Mathématiques

Chapitre B3
Logique

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

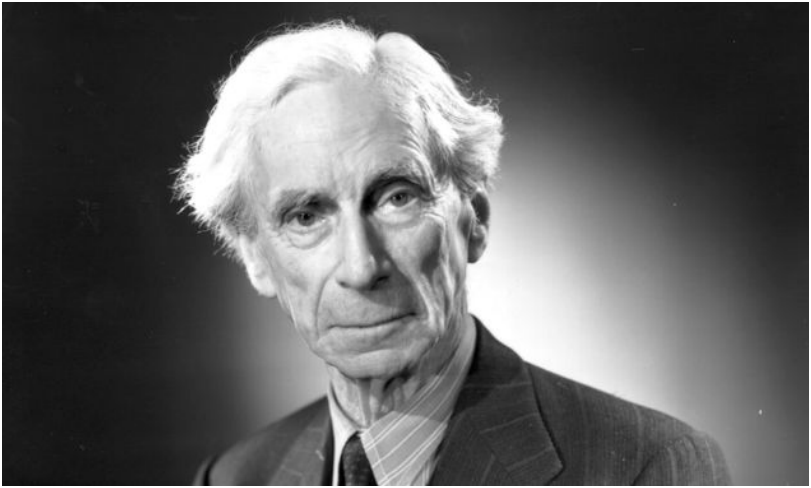
Année 2024-2025

I. Logique

George Boole (Royaume-Uni) 1815 – 1864

Augustus de Morgan (Royaume-Uni)
1806 – 1871

Bertrand Russell (Royaume-Uni) 1872 – 1970



Définition

Une proposition ou assertion est un énoncé qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).

Définition

Une proposition ou assertion est un énoncé qui peut prendre deux valeurs : vrai (V) ou faux (F).

Exemple 1

- P : 2 est un entier.
- Q : $2{,}5$ est un entier.
- R : Le triangle ABC est rectangle en A.
- S : Un élève de la classe s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Définition (Négation)

Soit P une proposition. La négation de P est la proposition qui est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.
Elle se note $\neg P$ et on la lit «non P».

Exemple 1 (suite)

- P : 2 est un entier.
- Q : $2{,}5$ est un entier.
- R : Le triangle ABC est rectangle en A.
- S : Un élève de la classe s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Exemple 1 (suite)

- $\neg P$: 2 n'est pas un entier.
- Q : $2{,}5$ est un entier.
- R : Le triangle ABC est rectangle en A.
- S : Un élève de la classe s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Exemple 1 (suite)

- $\neg P$: 2 n'est pas un entier.
- $\neg Q$: $2{,}5$ n'est pas un entier.
- R : Le triangle ABC est rectangle en A.
- S : Un élève de la classe s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Exemple 1 (suite)

- $\neg P$: 2 n'est pas un entier.
- $\neg Q$: $2{,}5$ n'est pas un entier.
- $\neg R$: Le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
- S : Un élève de la classe s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Exemple 1 (suite)

- $\neg P$: 2 n'est pas un entier.
- $\neg Q$: $2{,}5$ n'est pas un entier.
- $\neg R$: Le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
- $\neg S$: Aucun élève de la classe ne s'appelle Édouard.
- T : J'ai travaillé tous les jours de la semaine.

Exemple 1 (suite)

- $\neg P$: 2 n'est pas un entier.
- $\neg Q$: $2{,}5$ n'est pas un entier.
- $\neg R$: Le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
- $\neg S$: Aucun élève de la classe ne s'appelle Édouard.
- $\neg T$: Je n'ai pas travaillé au moins un jour de la semaine.

Proposition

Pour toute proposition P : $\neg(\neg P) = P$

Définitions (Conjonction et Disjonction)

Soit P et Q deux propositions.
On note (P et Q) ou $(P \wedge Q)$ la proposition qui est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.
On note (P ou Q) ou $(P \vee Q)$ la proposition qui est vraie si P ou Q est vraie, et fausse sinon.

