaires telle que :

$$A' = EA$$

(iii) Si A et A' sont équivalentes par lignes alors elles ont même taille.

Théorème

Toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par lignes.

Théorème

Toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par lignes.

Remarque

Il s'agit d'une autre écriture du théorème similaire sur les systèmes linéaires, conséquence de l'algorithme du pivot de Gauss.

Théorème

Toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par lignes.

Théorème (Autre formulation)

Pour toute matrice A il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une matrice R échelonnée réduite par lignes telles que $A = ER$.

Théorème

Toute matrice est équivalente par ligne à une matrice échelonnée réduite par lignes.

Théorème (Autre formulation)

Pour toute matrice A il existe une matrice E produit de matrices élémentaires et une matrice R échelonnée réduite par lignes telles que $A = ER$.

Remarque

La matrice R est de même taille de A , la matrice E est carrée et inversible.

Théorème

Soit A une matrice carrée de taille (n, n) . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible

(ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$AX = B$ admet une unique solution.

(iii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$AX = B$ admet au moins une solution.

(iv) $A \underset{L}{\sim} I_n$

Théorème

(i) A est inversible

(ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$AX = B$ admet une unique solution.

Démonstration. (i) $\implies$ (ii) :

Si A est inversible alors le système $AX = B$ est de Cramer.

$$AX = B \iff X = A^{-1}B$$

Il admet une unique solution : $X = A^{-1}B$.

Théorème

(ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$AX = B$ admet une unique solution.

(iii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$

$AX = B$ admet au moins une solution.

Démonstration. (ii) $\implies$ (iii) est évident.

Théorème

$$(iii) \quad \forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$$

$AX = B$ admet au moins une solution.

$$(iv) \quad A \underset{L}{\sim} I_n$$

Démonstration. $(iii) \implies (iv) : A = ER$

Si $R \neq I_n$ alors sa dernière ligne est nulle.

On construit B' telle que $RX = B'$ n'a pas de solution.

Alors $AX = B$ avec $B = EB'$ n'a pas de solution.

Donc $R = I_n$ puis $A \underset{L}{\sim} I_n$.

Théorème

(i) A est inversible

(iv) $A \underset{L}{\sim} I_n$

Démonstration. (iv) $\implies$ (i) :

$$A \underset{L}{\sim} I_n \implies A = EI_n$$

$A = E$ et comme E est inversible alors A est inversible.

Théorème

- (i) A est inversible
- (ii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
 $AX = B$ admet une unique solution.
- (iii) $\forall B \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{K})$
 $AX = B$ admet au moins une solution.
- (iv) $A \underset{L}{\sim} I_n$

Démonstration. Finalement on a bien démontré que les propositions (i) à (iv) sont équivalentes. $\square$

Corollaire

Soit S un système de n équations à p inconnues.

Soit r son nombre de pivots.

Alors S est de Cramer si et seulement si $n = p = r$.

Corollaire

Soit S un système de n équations à p inconnues.

Soit r son nombre de pivots.

Alors S est de Cramer si et seulement si $n = p = r$.

Démonstration. Soit $S : AX = B$.

Si ce système est de Cramer alors sa matrice est inversible donc elle est carrée, *i.e.*, $n = p$.

Corollaire

Soit S un système de n équations à p inconnues.

Soit r son nombre de pivots.

Alors S est de Cramer si et seulement si $n = p = r$.

Démonstration. Soit $S : AX = B$.

Si ce système est de Cramer alors sa matrice est inversible donc elle est carrée, *i.e.*, $n = p$.

Nombre d'inconnues secondaires : $p - r$.

Si S est de Cramer alors $r = p$.

Corollaire

Soit S un système de n équations à p inconnues.

Soit r son nombre de pivots.

Alors S est de Cramer si et seulement si $n = p = r$.

Démonstration. Soit $S : AX = B$.

Réciproquement, si $n = p = r$ alors S admet une et une seule solution, donc A est inversible d'après le théorème ci-dessus. $\square$

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

$$\text{Si } \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad DA = I_n$$

Alors A est inversible et $D = A^{-1}$, donc $AD = I_n$.

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

Remarque

(i) Si A est **carrée** alors il suffit de vérifier

$$AB = I_n \quad \text{et non} \quad BA = I_n$$

(ou l'inverse) pour pouvoir affirmer que A est inversible et que son inverse est B .

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

Remarque

(ii) Attention : ceci n'est valable que pour une matrice carrée.

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

Exemple 10

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

$$\text{Si } \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad DA = I_n$$

Alors A est inversible et $D = A^{-1}$, donc $AD = I_n$.

