

Mathématiques

Chapitre B1  
**Nombres complexes**

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Raphaël Bombelli (Italie) 1526 – 1572

Niccolo Fontana dit Tartaglia  
(Italie) 1499 – 1557



# Girolamo Cardano (Italie) 1501 – 1576



# Leonhard Euler (Suisse) 1707 – 1783



Carl Friedrich Gauss  
(Allemagne) 1777 – 1855



Louis-Augustin Cauchy (France) 1789 – 1857



# Chapitre B1. Nombres complexes

## I. Généralités

# Chapitre B1. Nombres complexes

I. Généralités

II. Angles

# Chapitre B1. Nombres complexes

I. Généralités

II. Angles

III. Équations algébriques

# Chapitre B1. Nombres complexes

I. Généralités

II. Angles

III. Équations algébriques

IV. L'exponentielle complexe

# Chapitre B1. Nombres complexes

## **I. Généralités**

- A. Nombres complexes
- B. Conjugaison
- C. Module

## II. Angles

## III. Équations algébriques

## IV. L'exponentielle complexe

## I. Généralités

A. Nombres complexes

B. Conjugaison

C. Module

## Définition

Soit  $i$  un nombre vérifiant  $i^2 = -1$ . On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres  $x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels :

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ces nombres sont appelés **nombres complexes**.

## Définition

Soit  $i$  un nombre vérifiant  $i^2 = -1$ . On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres  $x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont deux réels :

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Ces nombres sont appelés **nombres complexes**.

## Exemple

$$2 + 3i \quad 5 \quad -\frac{3}{2}i \quad \sqrt{2} + i\pi \dots$$

## Remarque

- (i) L'ensemble  $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication.
- (ii) Tout complexe  $z$  possède un opposé  $-z$ .
- (iii) Tout complexe  $z$  non-nul possède un inverse  $\frac{1}{z}$ .
- (iv) On définit ainsi également la soustraction et la division par un complexe non-nul.

## Remarque

- (i) L'ensemble  $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication.
- (ii) Tout complexe  $z$  possède un opposé  $-z$ .
- (iii) Tout complexe  $z$  non-nul possède un inverse  $\frac{1}{z}$ .
- (iv) On définit ainsi également la soustraction et la division par un complexe non-nul.

## Exemple

Calcul de  $\frac{2+i}{3-i}$

## Remarque

- (i) L'ensemble  $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication.
- (ii) Tout complexe  $z$  possède un opposé  $-z$ .
- (iii) Tout complexe  $z$  non-nul possède un inverse  $\frac{1}{z}$ .
- (iv) On définit ainsi également la soustraction et la division par un complexe non-nul.

Démonstration du (iii). Soit  $z = x + iy \neq 0$ .

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

## Définition

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Alors  $x$  est la **partie réelle** et  $y$  est la **partie imaginaire** de  $z$ .

On note  $x = \operatorname{Re}(z)$  et  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

**Exemple**

$$\operatorname{Re}(3 + 2i) =$$

$$\operatorname{Im}(3 + 2i) =$$

$$\operatorname{Re}(i) =$$

$$\operatorname{Im}(i) =$$

**Exemple**

$$\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3$$

$$\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$$

$$\operatorname{Re}(i) =$$

$$\operatorname{Im}(i) =$$

**Exemple**

$$\operatorname{Re}(3 + 2i) = 3$$

$$\operatorname{Im}(3 + 2i) = 2$$

$$\operatorname{Re}(i) = 0$$

$$\operatorname{Im}(i) = 1$$

**Attention**

$\operatorname{Im}(z)$  est réel.

## Définition

$\operatorname{Im}(z) = 0$  :  $z$  est réel.

$\operatorname{Re}(z) = 0$  :  $z$  est **imaginaire pur**.

$$\mathbb{R} = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$

$$i\mathbb{R} = \{iy \mid y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$

## Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

$$z = x + iy \quad \longleftrightarrow \quad M(x, y)$$

## Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

$$z = x + iy \quad \longleftrightarrow \quad M(x, y)$$

affixe de  $M$

image de  $z$

## Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

$$z = x + iy \quad \longleftrightarrow \quad M(x, y)$$

affixe de  $M$

image de  $z$

Les deux axes du repère sont l'axe des réels et l'axe des imaginaires purs.

## Remarque

Si  $z$  et  $z'$  sont deux complexes, d'images  $M$  et  $M'$ , alors  $z + z'$  admet pour image le point  $M''$  tel que

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$$

## Remarque

Si  $z$  et  $z'$  sont deux complexes, d'images  $M$  et  $M'$ , alors  $z + z'$  admet pour image le point  $M''$  tel que

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM''}$$

Le vecteur  $\overrightarrow{MM'}$  admet pour affixe  $z' - z$ .