Définitions (Conjonction et Disjonction)

Soit P et Q deux propositions.
On note (P et Q) ou $(P \wedge Q)$ la proposition qui est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies, et fausse sinon.
On note (P ou Q) ou $(P \vee Q)$ la proposition qui est vraie si P ou Q est vraie, et fausse sinon.

Remarque

Le *ou* est inclusif : (P ou Q) est vraie si et seulement si l'une des deux propositions P et Q est vraie, donc en particulier si les deux sont vraies.

Exemple 2

$(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 5)$ est la proposition

$(x > 0$ ou $x < 0)$ est la proposition

Exemple 2

$(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 5)$ est la proposition $2 \leqslant x \leqslant 5$

$(x > 0$ ou $x < 0)$ est la proposition

Exemple 2

$(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 5)$ est la proposition $2 \leqslant x \leqslant 5$

$(x > 0$ ou $x < 0)$ est la proposition $x \in \mathbb{R}^*$

Définition

Tables de vérité :

P	$\neg P$
V	
F	

Définition

Tables de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

Définition

Tables de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	P et Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition

Tables de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Définition

Tables de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ou Q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition

Tables de vérité :

P	$\neg P$
V	F
F	V

P	Q	P et Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

P	Q	P ou Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque (Commutativités)

Pour toutes propositions P et Q :

$$\begin{aligned}(P \text{ et } Q) &= (Q \text{ et } P)\\ (P \text{ ou } Q) &= (Q \text{ ou } P)\end{aligned}$$

Proposition (Lois de De Morgan)

Pour toutes propositions P et Q :

$$\begin{aligned} \neg(P \text{ et } Q) &= \neg P \text{ ou } \neg Q \\ \neg(P \text{ ou } Q) &= \neg P \text{ et } \neg Q \end{aligned}$$

Exemple 2 (suite)

La négation de $(x \geqslant 2 \text{ et } x \leqslant 5)$

est

Exemple 2 (suite)

La négation de $(x \geqslant 2 \text{ et } x \leqslant 5)$

est $(x < 2 \text{ ou } x > 5)$

Exemple 2 (suite)

La négation de $(x \geqslant 2$ et $x \leqslant 5)$
est $(x < 2$ ou $x > 5)$

La négation de $(x > 0$ ou $x < 0)$
est

Exemple 2 (suite)

La négation de $(x \geqslant 2 \text{ et } x \leqslant 5)$
est $(x < 2 \text{ ou } x > 5)$

La négation de $(x > 0 \text{ ou } x < 0)$
est $(x \leqslant 0 \text{ et } x \geqslant 0)$
donc $x = 0$

Exemple

La négation de «j'ai des pommes et des poires» est «je n'ai pas de pomme ou pas de poire».

La négation de «j'ai des pommes ou des poires» est «je n'ai ni pommes ni poires».

Démonstration de la première loi de De Morgan.

$$\neg(P \text{ et } Q) \quad = \quad (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

P	Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

Démonstration de la première loi de De Morgan.

$$\neg(P \text{ et } Q) \quad = \quad (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

P	Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$
V	V	V				
V	F	F				
F	V	F				
F	F	F				

Démonstration de la première loi de De Morgan.

$$\neg(P \text{ et } Q) \quad = \quad (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

P	Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$
V	V	V	F			
V	F	F	V			
F	V	F	V			
F	F	F	V			

Démonstration de la première loi de De Morgan.

$$\neg(P \text{ et } Q) \quad = \quad (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

P	Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$
V	V	V	F	F	F	
V	F	F	V	F	V	
F	V	F	V	V	F	
F	F	F	V	V	V	

Démonstration de la première loi de De Morgan.

$$\neg(P \text{ et } Q) \quad = \quad (\neg P \text{ ou } \neg Q)$$

P	Q	P et Q	$\neg(P$ et $Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P$ ou $\neg Q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

$\square$

Définition (Implication)

On note $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(\neg P$ ou $Q)$.

Définition (Implication)

On note $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(\neg P$ ou $Q)$.

