Mathématiques

# Chapitre A13
# Fonctions de deux variables

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

# I. Topologie du plan

## Définition

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad ||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Définition

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad ||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Remarque

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$|x| \leqslant ||(x, y)|| \qquad\qquad |y| \leqslant ||(x, y)||$$

## Définition

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne :

$$\forall u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad ||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

## Remarque

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$|x| \leqslant ||(x, y)|| \qquad |y| \leqslant ||(x, y)||$$

## Définition

$u,\ v \in \mathbb{R}^2$

Distance de $u$ à $v$ : $\qquad d(u, v) = ||u - v||$

## Définition

$a \in \mathbb{R}^2 \quad r > 0$

Boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$B(a, r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u - a|| < r \right\}$$

## Définition

$a \in \mathbb{R}^2 \quad r > 0$

Boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$B(a, r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u - a|| < r \right\}$$

Boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$\overline{B}(a, r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u - a|| \leqslant r \right\}$$

## Définition

$a \in \mathbb{R}^2 \quad r > 0$

Boule ouverte de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$B(a,r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u-a|| < r \right\}$$

Boule fermée de centre $a$ et de rayon $r$ :

$$\overline{B}(a,r) = \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ||u-a|| \leqslant r \right\}$$

## Exemple

Une partie de $\mathbb{R}^2$ est bornée ssi elle est incluse dans une boule.

## Définition

Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte,

ou est un ouvert, si :

$$\forall a \in U \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B(a,\varepsilon) \subseteq U$$

## Définition

Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte,

ou est un ouvert, si :

$$\forall a \in U \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B(a,\varepsilon) \subseteq U$$

$U$ est voisinage de tous ses points.

## Définition

Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si :

$$\forall a \in U \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

## Exemples

*(i)* $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts.

## Définition

Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si :

$$\forall a \in U \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

## Exemples

*(i)* $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts.

*(ii)* $A = [0, 1] \times [0, 1]$ n'est pas ouverte.

## Définition

Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si :

$$\forall a \in U \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

## Exemples

*(i)* $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts.

*(ii)* $A = [0,1] \times [0,1]$ n'est pas ouverte.

*(iii)* Toute boule ouverte est une partie ouverte.

## Définition

Une partie $U$ de $\mathbb{R}^2$ est ouverte si :

$$\forall a \in U \qquad \exists \varepsilon > 0 \qquad B(a, \varepsilon) \subseteq U$$

## Exemples

*(i)* $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des ouverts.

*(ii)* $A = [0, 1] \times [0, 1]$ n'est pas ouverte.

*(iii)* Toute boule ouverte est une partie ouverte.

*(iv)* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \qquad \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \qquad \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

sont ouvertes.

## Propositions

*(i)* L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

*(ii)* L'union d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert.

*(iii)* Le produit de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

## Propositions

*(i)* L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Démonstration. Soit $U_1, \ldots, U_n$ des ouverts.

Soit $\quad a \in U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$

Alors : $\quad \forall i = 1, \ldots, n \quad \exists \varepsilon_i > 0 \quad B(a, \varepsilon_i) \subseteq U_i$

Soit $\quad \varepsilon = \mathrm{Min}\,\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$

Alors : $\quad \varepsilon > 0 \quad$ et $\quad B(a, \varepsilon) \subseteq U \qquad \square$

## Propositions

*(ii)* L'union d'un nombre quelconque d'ouverts est un ouvert.

Démonstration. Soit $(U_i)_{i \in I}$ des ouverts.

Soit $\quad a \in U = \bigcup_{i \in I} U_i$

Alors : $\quad \exists j \in I \quad a \in U_j$

Donc : $\quad \exists \varepsilon > 0 \quad B(a, \varepsilon) \subseteq U_j \subseteq U$ $\square$

## Propositions

*(iii)* Le produit de deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Soit $U = ]a, b[ \times ]c, d[$.

Soit $u = (x, y) \in U$. On pose :

$$\varepsilon = \mathrm{Min}\,\{x - a, b - x, y - c, d - y\}$$

Alors : $B(u, \varepsilon) \subseteq U$ $\square$

## Remarque

Une partie $F$ de $\mathbb{R}^2$ est fermée, ou est un fermé, si son complémentaire est ouvert.