## I. Généralités

A. Nombres complexes

B. Conjugaison

C. Module

## Définition

Soit  $z = x + iy$  un complexe. Le **conjugué** de  $z$  est :

$$\bar{z} = x - iy$$

## Définition

Soit  $z = x + iy$  un complexe. Le **conjugué** de  $z$  est :

$$\bar{z} = x - iy$$

## Remarque

Les images de  $z$  et de  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

## Définition

Soit  $z = x + iy$  un complexe. Le **conjugué** de  $z$  est :

$$\bar{z} = x - iy$$

## Remarque

Les images de  $z$  et de  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

## Exemple

$$\overline{4 + 3i} =$$

$$\overline{5} =$$

$$\overline{1 - 6i} =$$

$$\overline{7i} =$$

## Définition

Soit  $z = x + iy$  un complexe. Le **conjugué** de  $z$  est :

$$\bar{z} = x - iy$$

## Remarque

Les images de  $z$  et de  $\bar{z}$  sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

## Exemple

$$\overline{4 + 3i} = 4 - 3i$$

$$\overline{1 - 6i} = 1 + 6i$$

$$\overline{5} = 5$$

$$\overline{7i} = -7i$$

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad \overline{\overline{z}} = z$$

(La conjugaison est une **involution**.)

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad \overline{\overline{z}} = z$$

(La conjugaison est une **involution**.)

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 :$$

$$\overline{z + z'} =$$

$$\overline{z - z'} =$$

$$\overline{zz'} =$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$$

(avec  $z' \neq 0$ )

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad \overline{\overline{z}} = z$$

(La conjugaison est une **involution**.)

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 :$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

(avec  $z' \neq 0$ )

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} : \quad \overline{\overline{z}} = z$$

(La conjugaison est une **involution**.)

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 :$$

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$$

$$\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$$

(avec  $z' \neq 0$ )

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} :$$

$$\overline{nz} = n\overline{z}$$

$$\overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Démonstration. Il suffit de tout écrire.

Démonstration. Il suffit de tout écrire.



## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \operatorname{Im} z =$$

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z =$$

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$(ii) \quad z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$$

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$$

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$(ii) \quad z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow$$

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$(ii) \quad z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = -z$$

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$(ii) \quad z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = -z$$

Démonstration.

Soit  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

## Proposition

Pour tout complexe  $z$  :

$$(i) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$(ii) \quad z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = z$$

$$z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{z} = -z$$

Démonstration.

Soit  $z = x + iy$  avec  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .



## ▷ Exercice 1.

Calculer

a.  $a + b$      $ab$      $\frac{a}{b}$      $\frac{b}{a}$     avec  $a = 4 - i$   
et  $b = 3 + 2i$

b.  $i^2$      $i^3$      $i^4$      $i^{27}$      $i^{270576}$

c.  $(-i)^2$      $(-i)^3$      $(-i)^4$

d.  $(1 + i)^2$      $(1 + i)^3$      $(1 + i)^4$      $(1 + i)^8$      $(1 + i)^{27}$

## I. Généralités

A. Nombres complexes

B. Conjugaison

C. Module

## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Le **module** de  $z$  est :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Le **module** de  $z$  est :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Si  $z = x + iy$  alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Le **module** de  $z$  est :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Si  $z = x + iy$  alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Remarques

(i) Le module est bien défini, c'est un réel positif.

## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Le **module** de  $z$  est :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Si  $z = x + iy$  alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Remarques

- (i) Le module est bien défini, c'est un réel positif.
- (ii) Si  $z$  est réel alors son module coïncide avec sa valeur absolue.

## Définition

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Le **module** de  $z$  est :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Si  $z = x + iy$  alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Remarques

- (i) Le module est bien défini, c'est un réel positif.
- (ii) Si  $z$  est réel alors son module coïncide avec sa valeur absolue.
- (iii) Il représente la distance du point image  $M_z$  à l'origine.

## Rappel

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan d'affixes respectives  $a$  et  $b$ . Alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

donc  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $b - a$ .

## Rappel

Soit  $A$  et  $B$  deux points du plan d'affixes respectives  $a$  et  $b$ . Alors

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

donc  $\overrightarrow{AB}$  a pour affixe  $b - a$ .

## Proposition

La distance de  $A$  à  $B$  est  $|b - a|$ .

## Définition

Soit  $A$  un point d'affixe  $a \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ .

► Le **cercle** de centre  $A$  et de rayon  $r$  :

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

## Définition

Soit  $A$  un point d'affixe  $a \in \mathbb{C}$  et  $r \in \mathbb{R}_+$ .

- Le **cercle** de centre  $A$  et de rayon  $r$  :

$$\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| = r\}$$

- Le **disque ouvert** de centre  $A$  et de rayon  $r$  :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$$

- Le **disque fermé** de centre  $A$  et de rayon  $r$  :

$$\overline{\mathcal{D}} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$$

## Remarque

$\overline{\mathcal{D}}$  est l'**union disjointe** de  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  :

$$\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{C} \cup \mathcal{D} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$$

## Proposition

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$|zz'| = \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \quad |z^n| =$$

$(z' \neq 0)$

## Proposition

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$|zz'| = |z||z'| \qquad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

$(z' \neq 0)$

## Proposition

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$|zz'| = |z||z'| \qquad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

$(z' \neq 0)$

Démonstration. (Exercice) Il suffit de tout écrire.