Remarques

(i) On lit «P implique Q» ou «si P alors Q».

(ii) On dit que P est une condition suffisante pour avoir Q, et que Q est une condition nécessaire pour avoir P.

Définition (Implication)

On note $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(\neg P$ ou $Q)$.

Remarques

(iii) Cette proposition est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Définition (Implication)

On note $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(\neg P$ ou $Q)$.

Remarques

(iii) Cette proposition est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	
V	F	F	
F	V	V	
F	F	V	

Définition (Implication)

On note $(P \Rightarrow Q)$ la proposition $(\neg P$ ou $Q)$.

Remarques

(iii) Cette proposition est fausse si et seulement si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Exemple

- $(2 = 2) \Rightarrow (2 * 0 = 2 * 0)$
- $(2 * 0 = -2 * 0) \Rightarrow (2 = -2)$
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 0 = -2 * 0)$
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 1 = -2 * 1)$

Exemple

- $(2 = 2) \Rightarrow (2 * 0 = 2 * 0)$ est vraie
- $(2 * 0 = -2 * 0) \Rightarrow (2 = -2)$
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 0 = -2 * 0)$
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 1 = -2 * 1)$

Exemple

- $(2 = 2) \Rightarrow (2 * 0 = 2 * 0)$ est vraie
- $(2 * 0 = -2 * 0) \Rightarrow (2 = -2)$ est fausse
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 0 = -2 * 0)$
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 1 = -2 * 1)$

Exemple

- $(2 = 2) \Rightarrow (2 * 0 = 2 * 0)$ est vraie
- $(2 * 0 = -2 * 0) \Rightarrow (2 = -2)$ est fausse
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 0 = -2 * 0)$ est vraie
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 1 = -2 * 1)$

Exemple

- $(2 = 2) \Rightarrow (2 * 0 = 2 * 0)$ est vraie
- $(2 * 0 = -2 * 0) \Rightarrow (2 = -2)$ est fausse
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 0 = -2 * 0)$ est vraie
- $(2 = -2) \Rightarrow (2 * 1 = -2 * 1)$ est vraie.

Définition

La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Définition

La réciproque de $(P \Rightarrow Q)$ est $(Q \Rightarrow P)$.

Remarque

La réciproque d'une implication $(P \Rightarrow Q)$ peut être vraie ou fausse, que $(P \Rightarrow Q)$ soit vraie ou fausse.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  $(P \Rightarrow Q)$ est vraie mais $(Q \Rightarrow P)$ est fausse.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  $(P \Rightarrow Q)$ est vraie mais $(Q \Rightarrow P)$ est fausse.
- Soit $P =$ «Le triangle ABC est rectangle en A»
  et $Q = (AB^2 + AC^2 = BC^2)$

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  $(P \Rightarrow Q)$ est vraie mais $(Q \Rightarrow P)$ est fausse.
- Soit $P =$ «Le triangle ABC est rectangle en A»
  et $Q = (AB^2 + AC^2 = BC^2)$
  $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  $(P \Rightarrow Q)$ est vraie mais $(Q \Rightarrow P)$ est fausse.
- Soit $P =$ «Le triangle ABC est rectangle en A»
  et $Q = (AB^2 + AC^2 = BC^2)$
  $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies.
- Soit $P =$ «x est entier» et $Q =$ «x est positif»

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  $(P \Rightarrow Q)$ est vraie mais $(Q \Rightarrow P)$ est fausse.
- Soit $P =$ «Le triangle ABC est rectangle en A»
  et $Q = (AB^2 + AC^2 = BC^2)$
  $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont vraies.
- Soit $P =$ «x est entier» et $Q =$ «x est positif»
  $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ sont fausses.

Définition (Équivalence)

On note $(P \Leftrightarrow Q) \ = \ (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$

Définition (Équivalence)

On note $(P \Leftrightarrow Q) = (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$

Remarques

(i) On lit «P est équivalent à Q», ou «P si et seulement si Q».