## Remarque

Une partie $F$ de $\mathbb{R}^2$ est fermée, ou est un fermé, si son complémentaire est ouvert.

Une partie $F$ est fermée si et seulement si :
Pour toute suite $(u_n) \subseteq F$, si $(u_n)$ converge alors $\lim u_n \in F$.

## Définition

Une fonction de deux variables est une fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

où $A$ une partie de $\mathbb{R}^2$.

## Définition

Une fonction de deux variables est une fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

où $A$ une partie de $\mathbb{R}^2$.

On note aussi $f(u) = f(x,y)$, avec $u = (x,y)$.

## Définition

Une fonction de deux variables est une fonction :

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

## Rappel

Le graphe de $f$ est l'ensemble :

$$\Gamma = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}$$

Il est inclus dans $A \times B$.

## Définition

Une fonction de deux variables est une fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

## Remarque

Le graphe de $f$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$.

On dit que ce graphe est une surface ou une nappe.

C'est l'ensemble d'équation $z = f(x,y)$ :

$$\Gamma = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = f(x,y) \right\}$$

## Définition

Une fonction de deux variables est une fonction :

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

## Exemples

$(x,y) \mapsto x^2 + y^2$

$(x,y) \mapsto x^2 - y^2$

$(x,y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$(x,y) \mapsto \sin x$

$(x,y) \mapsto \sin x + \sin y$

$(x,y) \mapsto e^x \cos y$

## Remarque

L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}$ est

- un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- un anneau.

## Remarque

L'ensemble $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}$ est

- un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- un anneau.

L'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont définies de la manière habituelle.

## Remarque

L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}$ est

- un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- un anneau.

L'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont définies de la manière habituelle.

$\forall (x, y) \in A$ :

$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y)$$

## Remarque

L'ensemble $\mathscr{F}(A, \mathbb{R})$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}$ est

- un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- un anneau.

L'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont définies de la manière habituelle.

$\forall (x, y) \in A$ :

$$(fg)(x, y) = f(x, y) \times g(x, y)$$

## Remarque

L'ensemble $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ des fonctions de $A$ dans $\mathbb{R}$ est

- un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$,
- un anneau.

L'addition, la multiplication par un scalaire et la multiplication sont définies de la manière habituelle.

$\forall (x,y) \in A$ :

$$(\lambda f)(x,y) = \lambda\, f(x,y)$$

## Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in A$.

Les applications partielles de $f$ en $a$ sont :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 : A_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, a_2) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} \varphi_2 : A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(a_1, y) \end{array}$$

## Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in A$.

Les applications partielles de $f$ en $a$ sont :

$$\begin{aligned} \varphi_1 : A_1 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x, a_2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \varphi_2 : A_2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f(a_1, y) \end{aligned}$$

où $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2) \in A\}$
et $A_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, t) \in A\}$.

## Définition

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in A$.

Les applications partielles de $f$ en $a$ sont :

$$\varphi_1 : \begin{array}{rcl} A_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x, a_2) \end{array} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{rcl} A_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & f(a_1, y) \end{array}$$

où $A_1 = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, a_2) \in A\}$
et $A_2 = \{t \in \mathbb{R} \mid (a_1, t) \in A\}$.

## Remarque

Les applications partielles sont des fonctions d'une seule variable.

## Définition

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\quad a \in U$, $\quad f : U \to \mathbb{R}$.

Alors $f$ est continue en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U$$

$$||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

## Définition

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\quad a \in U$, $\quad f : U \to \mathbb{R}$.

Alors $f$ est continue en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U$$
$$\|u - a\| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

$f$ est continue si elle est continue en tout point.

## Définition

Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\quad a \in U, \quad f : U \to \mathbb{R}$.

Alors $f$ est continue en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U$$
$$||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(u) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

$f$ est continue si elle est continue en tout point.

On note $\mathscr{C}(U, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $U$ dans $\mathbb{R}$.

## Remarque

Soit $a \in \overline{U}$ et $\ell$ un réel.