## Proposition

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  et  $n \in \mathbb{N}$ . Alors :

$$|zz'| = |z||z'| \qquad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad |z^n| = |z|^n$$

$(z' \neq 0)$

Démonstration. (Exercice) Il suffit de tout écrire.



## Proposition - Inégalité triangulaire

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

## Proposition - Inégalité triangulaire

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

## Remarque - Autre inégalité triangulaire

En remplaçant  $z'$  par  $-z'$  :

$$||z| - |z'|| \leq |z - z'| \leq |z| + |z'|$$

## Lemme

$\forall z \in \mathbb{C} :$

$$(i) \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad (ii) \quad \begin{aligned} -|z| &\leq \operatorname{Re} z \leq |z| \\ -|z| &\leq \operatorname{Im} z \leq |z| \end{aligned}$$

## Lemme

$\forall z \in \mathbb{C} :$

$$(i) \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad (ii) \quad -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z| \\ -|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$$

Démonstration.

$$(i) \quad |\bar{z}| = \sqrt{\bar{z}\bar{\bar{z}}} = \sqrt{\bar{z}z} = |z|$$

**Lemme** $\forall z \in \mathbb{C} :$ 

$$(i) \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad (ii) \quad -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$$
$$-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$$

Démonstration.

$$(ii) \quad -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$$
$$\iff (\operatorname{Re} z)^2 \leq |z|^2$$

**Lemme** $\forall z \in \mathbb{C} :$ 

$$(i) \quad |\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad (ii) \quad -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$$

$$-|z| \leq \operatorname{Im} z \leq |z|$$

Démonstration.

$$(ii) \quad -|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$$

$$\iff (\operatorname{Re} z)^2 \leq |z|^2$$

$$\iff x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$\iff 0 \leq y^2 \quad \square$$

## Proposition - Inégalité triangulaire

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire.

**Proposition - Inégalité triangulaire**

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$$

$$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire.



## Proposition - Inégalité triangulaire généralisée

$$n \in \mathbb{N} \quad (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

**Proposition - Inégalité triangulaire généralisée**

$$n \in \mathbb{N} \quad (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Démonstration. Par récurrence sur  $n$ .



# Chapitre B1. Nombres complexes

## I. Généralités

## II. Angles

- A. L'ensemble  $\mathbb{U}$
- B. Argument
- C. Aspect dynamique
- D. Applications à la trigonométrie
- E. Applications à la géométrie

## III. Équations algébriques

## IV. L'exponentielle complexe

## II. Angles

A. L'ensemble  $\mathbb{U}$

B. Argument

C. Aspect dynamique

D. Applications à la trigonométrie

E. Applications à la géométrie

## Notation

$\mathbb{U}$  : ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\begin{aligned}\mathbb{U} &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \\ &= \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x^2 + y^2 = 1\}\end{aligned}$$

## Remarque

L'ensemble des images des éléments de  $\mathbb{U}$  est le cercle trigonométrique.

## Remarque

L'ensemble des images des éléments de  $\mathbb{U}$  est le cercle trigonométrique.

Soit  $z$  un élément de  $\mathbb{U}$ ,  $M$  son image, et  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ . Alors :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

## Remarque

L'ensemble des images des éléments de  $\mathbb{U}$  est le cercle trigonométrique.

Soit  $z$  un élément de  $\mathbb{U}$ ,  $M$  son image, et  $\theta$  une mesure de l'angle orienté  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ . Alors :

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$

## Proposition

Soit  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x^2 + y^2 = 1$ .

Alors il existe  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = \sin \theta \end{cases}$$

## Définition

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on pose

$$e^{i\theta} =$$

## Définition

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on pose

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

## Définition

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  on pose

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Ainsi  $\mathbb{U}$  est l'ensemble des  $e^{i\theta}$  où  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

## Proposition

Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

## Proposition

Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\&= \cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' \\&\quad + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\&= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\end{aligned}$$

## Proposition

Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\&= \cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' \\&\quad + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\&= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\end{aligned}$$

## Proposition

Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\&= \cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' \\&\quad + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\&= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')\end{aligned}$$

## Proposition

Pour tous réels  $\theta$  et  $\theta'$  :  $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}e^{i\theta}e^{i\theta'} &= (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta') \\&= \cos \theta \cos \theta' + i \cos \theta \sin \theta' \\&\quad + i \sin \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' \\&= \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') \\&= e^{i(\theta+\theta')}\end{aligned}$$



## II. Angles

A. L'ensemble  $\mathbb{U}$

B. Argument

C. Aspect dynamique

D. Applications à la trigonométrie

E. Applications à la géométrie

## Remarque

Soit  $z$  non-nul. Soit  $r$  son module.

## Remarque

Soit  $z$  non-nul. Soit  $r$  son module.