(ii) On dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q.

Définition (Équivalence)

On note $(P \Leftrightarrow Q) = (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$

Remarques

(iii) Cette proposition est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses, et fausse sinon.

Définition (Équivalence)

On note $(P \Leftrightarrow Q) \;=\; (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$

Remarques

(iii) Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Définition (Équivalence)

On note $(P \Leftrightarrow Q) = (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$

Remarques

(iii) Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	
V	F	F	V	
F	V	V	F	
F	F	V	V	

Définition (Équivalence)

On note $(P \Leftrightarrow Q) \;=\; (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$

Remarques

(iii) Sa table de vérité est :

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Définition

La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Définition

La contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$.

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont vraies :
  $(x \geqslant 2) \Rightarrow (x \geqslant 1)$ et $(x < 1) \Rightarrow (x < 2)$

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont vraies :
  $(x \geqslant 2) \Rightarrow (x \geqslant 1)$ et $(x < 1) \Rightarrow (x < 2)$
- Soit $P =$ «J'ai des pommes»
  et $Q =$ «J'ai des fruits».

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Exemple

- Soit $P = (x \geqslant 2)$ et $Q = (x \geqslant 1)$
  Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont vraies :
  $(x \geqslant 2) \Rightarrow (x \geqslant 1)$ et $(x < 1) \Rightarrow (x < 2)$
- Soit $P =$ «J'ai des pommes»
  et $Q =$ «J'ai des fruits».
  Alors $(P \Rightarrow Q)$ et $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$ sont vraies.

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Démonstration 1.

Par définition : $(P \Rightarrow Q) = (\neg P \text{ ou } Q)$

$$\begin{aligned}(\neg Q \Rightarrow \neg P) &= (\neg(\neg Q) \text{ ou } \neg P) \\ &= (Q \text{ ou } \neg P) \\ &= (\neg P \text{ ou } Q) \\ &= (P \Rightarrow Q)\end{aligned}$$

L'égalité est démontrée. $\square$

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Démonstration par la table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Démonstration par la table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	F	F		
V	F	F	V		
F	V	V	F		
F	F	V	V		

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Démonstration par la table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	F	F	V	
V	F	F	V	F	
F	V	V	F	V	
F	F	V	V	V	

Proposition

Une implication et sa contraposée sont équivalentes.

Démonstration par la table de vérité.

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

Les deux dernières colonnes sont bien égales. $\square$

▷ Exercice.

Compléter le tableau suivant rappelant les différents opérateurs.

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$

▷ Exercice.

Compléter le tableau suivant rappelant les différents opérateurs.

P	Q	$\neg P$	P et Q	P ou Q	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

▷ Exercice.

Démontrer les lois de De Morgan à l'aide de tables de vérité.

▷ Exercice.

Soit P et Q deux propositions. Démontrer que la négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P \text{ et } \neg Q)$.

▷ Exercice. Associativités

Démontrer à l'aide de tables de vérité à 8 lignes que pour toutes propositions P, Q, R :

$$\begin{aligned}(P \text{ et } Q) \text{ et } R &= P \text{ et } (Q \text{ et } R)\\ (P \text{ ou } Q) \text{ ou } R &= P \text{ ou } (Q \text{ ou } R)\end{aligned}$$

▷ Exercice. Distributivités

Démontrer à l'aide de tables de vérité à 8 lignes que pour toutes propositions P, Q, R :

$$\begin{aligned}P \text{ ou } (Q \text{ et } R) &= (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)\\ P \text{ et } (Q \text{ ou } R) &= (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)\end{aligned}$$

Remarque

Table de vérité pour trois propositions :

P	Q	R		
V	V	V		
V	V	F		
V	F	V		
V	F	F		
F	V	V		
F	V	F		
F	F	V		
F	F	F		

Définition

On note $\top$ la proposition qui est toujours vraie, et on l'appelle tautologie.
On note $\perp$ la proposition qui est toujours fausse, et on l'appelle antilogie.