Alors $f$ admet $\ell$ pour limite en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U$$
$$||u - a|| \leqslant \eta \implies |f(u) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si $a$ appartient à $U$, alors $f$ est continue en $a$ ssi $f$ admet une limite finie en $a$.

## Exemple

On définit les projections canoniques :

$$p_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Ces fonctions sont continues.

## Exemple

On définit les projections canoniques :

$$p_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array} \qquad \text{et} \qquad p_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

Ces fonctions sont continues.

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.
Alors pour tout $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ :

$$\begin{aligned} |p_1(u) - p_1(a)| &= |x - a_1| \\ &\leqslant ||(x - a_1, y - a_2)|| = ||u - a|| \end{aligned}$$

## Propositions

*(i)* L'ensemble $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un ev et un anneau.

*(ii)* Si $f : U \to I$ est continue avec $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $\varphi \circ f$ est continue.

*(iii)* Si $f$, $g : U \to \mathbb{R}$ sont continues et $g$ ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.

## Propositions

*(i)* L'ensemble $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un ev et un anneau.

*(ii)* Si $f : U \to I$ est continue avec $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $\varphi \circ f$ est continue.

*(iii)* Si $f, g : U \to \mathbb{R}$ sont continues et $g$ ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.

## Remarques

*(i)* Ainsi la somme et le produit de fonctions continues sont continues.

## Propositions

*(i)* L'ensemble $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un ev et un anneau.

*(ii)* Si $f : U \to I$ est continue avec $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $\varphi \circ f$ est continue.

*(iii)* Si $f$, $g : U \to \mathbb{R}$ sont continues et $g$ ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.

## Remarques

*(ii)* Comme les projections canoniques $p_1$ et $p_2$ sont continues, alors toute fonction polynomiale et toute fraction rationnelle sont continues.

## Propositions

*(i)* L'ensemble $\mathscr{C}^0(U, \mathbb{R})$ est un ev et un anneau.

*(ii)* Si $f : U \to I$ est continue avec $I \subseteq \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ est continue alors $\varphi \circ f$ est continue.

*(iii)* Si $f$, $g : U \to \mathbb{R}$ sont continues et $g$ ne s'annule pas alors $\frac{f}{g}$ est continue.

## Remarques

*(iii)* La fonction $(x, y) \mapsto e^x \cos y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par composition et produit.

## Exemple 1

Soit $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$

## Exemple 1

Soit $f$ : $$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

## Remarque

La continuité des applications partielles de $f$ en $a$ n'implique pas la continuité de $f$ en $a$.

## Définition

Soit $E$ un ensemble, et $f : E \to \mathbb{R}^2$.

Alors les fonctions $f_1 = p_1 \circ f$ et $f_2 = p_2 \circ f$ sont appelées les composantes de $f$.

$$\forall t \in E \qquad f(t) = (f_1(t), f_2(t))$$

## Exemple

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est représentée par une courbe de l'espace.

## Définitions

*(i)* Soit $\quad I \in \mathbb{R} \quad a \in I \quad f : I \to \mathbb{R}^2$

$f$ est continue en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall t \in I$$

$$|t - a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad ||f(t) - f(a)|| \leqslant \varepsilon$$

## Définitions

*(ii)* $U$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ $\quad a \in U \quad f : U \to \mathbb{R}^2$

$f$ est continue en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U$$

$$||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad ||f(u) - f(a)|| \leqslant \varepsilon$$

## Définitions

*(ii)* $U$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ $\quad a \in U \quad f : U \to \mathbb{R}^2$

$f$ est continue en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall u \in U$$
$$||u - a|| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad ||f(u) - f(a)|| \leqslant \varepsilon$$

L'implication s'écrit :

$$f\big(\overline{B}(a, \eta)\big) \subseteq \overline{B}(f(a), \varepsilon)$$

**Proposition**

La composée de fonctions continues

- d'une ou deux variables,
- à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$,

est continue sur son ensemble de définition.

## Proposition

Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est continue ssi ses composantes sont continues.

## Proposition

Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est continue ssi ses composantes sont continues.

Démonstration.

Les projections canoniques sont continues.

Si $f$ est continue alors $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues.

## Proposition

Une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est continue ssi ses composantes sont continues.