Alors  $\frac{z}{r}$  est bien défini et  $\left| \frac{z}{r} \right| = \frac{|z|}{r} = 1$

Donc  $\frac{z}{r} \in \mathbb{U}$  :

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \frac{z}{r} = e^{i\theta}$$

Il existe donc  $\theta \in \mathbb{R}$  tel que :  $z = re^{i\theta}$

## Définition

Soit  $z$  non-nul et  $r$  son module.

Un **argument** de  $z$  est un réel  $\theta$  tel que :

$$z = re^{i\theta}$$

On note alors  $\theta = \arg z$ .

## Remarques

L'argument est défini à  $2\pi$  près.

On peut avoir par exemple en même temps :

$$\arg z = \frac{\pi}{6} \quad \text{et} \quad \arg z = \frac{13\pi}{6}$$

On dit alors que  $\frac{\pi}{6}$  est **un** argument de  $z$ .

## Proposition

Le module d'un complexe est unique, alors que son argument est défini à  $2\pi$  près :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff \begin{cases} r = r' \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases}$$

## Définition

Forme algébrique :  $z = x + iy$

Forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$

## Proposition (Passage d'une forme à l'autre)

Avec les notations de la définition précédente :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta \text{ est un angle tel que } \begin{cases} \frac{x}{r} = \cos \theta \\ \frac{y}{r} = \sin \theta \end{cases} \end{cases}$$

**▷ Exercice 2.**

Donner la forme algébrique de :

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{2}} \quad z_2 = 4e^{-i\frac{4\pi}{3}} \quad z_3 = \sqrt{2}e^{i3\pi}$$

Donner une forme exponentielle de :

$$\begin{aligned} z_4 &= \sqrt{3} - i & z_5 &= -4i & z_6 &= 5 - 5i \\ z_7 &= -7 \end{aligned}$$

**▷ Exercice 3.**

Calculer :  $(1 + e^{i\frac{\pi}{3}})^{24}$

## Proposition

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non-nuls,  $n$  un entier.  
Alors à  $2\pi$  près :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$$

$$\arg(z^n) = n \arg z$$

## Proposition

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non-nuls,  $n$  un entier.  
Alors à  $2\pi$  près :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

Démonstration. On note  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$ .

Alors :  $\arg(zz') = \arg(re^{i\theta}r'e^{i\theta'})$

## Proposition

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non-nuls,  $n$  un entier.  
Alors à  $2\pi$  près :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

Démonstration. On note  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$ .

$$\begin{aligned}\text{Alors : } \arg(zz') &= \arg(re^{i\theta}r'e^{i\theta'}) \\ &= \arg(rr'e^{i(\theta+\theta')})\end{aligned}$$

## Proposition

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non-nuls,  $n$  un entier.  
Alors **à  $2\pi$  près** :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

Démonstration. On note  $z = re^{i\theta}$  et  $z' = r'e^{i\theta'}$ .

$$\begin{aligned}\text{Alors : } \arg(zz') &= \arg(re^{i\theta}r'e^{i\theta'}) \\ &= \arg(rr'e^{i(\theta+\theta')}) \\ &= \theta + \theta' = \arg z + \arg z'\end{aligned}$$

## Proposition

Soit  $z$  et  $z'$  deux complexes non-nuls,  $n$  un entier.  
Alors **à  $2\pi$  près** :

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$$

$$\arg(z^n) = n \arg z$$

Démonstration.

De même pour les autres formules.



## Remarque

Visions géométrique

- ▶ de la multiplication,
- ▶ de l'inversion.

## II. Angles

A. L'ensemble  $\mathbb{U}$

B. Argument

C. Aspect dynamique

D. Applications à la trigonométrie

E. Applications à la géométrie

## Définitions

(i) Translation de vecteur  $\vec{u}$  :

$$z \mapsto z + b \quad \text{avec} \quad b \in \mathbb{C}$$

(ii) Homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$  :

$$z \mapsto kz \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}^*$$

(iii) Rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  :

$$z \mapsto e^{i\theta} z \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}$$

(iv) Symétrie d'axe  $(Ox)$  :

$$z \mapsto \bar{z}$$

## Remarque

Soit  $a = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$ .

L'application  $z \mapsto az$  est la composée de

- ▶ la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\theta$  avec
- ▶ l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $r$ .

## Définition

L'application

$$f : z \mapsto az + b \quad ((a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$$

est appelée **similitude directe** du plan.

## II. Angles

A. L'ensemble  $\mathbb{U}$

B. Argument

C. Aspect dynamique

D. Applications à la trigonométrie

E. Applications à la géométrie

## Rappel

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

## Exemple 1

Calcul de  $\cos 3\theta$  et  $\sin 3\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

## Exemple 1

Calcul de  $\cos 3\theta$  et  $\sin 3\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

### ▷ Exercice 4.

Retrouver les formules donnant  $\cos 2\theta$  et  $\sin 2\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$ .

Calculer  $\cos 4\theta$  et  $\sin 4\theta$  en fonction de  $\cos \theta$  et  $\sin \theta$  de deux manières différentes : grâce à la formule de Moivre, et en utilisant  $\cos 4\theta = \cos 2(2\theta)$ .