Démonstration.

Théorème

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

$$\text{Si } \exists C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AC = I_n$$

Alors A est inversible et $C = A^{-1}$, donc $CA = I_n$.

$$\text{Si } \exists D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad DA = I_n$$

Alors A est inversible et $D = A^{-1}$, donc $AD = I_n$.

Démonstration.



IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

B. Théorie

C. Pratique

D. Cas $n = 2$

Méthode : Inversion d'une matrice

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad A = ER$$

Pivot de Gauss

$$AA' = I_n \quad \Longleftrightarrow \quad \dots \quad \Longleftrightarrow \quad RA' = E^{-1}$$

- ▶ Si A n'est pas inversible alors on obtient une contradiction.
- ▶ Si A est inversible on obtient $A' = A^{-1}$.

Exemple 11

Inverser :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ -2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Méthode 2

Pour inverser A on peut résoudre le système $AX = Y$ où X et Y sont deux matrices inconnues.

Effet, si A est inversible alors :

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}Y$$

Méthode 2

Pour inverser A on peut résoudre le système $AX = Y$ où X et Y sont deux matrices inconnues.

Effet, si A est inversible alors :

$$AX = Y \quad \Longleftrightarrow \quad X = A^{-1}Y$$

Exemple 12

Inverser les matrices :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemme

Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n) .
Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes :

$$AX = Y \quad \implies \quad X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Lemme

Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n) .
Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes :

$$AX = Y \quad \implies \quad X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Démonstration. On note E_i la matrice colonne E_{i1} ,
et C_i la colonne i de A .

Alors $AE_i = C_i$.

Lemme

Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n) .
Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes :

$$AX = Y \quad \implies \quad X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Démonstration. On note E_i la matrice colonne E_{i1} ,
et C_i la colonne i de A .

Alors $AE_i = C_i$. Donc $E_i = BC_i$.

Lemme

Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n) .
Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes :

$$AX = Y \quad \implies \quad X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Démonstration. On note E_i la matrice colonne E_{i1} ,
et C_i la colonne i de A .

Alors $AE_i = C_i$. Donc $E_i = BC_i$.

- ▶ BC_i est la colonne i de BA .
- ▶ E_i est la colonne i de I_n .

Lemme

Soit A et B deux matrices carrées de tailles (n, n) .
Si pour toutes matrices colonnes X et Y à n lignes :

$$AX = Y \quad \implies \quad X = BY$$

alors A est inversible et B est son inverse.

Démonstration.

- ▶ BC_i est la colonne i de BA .
- ▶ E_i est la colonne i de I_n .

Donc $BA = I_n$, puis comme A est carrée alors A est inversible et B est son inverse. □

▷ Exercice 9.

En utilisant un système linéaire inverser la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

▷ Exercice 10.

Inverser :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

IV. Inversion des matrices et systèmes de Cramer

A. Systèmes de Cramer

B. Théorie

C. Pratique

D. Cas $n = 2$

Proposition

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \text{ inversible} \iff ad - bc \neq 0$$

Proposition

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Proposition

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \text{ inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad ad - bc \neq 0$$

Corollaire

Le système linéaire

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

est de Cramer si et seulement si : $ad - bc \neq 0$.

Proposition

$$A \text{ inversible} \iff ad - bc \neq 0$$

Définition

Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A ou du système S .

Notation

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Proposition

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \text{ inversible} \iff ad - bc \neq 0$$

Démonstration.

Si $a \neq 0$:

Proposition

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \text{ inversible} \iff ad - bc \neq 0$$

Démonstration.

Si $a \neq 0$:

Si $a = 0$:

Proposition

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \text{ inversible} \iff ad - bc \neq 0$$

Démonstration.

Si $a \neq 0$:

Si $a = 0$:



Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$)

Soit $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ un système de Cramer.

Ses solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$)

Soit $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ un système de Cramer.

Ses solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Démonstration.

Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$)

Soit $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ un système de Cramer.

Ses solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Démonstration.



Proposition (Formules de Cramer pour $n = 2$)

Soit $S : \begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$ un système de Cramer.

Ses solutions sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Exemple 13

$$\begin{cases} 3x + 4y = 3 \\ 5x + 6y = 7 \end{cases}$$

▷ **Exercice 11.**

Résoudre les systèmes :

$$S_4 : \begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ x - 4y = -11 \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} 7x - 2y = -4 \\ 5x + 8y = 5 \end{cases}$$

$$S_6 : \begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 3x + (\lambda + 1)y = 3\lambda \end{cases}$$

Prochain chapitre

Chapitre A7
Suites