Démonstration.

Les projections canoniques sont continues.

Si $f$ est continue alors $p_1 \circ f$ et $p_2 \circ f$ sont continues.

Réciproquement comme $||(x, y)|| \leqslant |x| + |y|$ alors :

$$||f(u) - f(a)|| \leqslant |f_1(u) - f_1(a)| + |f_2(u) - f_2(a)|$$

$\square$

Dans toute cette partie $U$ désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

## II. Calcul différentiel

## Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$.

$f$ admet une dérivée partielle selon $x$ en $a$ si :

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2)$$

est dérivable en $a_1$.

On note alors $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ la dérivée de cette application en $a_1$, et on l'appelle dérivée partielle selon $x$ de $f$ en $a$.

## Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in U$.

$f$ admet une dérivée partielle selon $y$ en $a$ si :

$$\varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

est dérivable en $a_2$.

On note alors $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ la dérivée de cette application en $a_2$, et on l'appelle dérivée partielle selon $y$ de $f$ en $a$.

## Remarque

Les dérivées partielles sont donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

## Remarque

Les dérivées partielles sont donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}$$

Les notations $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont ambiguës car $x$ et $y$ sont des variables muettes.

## Exemple

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{x+y^2}{x^2+1} \end{array}$

## Exemple 1 (suite)

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

## Exemple 1 (suite)

Soit $f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$

## Remarque

L'existence des dérivées partielles n'implique pas la continuité.

## II. Calcul différentiel

## Définition

$f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en $a \in U$ si :

- elle admet des dérivées partielles en $a$,
- les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $a$.

## Définition

$f : U \to \mathbb{R}$ est **de classe $\mathscr{C}^1$** en $a \in U$ si :

- elle admet des dérivées partielles en $a$,
- les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $a$.

$f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout point de $U$.

## Définition

$f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ en $a \in U$ si :

- elle admet des dérivées partielles en $a$,
- les applications $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en $a$.

$f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $U$ si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ en tout point de $U$.

$\mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$ : ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ de $U$ dans $\mathbb{R}$.

## Proposition

$\mathscr{C}^1(U)$ est un espace vectoriel réel et un anneau.

Le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition.

### Théorème (développement limité à l'ordre 1)

$a = (a_1, a_2) \in U \qquad f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R})$

Alors il existe $\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que :

$\forall u = (x, y) \in U$

$$f(u) = f(a) + (x - a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + ||u - a||\varepsilon(u)$$

avec $\quad \lim\limits_{u \to a} \varepsilon(u) = 0$

## Théorème (développement limité à l'ordre 1)

$$f(u) = f(a) + (x - a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + ||u - a||\varepsilon(u)$$

## Corollaire

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $f$ est continue.

Démonstration. Par inégalité triangulaire :

$$\forall u = (x, y) \in U$$

$$|f(u) - f(a)| \leqslant |x - a_1| \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + |y - a_2| \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| + ||u - a|| \, |\varepsilon(u)|$$

$$\leqslant ||u - a|| \left( \left|\frac{\partial f}{\partial x}(a)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right| + |\varepsilon(u)| \right)$$

Par théorème d'encadrement : $\lim_{u \to a} f(u) = f(a)$. □

## Théorème (développement limité à l'ordre 1)

$$f(u) = f(a) + (x - a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + ||u - a||\varepsilon(u)$$

## Remarques

*(i)* Le développement limité ci-dessus peut s'écrire :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(||(h, k)||)$$

## Remarques

*(i)* Le développement limité ci-dessus peut s'écrire :

$$f(x_0+h, y_0+k) \underset{(0)}{=} f(x_0, y_0) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(||(h,k)||)$$

*(ii)* Le plan d'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

est le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ en $a$.

## II. Calcul différentiel

## Définition

$f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R}) \qquad a \in U$

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

## Définition

$f \in \mathscr{C}^1(U, \mathbb{R}) \qquad a \in U$

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

Fonction gradient de $f$ :

$$\begin{aligned} \nabla f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\longmapsto \nabla f(a) \end{aligned}$$

## Définition

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

## Remarques

*(i)* Le gradient de $f$ en $a$ est un vecteur du plan.