## Proposition (Formules d'Euler)

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

## Proposition (Formules d'Euler)

Pour tout  $\theta \in \mathbb{R}$  :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Démonstration.

$$\cos \theta = \operatorname{Re} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} + \overline{e^{i\theta}}}{2} \quad \text{et} \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

$$\sin \theta = \operatorname{Im} e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta} - \overline{e^{i\theta}}}{2i}$$



## Exemple 2 (Linéarisation)

(i) Linéariser  $\cos^3 t \sin t$  et calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t \sin t \, dt$$

(ii) Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \cos 3t \sin 4t \, dt$$

**▷ Exercice 5.**

Linéariser  $\cos^2 t \sin^2 t$  puis calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t \sin^2 t dt$$

### Exemple 3

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $t = \tan \frac{x}{2}$  existe.

Alors  $e^{i\frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2}(1 + it)$ , on élève au carré...

## Exemple 4 (Factorisation par l'angle moitié, ou par l'angle moyen)

$$1 + e^{i\theta} =$$

$$e^{ip} + e^{iq} =$$

Ceci permet de retrouver les formules de transformation de somme en produit.

### Exemple 4 (Factorisation par l'angle moitié, ou par l'angle moyen)

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left( e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{ip} + e^{iq} =$$

Ceci permet de retrouver les formules de transformation de somme en produit.

### Exemple 4 (Factorisation par l'angle moitié, ou par l'angle moyen)

$$1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left( e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left( e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{-p+q}{2}} \right) = 2 \cos \frac{p-q}{2} e^{i\frac{p+q}{2}}$$

Ceci permet de retrouver les formules de transformation de somme en produit.

## Exemple 5

Soit  $\theta$  un réel non multiple de  $2\pi$ . Simplifier :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \cos k\theta$$

## Proposition (Transformation de Fresnel)

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = a \cos t + b \sin t$$

Alors il existe deux réels  $A$  et  $\varphi$  tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = A \cos(t - \varphi)$$

Démonstration. Soit  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Alors :

$$\frac{f(t)}{A} = \frac{a}{A} \cos t + \frac{b}{A} \sin t = a' \cos t + b' \sin t$$

$$\text{avec} \quad a' = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b}{A}$$

Démonstration. Soit  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Alors :

$$\frac{f(t)}{A} = \frac{a}{A} \cos t + \frac{b}{A} \sin t = a' \cos t + b' \sin t$$

$$\text{avec} \quad a' = \frac{a}{A} \quad \text{et} \quad b' = \frac{b}{A}$$

Comme  $a'^2 + b'^2 = \frac{a^2 + b^2}{A^2} = 1$  alors il existe un réel  $\varphi$  tel que  $a' = \cos \varphi$  et  $b' = \sin \varphi$  :

$$\frac{f(t)}{A} = \cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t = \cos(t - \varphi) \quad \square$$

Démonstration (autre version).

On pose  $z = a + ib$ . Soit  $A = |z|$  et  $\varphi = \arg z$ .

Alors :

$$\begin{aligned}f(t) &= a \cos t + b \sin t \\&= A \cos \varphi \cos t + A \sin \varphi \sin t \\&= A \cos(t - \varphi)\end{aligned}$$



## Exemple 6

Résoudre :  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$

**▷ Exercice 6.**

Résoudre l'équation :  $\cos t + \sin t = 1$

Quel est le maximum de la fonction

$$f(t) = \cos t + \sin t$$

et en quels points est-il atteint ?

## II. Angles

- A. L'ensemble  $\mathbb{U}$
- B. Argument
- C. Aspect dynamique
- D. Applications à la trigonométrie
- E. Applications à la géométrie

## Lemme

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  deux vecteurs, d'affixes  $z$  et  $z'$ .

Alors le complexe  $\frac{z'}{z}$  admet pour argument une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{u}')$ .

**Lemme**

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{u}'$  deux vecteurs, d'affixes  $z$  et  $z'$ .

Alors le complexe  $\frac{z'}{z}$  admet pour argument une mesure de l'angle  $(\vec{u}, \vec{u}')$ .

Démonstration. Soit :  $a = \frac{z'}{z} = re^{i\theta}$

Alors  $z' = za$  donc  $\arg z' = \arg z + \theta$ . □

## Proposition

Soit  $A, B, C, D$  quatre points du plan, d'affixes respectives  $a, b, c, d$ , avec  $a \neq b$  et  $c \neq d$ .

Alors  $\frac{d - c}{b - a}$  admet pour module  $\frac{CD}{AB}$  et pour argument une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .

## Proposition

Soit  $A, B, C, D$  quatre points du plan, d'affixes respectives  $a, b, c, d$ , avec  $a \neq b$  et  $c \neq d$ .

Alors  $\frac{d - c}{b - a}$  admet pour module  $\frac{CD}{AB}$  et pour argument une mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ .

Démonstration. Faire un dessin.