Définition

On note $\top$ la proposition qui est toujours vraie, et on l'appelle tautologie.
On note $\perp$ la proposition qui est toujours fausse, et on l'appelle antilogie.

Exemple

Pour toute proposition P :

$$(P \text{ et } \top) = \qquad (P \text{ et } \perp) =$$

$$(P \text{ ou } \top) = \qquad (P \text{ ou } \perp) =$$

Définition

On note $\top$ la proposition qui est toujours vraie, et on l'appelle tautologie.
On note $\perp$ la proposition qui est toujours fausse, et on l'appelle antilogie.

Exemple

Pour toute proposition P :

$$(P \text{ et } \top) = P \qquad (P \text{ et } \perp) = \perp$$
$$(P \text{ ou } \top) = \qquad (P \text{ ou } \perp) =$$

Définition

On note $\top$ la proposition qui est toujours vraie, et on l'appelle tautologie.
On note $\bot$ la proposition qui est toujours fausse, et on l'appelle antilogie.

Exemple

Pour toute proposition P :

$$(P \text{ et } \top) = P \qquad (P \text{ et } \bot) = \bot$$

$$(P \text{ ou } \top) = \top \qquad (P \text{ ou } \bot) = P$$

▷ Exercice.

Soit P une proposition. Simplifier $(P$ et $\neg P)$ et $(P$ ou $\neg P)$.

▷ Exercice.

Démontrer avec et sans table de vérité que pour toute proposition P :

$$
\begin{aligned}
(\top \Rightarrow P) &= P & \qquad (P \Rightarrow \bot) &= \neg P \\
(\top \Leftrightarrow P) &= P & \qquad (\bot \Leftrightarrow P) &= \neg P
\end{aligned}
$$

Définition

Un prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Définition

Un prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Dans la suite nous considérerons surtout des prédicats $P(x)$ dépendant d'un paramètre x élément d'un ensemble E.

Définition

Un prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Dans la suite nous considérerons surtout des prédicats $P(x)$ dépendant d'un paramètre x élément d'un ensemble E.

Exemples

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit $P(x) : x^2 < 1$

Définition

Un prédicat est une proposition dont la valeur de vérité dépend d'un ou plusieurs paramètres.

Dans la suite nous considérerons surtout des prédicats $P(x)$ dépendant d'un paramètre x élément d'un ensemble E.

Exemples

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$ soit $P(x) : x^2 < 1$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{P}_n : \sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Définition (Quantificateur universel, quantificateur existentiel)

La proposition

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$ (ou quel que soit $x \in E$).

La proposition

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

signifie que la proposition $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$.

Remarques

(i) La variable x est muette.

$$\begin{aligned}(\forall x \in E \quad P(x)) &= (\forall u \in E \quad P(u))\\ (\exists x \in E \quad P(x)) &= (\exists \xi \in E \quad P(\xi))\end{aligned}$$

Remarques

(i) La variable x est muette.

$$\begin{aligned} (\forall x \in E \quad P(x)) &= (\forall u \in E \quad P(u)) \\ (\exists x \in E \quad P(x)) &= (\exists \xi \in E \quad P(\xi)) \end{aligned}$$

(ii) On peut ajouter l'unicité au quantificateur existentiel :
$(\exists ! x \in E \ P(x))$ signifie «il existe un unique x dans E tel que $P(x)$ est vraie».

Proposition

La négation de $(\forall x \in E \quad P(x))$ est :

$$(\exists x \in E \quad \neg P(x))$$

La négation de $(\exists x \in E \quad P(x))$ est :

$$(\forall x \in E \quad \neg P(x))$$

Exemple

- La négation de $(\forall x \in A \quad x \geqslant 0)$ est :

Exemple

- La négation de $(\forall x \in A \quad x \geqslant 0)$ est :

$$(\exists x \in A \quad x < 0)$$

Exemple

- La négation de $(\forall x \in A \quad x \geqslant 0)$ est :
  $$(\exists x \in A \quad x < 0)$$
- La négation de «toutes les poires de cette corbeille sont vertes» est

Exemple

- La négation de $(\forall x \in A \quad x \geqslant 0)$ est :
$$(\exists x \in A \quad x < 0)$$
- La négation de «toutes les poires de cette corbeille sont vertes» est «au moins une poire de cette corbeille n'est pas verte».