## Définition

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

Fonction gradient de $f$ :

$$\begin{aligned} \nabla f : U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ a &\longmapsto \nabla f(a) \end{aligned}$$

## Remarques

*(i)* Le gradient de $f$ en $a$ est un vecteur du plan.
Le gradient de $f$ est un champ de vecteur.

## Définition

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

## Remarques

*(ii)* Le développement limité de $f$ peut être écrit :

$$f(u) = f(a) + (\nabla f(a) \,|\, u - a) + ||u - a||\varepsilon(u)$$

ou

$$f(a + v) = f(a) + (\nabla f(a) \,|\, v) + ||v||\varepsilon'(v)$$

## Définition

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

## Exemple 2

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2. \end{array}$

## Définition

Gradient de $f$ en $a$ :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)$$

## Exemple 2

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + y^2. \end{array}$

Alors $\nabla f(a) = 2a$.

## II. Calcul différentiel

## Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ avec $f = (f_1, f_2)$.

Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si $f_1$ et $f_2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

## Définition

Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ avec $f = (f_1, f_2)$.

Alors $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ si $f_1$ et $f_2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

## Remarque

Les fonctions de deux variables et leurs dérivées partielles sont notées en colonnes :

$$f : t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad f : (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

## Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2}{1+y^2}\right)$$

Les composantes de $f$ sont :

$$f_1 : (x, y) \mapsto \frac{x}{y} \quad \text{et} \quad f_2 : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{1+y^2}$$

Elles admettent des dérivées partielles en tout point de $U$.

## Exemple 3

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2}{1+y^2}\right) \end{array}$

## Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2}{1+y^2}\right)$$

Comme $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$

alors $$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ \frac{2x}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

et $$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{2x^2 y}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

## Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2}{1+y^2}\right)$$

Le gradient de $f$ est :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

## Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2}{1+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} \\ \frac{2x}{1+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{x}{y^2} \\ -\frac{2x^2 y}{(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Les quatre dérivées partielles sont continues donc $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

## Définition

Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$. La différentielle de $f$ en $a$ est l'application linéaire de matrice :

- Si $f : t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$

$$Df_t = (f'(t))$$

## Définition

Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$. La différentielle de $f$ en $a$ est l'application linéaire de matrice :

- Si $f : t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$

$$Df_t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

## Définition

Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$. La différentielle de $f$ en $a$ est l'application linéaire de matrice :

- Si $f : (x, y) \mapsto f((x, y)) \in \mathbb{R}$

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

## Définition

Soit $f$ de classe $\mathscr{C}^1$. La différentielle de $f$ en $a$ est l'application linéaire de matrice :

- Si $f : (x,y) \mapsto (f_1(x,y), f_2(x,y)) \in \mathbb{R}^2$

$$Df_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

## Remarque

Si $f \in \mathscr{C}^1(U, V)$ alors $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^p$ alors la différentielle de $f$ est l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f : U &\longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \\ u &\longmapsto \mathrm{d}f_u \end{aligned}$$

## II. Calcul différentiel

**Lemme**

Soit $g : U \to V$ et $f : V \to \mathbb{R}^q$ de classe $\mathscr{C}^1$

Avec $U \subseteq \mathbb{R}^n$ et $V \subseteq \mathbb{R}^p$.

Alors $f \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et pour tout $u \in U$ :

$$\mathrm{d}(f \circ g)_u = \mathrm{d}f_{g(u)}\mathrm{d}g_u$$

## Théorème (Première règle de la chaîne)

$I \subseteq \mathbb{R} \quad U \subseteq \mathbb{R}^2$

$(x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$

Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

## Théorème (Première règle de la chaîne)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)$$

Démonstration. Posons $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Alors $\varphi : I \to U$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

On calcule la différentielle de $f \circ \varphi$.

## Théorème (Première règle de la chaîne)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x(t),y(t))} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration</u>. Posons $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Alors $\varphi : I \to U$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

On calcule la différentielle de $f \circ \varphi$.

**Théorème (Première règle de la chaîne)**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t),y(t))) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x(t),y(t))} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

<u>Démonstration</u>. Posons $\varphi(t) = (x(t), y(t))$.