## Corollaire

$$(i) \quad (AB) \text{ et } (CD) \text{ parallèles} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{R}$$

$$(ii) \quad (AB) \text{ et } (CD) \text{ perpendiculaires}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}$$

$$(iii) \quad AB = CD \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d-c}{b-a} \in \mathbb{U}$$

## Exemple 7

Soit  $A, B, C$  trois points distincts. Alors :

$A, B, C$  sont alignés ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

$ABC$  est rectangle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in i\mathbb{R}$

$ABC$  est isocèle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{C}^*$

$ABC$  est équilatéral ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{C}^*$

## Exemple 7

Soit  $A, B, C$  trois points distincts. Alors :

$A, B, C$  sont alignés ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

$ABC$  est rectangle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in$

$ABC$  est isocèle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in$

$ABC$  est équilatéral ssi  $\frac{c - a}{b - a}$

## Exemple 7

Soit  $A, B, C$  trois points distincts. Alors :

$A, B, C$  sont alignés ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

$ABC$  est rectangle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in i\mathbb{R}$

$ABC$  est isocèle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in$

$ABC$  est équilatéral ssi  $\frac{c - a}{b - a}$

## Exemple 7

Soit  $A, B, C$  trois points distincts. Alors :

$A, B, C$  sont alignés ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

$ABC$  est rectangle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in i\mathbb{R}$

$ABC$  est isocèle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{U}$

$ABC$  est équilatéral ssi  $\frac{c - a}{b - a}$

## Exemple 7

Soit  $A, B, C$  trois points distincts. Alors :

$A, B, C$  sont alignés ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$

$ABC$  est rectangle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in i\mathbb{R}$

$ABC$  est isocèle en  $A$  ssi  $\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{U}$

$ABC$  est équilatéral ssi  $\frac{c - a}{b - a} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}.$

**▷ Exercice 7.**

Soit  $A, B, C, D$  les points d'affixes respectives :

$$a = -1 + i \qquad b = 4 + 3i$$

$$c = 3 - 9i \qquad d = 1 + 6i$$

Représenter ces quatre points.

Quelles propriétés ont les triangles  $ABC$  et  $ABD$  ?

# Chapitre B1. Nombres complexes

## I. Généralités

## II. Angles

## III. Équations algébriques

A. Équations du second degré

B. Racines de l'unité

C. Racines  $n$ -èmes

## IV. L'exponentielle complexe

## III. Équations algébriques

A. Équations du second degré

B. Racines de l'unité

C. Racines  $n$ -èmes

## Lemme

Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

## Lemme

Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

Démonstration. Soit  $a = re^{i\theta}$  un complexe non nul.  
Soit  $z = se^{i\varphi}$  une racine carrée de  $a$ . Alors :

$$z^2 = a \iff s^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta}$$

## Lemme

Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

Démonstration. Soit  $a = re^{i\theta}$  un complexe non nul.  
Soit  $z = se^{i\varphi}$  une racine carrée de  $a$ . Alors :

$$\begin{aligned} z^2 = a &\iff s^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta} \\ &\iff s^2 = r \quad \text{et} \quad 2\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

## Lemme

Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

Démonstration. Soit  $a = re^{i\theta}$  un complexe non nul.  
Soit  $z = se^{i\varphi}$  une racine carrée de  $a$ . Alors :

$$z^2 = a \iff s^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta}$$

$$\iff s^2 = r \quad \text{et} \quad 2\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff s = \sqrt{r} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$$

ou  $\varphi = \frac{\theta}{2} + \pi + 2k\pi$

## Lemme

Tout nombre complexe non-nul possède exactement deux racines carrées distinctes.

Démonstration. Soit  $a = re^{i\theta}$  un complexe non nul.  
Soit  $z = se^{i\varphi}$  une racine carrée de  $a$ . Alors :

$$z^2 = a \iff s^2 e^{2i\varphi} = re^{i\theta}$$

$$\iff s^2 = r \quad \text{et} \quad 2\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff s = \sqrt{r} \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\theta}{2} + 2k\pi$$

$$\text{ou} \quad \varphi = \frac{\theta}{2} + \pi + 2k\pi$$

$$\iff z = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \square$$

## Théorème

Soit  $a, b, c$  trois complexes avec  $a$  non-nul et :

$$(C) \quad az^2 + bz + c = 0$$

Soit  $\Delta = b^2 - 4ac$  le **discriminant** de  $(C)$ .

Soit  $\eta$  une racine carrée de  $\Delta$ .

Alors l'équation  $(C)$  admet pour solutions :

$$z_1 = \frac{-b + \eta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \eta}{2a}$$

Ces solutions sont égales si et seulement si  $\Delta = 0$ .

## Remarque

On ne peut pas écrire  $\sqrt{\Delta}$  si  $\Delta$  n'est pas un réel positif.

Démonstration. On utilise la forme canonique d'une expression du second degré.

Démonstration. On utilise la forme canonique d'une expression du second degré.