Exemple

- La négation de $(\forall x \in A \quad x \geqslant 0)$ est : $(\exists x \in A \quad x < 0)$
- La négation de «toutes les poires de cette corbeille sont vertes» est «au moins une poire de cette corbeille n'est pas verte».
- La négation de «un élève de la classe a son nom qui commence par W» est

Exemple

- La négation de $(\forall x \in A \quad x \geqslant 0)$ est :
$$(\exists x \in A \quad x < 0)$$
- La négation de «toutes les poires de cette corbeille sont vertes» est «au moins une poire de cette corbeille n'est pas verte».
- La négation de «un élève de la classe a son nom qui commence par W» est «aucun élève de la classe n'a son nom qui commence par W».

Méthode

- Pour démontrer que $(\forall x \in E \quad P(x))$ est vraie, on considère un élément quelconque x de E, et on démontre que $P(x)$ est vraie pour cet élément.
- Pour démontrer que $(\forall x \in E \quad P(x))$ est faux, il suffit de trouver au moins un $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse. On **exhibe un contre-exemple**.

Méthode

- Pour démontrer que $(\exists x \in E \quad P(x))$ est vraie, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $P(x)$ est vraie. On **exhibe un exemple**.
- Pour démontrer que $(\exists x \in E \quad P(x))$ est fausse, on montre que la négation est vraie. On considère donc un élément x quelconque de E et on prouve que $P(x)$ est fausse.

Remarque

La propriété $(\forall x \in \varnothing \quad P(x))$ est toujours vraie.
En effet, sa négation est $(\exists x \in \varnothing \quad \neg P(x))$, elle est toujours fausse.

▷ Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Que dire des propositions suivantes ?

a. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

b. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

c. $\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

d. $\exists A \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant A$

▷ Exercice 2.

Énoncer en termes logiques (avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

a. f est la fonction nulle.

b. f n'est pas la fonction nulle.

c. f s'annule.

d. f ne s'annule pas.

e. f est croissante.

f. f n'est pas croissante.

g. f est 2π-périodique.

h. f est périodique.

i. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

II. Modes de raisonnement

A. Implications et équivalences

B. Récurrences

C. Analyse - synthèse

Remarque (Principe de déduction)

Si P et $P \Rightarrow Q$ sont vraies alors Q est vraie.

Remarque

La plupart des théorèmes sont des implications, parfois des équivalences.
Plus précisément, ils sont souvent de la forme :

$$\forall x \in E \qquad P(x) \implies Q(x)$$

ou

$$\forall x \in E \qquad P(x) \iff Q(x)$$

Exemple

- Si f est dérivable alors f est continue.

Exemple

- Si f est dérivable alors f est continue.
- Si $(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n)$ et $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.

Exemple

- Si f est dérivable alors f est continue.
- Si $(\forall n \in \mathbb{N}\ u_n \leqslant v_n)$ et $\lim u_n = +\infty$ alors $\lim v_n = +\infty$.
- Soit ABC un triangle. Alors le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Définition

Pour un théorème de la forme

$$\forall x \in E \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$

$P(x)$ est l'hypothèse et $Q(x)$ est la conclusion.

Exemple : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

- I est un intervalle fixé, E est l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$

Exemple : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

- I est un intervalle fixé, E est l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- Hypothèse $P(f)$: f est continue et strictement monotone.

Exemple : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

- I est un intervalle fixé, E est l'ensemble des fonctions f de I dans $\mathbb{R}$: $E = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$
- Hypothèse $P(f)$: f est continue et strictement monotone.
- Conclusion $Q(f)$: $f(I)$ est un intervalle
  $f : I \to f(I)$ est bijective.