Alors $\varphi : I \to U$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

On calcule la différentielle de $f \circ \varphi$.

$\square$

## ▷ Exercice 1.

Soit $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^y. \end{array}$

a. Justifier que $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

b. Justifier que $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner ses dérivées partielles.

c. En composant avec la fonction $x \mapsto (x,x)$ calculer la dérivée de $x \mapsto x^x$.

d. Calculer de même la dérivée de $x \mapsto x^{x^x}$.

## Théorème (Seconde règle de la chaîne)

$U$, $V$ ouverts de $\mathbb{R}^2$

$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : V \to U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$

Alors $f \circ \varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et :

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

## Théorème (Seconde règle de la chaîne)

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$$

## Remarque

D'après le lemme, en notant $u=(x,y)$ :

$$\mathrm{d}(f\circ\varphi)_u = \mathrm{d}f_{\varphi(u)}\mathrm{d}\varphi_u$$

## Remarque

D'après le lemme, en notant $u = (x, y)$ :

$$\mathrm{d}(f \circ \varphi)_u = \mathrm{d}f_{\varphi(u)} \mathrm{d}\varphi_u$$

On en déduit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x} & \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y} \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}_{\varphi(u)} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{pmatrix}_u$$

## Exemple 4

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \dfrac{y}{x} \end{array}$

et $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}$

Les fonctions $f$ et $\varphi$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

On calcule $\dfrac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial \theta}$ en $(r, \theta)$.

## ▷ Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
On suppose que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$ :

$$\det\left(u, \nabla f(u)\right) = 0$$

a. Interpréter géométriquement cette égalité.

b. Démontrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

(Composer avec $(r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$.)

## II. Calcul différentiel

## Définition

$f : U \to \mathbb{R} \qquad a \in U \qquad v \in \mathbb{R}^2$

$f$ admet une dérivée selon le vecteur $v$ en $a$ si :

$$f_v : t \mapsto f(a + tv)$$

est dérivable en 0. On note :

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

Ce réel est la dérivée de $f$ en $a$ selon le vecteur $v$.

## Définition

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

## Remarques

*(i)* Il s'agit donc d'une dérivée le long de la droite passant par $a$ dirigée par $v$.

## Définition

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

## Remarques

*(i)* Il s'agit donc d'une dérivée le long de la droite passant par $a$ dirigée par $v$.

*(ii)* Les dérivées partielles de $f$ sont les dérivées selon les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

## Définition

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

## Proposition

Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $f$ admet des dérivées selon tout vecteur non-nul $v$ en $a$.
En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

## Définition

$$D_v f(a) = f_v'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}$$

## Proposition

Si $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors $f$ admet des dérivées selon tout vecteur non-nul $v$ en $a$.
En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

En d'autres termes $D_v f(a) = (\nabla f(a) \,|\, v)$.

Démonstration. Soit $\varphi : t \mapsto a + tv$.

Alors $\varphi(t) = (a_1 + \alpha t, a_2 + \beta t)$, donc $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\varphi'(t) = (\alpha, \beta) = v$.

La fonction $f \circ \varphi$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$, et :

$$D_v f(a) = f'_v(0) = (f \circ \varphi)'(0)$$

Démonstration. Soit $\varphi : t \mapsto a + tv$.

Alors $\varphi(t) = (a_1 + \alpha t, a_2 + \beta t)$, donc $\varphi$ est de classe $\mathscr{C}^1$, de dérivée $\varphi'(t) = (\alpha, \beta) = v$.

La fonction $f \circ \varphi$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$, et :

$$\begin{aligned} D_v f(a) &= f_v'(0) = (f \circ \varphi)'(0) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a) \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(a)\right) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\ &= \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{aligned}$$

□

## Proposition

En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

## Remarques

*(i)* Pour tout point $a$ de $U$ l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_a : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto D_v f(a) \end{aligned}$$

est la différentielle de $f$ au point $a$, elle est linéaire de matrice $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) & \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$.