**Exemple 8**

Résoudre l'équation

$$z^2 - (3 - 8i)z - (13 + 11i) = 0$$

## Proposition

Soit  $z_1$  et  $z_2$  les racines de  $az^2 + bz + c = 0$ . Alors :

$$z_1 + z_2 = \quad \quad \quad \text{et} \quad \quad \quad z_1 z_2 =$$

## Proposition

Soit  $z_1$  et  $z_2$  les racines de  $az^2 + bz + c = 0$ . Alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

## Proposition

Soit  $z_1$  et  $z_2$  les racines de  $az^2 + bz + c = 0$ . Alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration.

## Proposition

Soit  $z_1$  et  $z_2$  les racines de  $az^2 + bz + c = 0$ . Alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Démonstration.



## Remarque

Il arrive que l'on puisse deviner une racine carrée du discriminant.

## Exemple 9

Donner une racine carrée des complexes suivants :

$$\Delta_1 = -4 \qquad \Delta_2 = 5 \qquad \Delta_3 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Delta_4 = 2i \qquad \Delta_5 = -i \qquad \Delta_6 = -2 - 2i\sqrt{3}$$

**▷ Exercice 8.**

Résoudre les équations suivantes :

a.  $z^2 - (1 + 2i)z - 1 + i = 0$

b.  $z^2 - iz - 1 = 0$

c.  $z^2 - (1 + i)z + 2 + 2i = 0$

d.  $z + \frac{1}{z} = i\left(\frac{3}{z} - 1\right)$

e. 
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 6i \\ z_1 z_2 = -13 \end{cases}$$

f.  $z^2 + z - i = 0$

## III. Équations algébriques

A. Équations du second degré

B. Racines de l'unité

C. Racines  $n$ -èmes

## Proposition

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'équation

$$z^n = 1$$

admet exactement  $n$  solutions distinctes.

## Proposition

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  l'équation

$$z^n = 1$$

admet exactement  $n$  solutions distinctes.

## Définition

Ces solutions sont appelées **racines  $n$ -èmes de l'unité**.  
Leur ensemble est noté  $\mathbb{U}_n$  :

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$$

Démonstration. Soit  $z = re^{i\theta}$ . Alors :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

$$\iff r^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff r = 1 \quad \text{et} \quad \theta = k\frac{2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Démonstration. Soit  $z = re^{i\theta}$ . Alors :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

$$\iff r^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff r = 1 \quad \text{et} \quad \theta = k\frac{2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Or :  $0 \leq \theta < 2\pi \iff 0 \leq k < n$

Démonstration. Soit  $z = re^{i\theta}$ . Alors :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}$$

$$\iff r^n = 1 \quad \text{et} \quad n\theta = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff r = 1 \quad \text{et} \quad \theta = k\frac{2\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Or :  $0 \leq \theta < 2\pi \iff 0 \leq k < n$

Les racines  $n$ -èmes de l'unité sont donc les  $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$   
pour  $k = 0, \dots, n-1$ . □

## Proposition

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{ik\frac{2\pi}{n}} \mid k = 0 \dots n-1 \right\}$$

## Exemple 10

Représentation graphique de  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$ ,  $\mathbb{U}_3$  et  $\mathbb{U}_4$ .

On note  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

## Exemple 10

Représentation graphique de  $\mathbb{U}_1$ ,  $\mathbb{U}_2$ ,  $\mathbb{U}_3$  et  $\mathbb{U}_4$ .

On note  $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ .

## Remarque

Les racines  $n$ -èmes de l'unité forment un polygone régulier à  $n$  côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique.

De plus, l'ensemble  $\mathbb{U}_n$  est stable par multiplication et passage à l'inverse.

▷ **Exercice 9.**

Déterminer et représenter  $\mathbb{U}_6$  et  $\mathbb{U}_8$ .

## Théorème

Somme et produit des racines de l'unité :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0$$

$$\forall n \geq 1 \quad \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = (-1)^{n-1}$$

## Théorème

Somme et produit des racines de l'unité :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0$$

$$\forall n \geq 1 \quad \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = (-1)^{n-1}$$

Démonstration.

## Théorème

Somme et produit des racines de l'unité :

$$\forall n \geq 2 \quad \sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = 0$$

$$\forall n \geq 1 \quad \prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta = (-1)^{n-1}$$

Démonstration.



## III. Équations algébriques

A. Équations du second degré

B. Racines de l'unité

C. Racines  $n$ -èmes

## Rappel : racines $n$ -èmes dans $\mathbb{R}$

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ . L'équation

$$x^n = a$$

admet

- ▶ une unique solution si  $n$  est impair
- ▶ deux solutions si  $n$  est pair et  $a$  est positif
- ▶ aucune solution si  $n$  est pair et  $a$  est négatif.

**Rappel : racines  $n$ -èmes dans  $\mathbb{R}_+^*$** 

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . L'équation

$$x^n = a$$

admet une et une seule solution positive, que l'on appelle racine  $n$ -ème de  $a$  et que l'on note  $\sqrt[n]{a}$ .

## Proposition - Racines $n$ -èmes dans $\mathbb{C}$

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $a$  admet exactement  $n$  racines  $n$ -èmes.