Exemple : Théorème de la bijection

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
Si f est continue et strictement monotone sur I alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$.

- Hypothèse $P(f)$: f est continue et strictement monotone.
- Conclusion $Q(f)$: $f(I)$ est un intervalle
  $f : I \to f(I)$ est bijective.
- Théorème de la bijection :

$$\forall f \in E \quad P(f) \Rightarrow Q(f)$$

Méthode

Pour démontrer une implication $P \Rightarrow Q$ on peut :

- Procéder directement : supposer que P est vraie, démontrer que Q est alors vraie.
- Démontrer la contraposée : supposer que Q est fausse, démontrer que P est alors fausse.
- Raisonner par l'absurde, *i.e.*, supposer que P est vraie et Q est fausse, et arriver à une contradiction.

Méthode

Pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$ on peut :

- Procéder directement par équivalences successives.
- Démontrer que $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ (double implication).
- Démontrer que $P \Rightarrow Q$ et $\neg P \Rightarrow \neg Q$.

Exemples

Démontrer que :

a. $\forall z \in \mathbb{C} \qquad z \in \mathbb{U} \iff \bar{z} = z^{-1}$

b. $\forall f \in \mathcal{F}(E, F) \qquad f$ est bijective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{F}(F, E)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_E$.

c. $\forall n \in \mathbb{N} \qquad n$ est pair $\iff n^2$ est pair.

II. Modes de raisonnement

Notation

On note dans toute cette partie $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Théorème de récurrence

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème de récurrence

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème de récurrence (autre écriture)

$$\Big(\mathcal{P}_0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N} \;\; \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1})\Big) \quad \Rightarrow \quad (\forall n \in \mathbb{N} \;\; \mathcal{P}_n)$$

Remarque

On peut commencer la récurrence à 1, ou à tout entier n_0.

Remarque

On peut commencer la récurrence à 1, ou à tout entier n_0.

Théorème de récurrence

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Remarque

On peut commencer la récurrence à 1, ou à tout entier n_0.

Théorème de récurrence

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_1$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^* \quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Remarque

On peut commencer la récurrence à 1, ou à tout entier n_0.

Théorème de récurrence

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_5$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout entier $n \geqslant 5 \quad \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout entier $n \geqslant 5 \quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème de récurrence double

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème de récurrence double

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left(\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}\right) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}$$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N} \quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème de récurrence double (autre écriture)

$$\Big(\mathcal{P}_0 \ \text{ et } \ \mathcal{P}_1 \ \text{ et } \ \left(\forall n \in \mathbb{N} \ \ \left(\mathcal{P}_n \ \text{ et } \ \mathcal{P}_{n+1}\right) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}\right)\Big) \Rightarrow \quad \left(\forall n \in \mathbb{N} \ \ \mathcal{P}_n\right)$$

▷ Exercice.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
Calculer les premiers termes de cette suite, deviner une expression générale de u_n, puis démontrer votre conjecture.

Remarque

Il existe aussi la récurrence triple, quadruple, etc.

Remarque

Il existe aussi la récurrence triple, quadruple, etc.

Théorème de récurrence triple

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont vraies
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1} \text{ et } \mathcal{P}_{n+2}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+3}$$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Théorème de récurrence forte

Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$(\mathcal{P}_0 \text{ et } \mathcal{P}_1 \text{ et } \dots \text{ et } \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad \mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Pour démontrer ceci on note, pour tout $n \geqslant 2$:
$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

Pour démontrer ceci on note, pour tout $n \geqslant 2$:
$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

On démontre par récurrence forte que cette proposition est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

Initialisation. Si $n = 2$ alors n est un produit de nombres premiers, puisqu'il est premier. La propriété $\mathcal{P}_2$ est donc vraie.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à 2 fixé.
Supposons que $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \ldots, \mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies.
Si n est premier alors il est produit de facteurs premiers, à savoir lui-même. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à 2 fixé.
Supposons que $\mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \ldots, \mathcal{P}_{n-1}$ sont vraies.
Si n n'est pas premier alors $n = ab$ avec a et b compris entre 2 et $n - 1$.
Par hypothèse de récurrence les propriétés $\mathcal{P}_a$ et $\mathcal{P}_b$ sont vraies, donc a et b sont produits de facteurs premiers, puis n est produit de facteurs premiers.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ strictement supérieur à 2 fixé. La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie si toutes les propriétés $\mathcal{P}_k$ pour k allant de 2 à $n-1$ sont vraies.