## Proposition

En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

## Remarques

*(ii)* D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \qquad (\nabla f(a) \mid v) \leqslant ||\nabla f(a)||\, ||v||$$

## Proposition

En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

## Remarques

*(ii)* D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \qquad (\nabla f(a) \,|\, v) \leqslant ||\nabla f(a)|| \, ||v||$$

Pour tout $v$ unitaire : $\quad D_v f(a) \leqslant ||\nabla f(a)||$

## Proposition

En notant $v = (\alpha, \beta)$ cette dérivée est :

$$D_v f(a) = \alpha \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

## Remarques

*(ii)* D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \qquad (\nabla f(a) \,|\, v) \leqslant ||\nabla f(a)|| \, ||v||$$

Le maximum de $v \mapsto D_v f(a)$ est atteint si $v$ est colinéaire à $\nabla f(a)$.

## II. Calcul différentiel

## Théorème

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $\qquad a \in U$

Si $f$ présente un extremum local en $a$ alors ses dérivées partielles en $a$ sont nulles.

## Théorème

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $\quad a \in U$

Si $f$ présente un extremum local en $a$ alors ses dérivées partielles en $a$ sont nulles.

## Définition

Un point critique de $f$ est un point $a$ tel que :

$$\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^2} \quad \textit{i.e.,} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

## Théorème

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $\qquad a \in U$

Si $f$ présente un extremum local en $a$ alors ses dérivées partielles en $a$ sont nulles.

Démonstration. Si $f$ présente un maximum local en $a$, alors il existe une boule ouverte $B(a,r)$ incluse dans $U$ telle que :

$$\forall (x,y) \in B(a,r), \quad f(x,y) \leqslant f(a)$$

## Théorème

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $\qquad a \in U$

Si $f$ présente un extremum local en $a$ alors ses dérivées partielles en $a$ sont nulles.

Démonstration.

$$\forall (x,y) \in B(a,r), \quad f(x,y) \leqslant f(a)$$

Les applications partielles en $a = (a_1, a_2)$

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

présentent donc un maximum en $a_1$ et $a_2$.

## Théorème

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $\qquad a \in U$

Si $f$ présente un extremum local en $a$ alors ses dérivées partielles en $a$ sont nulles.

Démonstration.

Les applications partielles en $a = (a_1, a_2)$

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

présentent donc un maximum en $a_1$ et $a_2$.

Ainsi $\quad \varphi_1'(a_1) = \varphi_2'(a_2) = 0,$

## Théorème

$f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ $\qquad a \in U$

Si $f$ présente un extremum local en $a$ alors ses dérivées partielles en $a$ sont nulles.

<u>Démonstration</u>.

Les applications partielles en $a = (a_1, a_2)$

$$\varphi_1 : x \mapsto f(x, a_2) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : y \mapsto f(a_1, y)$$

présentent donc un maximum en $a_1$ et $a_2$.

Ainsi $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0.$ $\square$

## Remarques

*(i)* Comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

- Si $\quad \frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0,$

  alors les applications partielles ne présentent pas forcément un extremum.

  Exemple : $\quad (x, y) \mapsto x^3 + y^3$

## Remarques

*(i)* Comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

- Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$,

  et si les applications partielles présentent un extremum toutes les deux,

  alors $f$ ne présente pas forcément un extremum.

  Exemple : $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

  On peut avoir un point-selle ou point-col.

## Remarques

*(i)* Comme pour les fonctions d'une seule variable, la réciproque est fausse.

- Si les applications partielles de $f$ présentent toutes deux un extremum de même nature, alors $f$ ne présente pas obligatoirement un extremum.
  Exemple : $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 3xy$

## Remarques

*(ii)* Dans la pratique on cherche les points critiques.

On détermine si chacun d'entre eux est un maximum, un minimum, ou un point-selle.

## Remarques

*(ii)* Dans la pratique on cherche les points critiques.

On détermine si chacun d'entre eux est un maximum, un minimum, ou un point-selle.

## Exemple 5

Déterminer les extrema de :

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & 3x^2 + y^2 - 2x^3 \end{array}$$

## ▷ Exercice 3.

Déterminer les extrema des fonctions :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2 + xy + 3x + y \end{array}$$

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{1+xy}{1+x^2+y^2} \end{array}$$

Prochain chapitre

## Chapitre B14

# Fractions rationnelles