## Proposition - Racines $n$ -èmes dans $\mathbb{C}$

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $a$  admet exactement  $n$  racines  $n$ -èmes.

## Méthode

Pour obtenir les racines  $n$ -èmes de  $a \in \mathbb{C}^*$  :

(i) On écrit  $a = re^{i\theta}$ .

Alors  $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$  est **une** racine  $n$ -ème de  $a$ .

(ii) **Les** racines  $n$ -èmes de  $a$  sont les  $b\zeta$  où  $\zeta \in \mathbb{U}_n$ .

## Proposition - Racines $n$ -èmes dans $\mathbb{C}$

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $a$  admet exactement  $n$  racines  $n$ -èmes.

## Méthode

Pour obtenir les racines  $n$ -èmes de  $a \in \mathbb{C}^*$  :

(i) On écrit  $a = re^{i\theta}$ .

Alors  $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$  est **une** racine  $n$ -ème de  $a$ .

(ii) **Les** racines  $n$ -èmes de  $a$  sont les  $b\zeta$  où  $\zeta \in \mathbb{U}_n$ .

Démonstration.

## Proposition - Racines $n$ -èmes dans $\mathbb{C}$

Soit  $a \in \mathbb{C}^*$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Alors  $a$  admet exactement  $n$  racines  $n$ -èmes.

## Méthode

Pour obtenir les racines  $n$ -èmes de  $a \in \mathbb{C}^*$  :

(i) On écrit  $a = re^{i\theta}$ .

Alors  $b = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$  est **une** racine  $n$ -ème de  $a$ .

(ii) **Les** racines  $n$ -èmes de  $a$  sont les  $b\zeta$  où  $\zeta \in \mathbb{U}_n$ .

Démonstration.



## Exemple 11

Résoudre l'équation :  $z^3 = 8i$

## Exemple 11

Résoudre l'équation :  $z^3 = 8i$

## Remarque

Les solutions forment encore un polygone régulier à  $n$  côtés, mais il n'est pas en général inscrit dans le cercle trigonométrique.

## Exemple 11

Résoudre l'équation :  $z^3 = 8i$

## Remarque

Les solutions forment encore un polygone régulier à  $n$  côtés, mais il n'est pas en général inscrit dans le cercle trigonométrique.

## ▷ Exercice 10.

Résoudre l'équation :  $32z^4 = \sqrt{3}i - 1$

# Chapitre B1. Nombres complexes

I. Généralités

II. Angles

III. Équations algébriques

**IV. L'exponentielle complexe**

## Définition

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . On note :

$$e^z = e^x e^{iy}$$

et on appelle **exponentielle** de  $z$  ce complexe.

## Définition

Soit  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . On note :

$$e^z = e^x e^{iy}$$

et on appelle **exponentielle** de  $z$  ce complexe.

## Remarque

Ceci définit une fonction  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

$$(iii) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

$$(iii) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$(iv) \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \quad |e^z| = e^x \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = y$$

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

$$(iii) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

$$(iv) \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \quad |e^z| = e^x \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = y$$

Ainsi  $e^x e^{iy}$  est la forme exponentielle de  $e^z$ .

## Propositions

$$(i) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad e^z \neq 0$$

$$(ii) \quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$

$$(iii) \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \overline{e^z} = e^{\overline{z}}$$

$$(iv) \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C} \quad |e^z| = e^x \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = y$$

Ainsi  $e^x e^{iy}$  est la forme exponentielle de  $e^z$ .

Démonstration. Laisée en exercice.



## Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.

## Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.

**ou**

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists a \in \mathbb{C} \quad e^a = z$$

## Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.

**ou**

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists a \in \mathbb{C} \quad e^a = z$$

**ou**

L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  est surjective.

## Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.

Démonstration. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ .

Forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$

## Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.

Démonstration. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ .

Forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$

$r > 0$  donc  $a = \ln r + i\theta$  est bien défini.

## Proposition

Tout complexe non-nul possède un antécédent par l'application exponentielle.

Démonstration. Soit  $z \in \mathbb{C}^*$ .

Forme exponentielle :  $z = re^{i\theta}$

$r > 0$  donc  $a = \ln r + i\theta$  est bien défini.

$e^a = z$  donc  $z$  admet bien un antécédent. □

## Proposition

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ . Alors :

$$e^z = e^{z'} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad z' = z + 2ik\pi$$

## Proposition

Soit  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ . Alors :

$$e^z = e^{z'} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad z' = z + 2ik\pi$$

## Remarque

Ceci montre que l'on n'a pas unicité de l'antécédent.

**ou**

L'application  $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  n'est pas injective.

**ou**

L'égalité  $e^z = e^{z'}$  n'implique pas  $z = z'$ .

**▷ Exercice 11.**

Résoudre les équations

a.  $e^z = \sqrt{3} + i$

b.  $e^{iz\pi} = 1 - i$

c.  $e^{1-z} + e^z = \sqrt{2}e$

Prochain chapitre

Chapitre B2  
Ensembles