Exemple

Tout entier naturel $n \geqslant 2$ se décompose en produit de nombres premiers.

$\mathcal{P}_n$: «n est produit de facteurs premiers».

Conclusion. Par récurrence forte, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Remarque

Les théorèmes de récurrence simple, double, etc, et forte sont tous équivalents.

Théorème de récurrence finie

Soit N un entier naturel. Si

- **Initialisation :** $\mathcal{P}_0$ est vraie
- **Hérédité :** Pour tout $n \in \{0, \ldots, N-1\}$
$$\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$$

Alors

- **Conclusion :** Pour tout $n \in \{0, \ldots, N\}$
$\mathcal{P}_n$ est vraie.

▷ Exercice.

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$: $f(x) = x^m$

Démontrer que pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(k)}(x) = \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

Expliquer pourquoi l'implication $\mathcal{P}_m \implies \mathcal{P}_{m+1}$ est fausse.

II. Modes de raisonnement

Méthode

On souhaite déterminer tous les éléments d'un ensemble qui vérifient une certaine propriété. Par exemple résoudre une équation.

Méthode

On souhaite déterminer tous les éléments d'un ensemble qui vérifient une certaine propriété. Par exemple résoudre une équation.

Lors de la phase d'analyse on suppose qu'il existe une solution et on l'étudie. On obtient un certain nombre de propriétés.

Méthode

On souhaite déterminer tous les éléments d'un ensemble qui vérifient une certaine propriété. Par exemple résoudre une équation.
Lors de la phase d'analyse on suppose qu'il existe une solution et on l'étudie. On obtient un certain nombre de propriétés.
Lors de la phase de synthèse on cherche à résoudre le problème parmi les éléments ayant les propriétés dégagées dans la partie précédente.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

Analyse : si une solution x existe alors $x(x-3) = 3x-5$, donc $x^2 - 6x + 5 = 0$, puis $x = 1$ ou $x = 5$.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

Analyse : si une solution x existe alors $x(x-3) = 3x-5$, donc $x^2-6x+5=0$, puis $x=1$ ou $x=5$.
Synthèse : Seul $x=5$ convient.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$\sqrt{x(x-3)} = \sqrt{3x-5}$$

Analyse : si une solution x existe alors $x(x-3) = 3x-5$, donc $x^2 - 6x + 5 = 0$, puis $x = 1$ ou $x = 5$.

Synthèse : Seul $x = 5$ convient.

Conclusion : L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{5\}$.

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse : Supposons que f est une fonction vérifiant la propriété.

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse : Supposons que f est une fonction vérifiant la propriété.
En fixant y on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Analyse : Supposons que f est une fonction vérifiant la propriété.

En fixant y on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

On dérive par rapport à x :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x + y) = f'(x)$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+y) = f'(x)$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+y) = f'(x)$$

Pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) = f'(0)$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x+y) = f'(x)$$

Pour $x = 0$:

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad f'(y) = f'(0)$$

Ainsi f' est constante. Posons $a = f'(0)$.

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse :

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = a$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Analyse :

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = a$$

Il existe donc $b \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = ax + b$$

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Synthèse : Soit $f(x) = ax + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Synthèse : Soit $f(x) = ax + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
La propriété

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

donne $b = 0$.

Exemple

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Conclusion : Les fonctions vérifiant la propriété ci-dessus sont les fonctions $f : x \mapsto ax$ où a est un réel.

Prochain chapitre

Chapitre B4

Arithmétique