Mathématiques

Chapitre A12
Séries

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Généralités

I. Généralités

II. Séries à termes positifs

Définition

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

La série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Définition

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$$

La série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
Sinon elle diverge.

Exemple 1

(i) $u_n = n$

Exemple 1

(i) $u_n = n$

(ii) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exemple 1

(i) $u_n = n$

(ii) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n}$

Notation

$\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$: série de terme général u_n

Définitions

Sommes partielles $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définitions

Sommes partielles $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la série converge

Somme $$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Définitions

Sommes partielles $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Si la série converge $\left\{ \begin{array}{ll} \text{Somme} & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} S_n \\ & \displaystyle\phantom{\sum_{k=0}^{+\infty} u_k} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \\ \text{Reste} & \displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \end{array} \right.$

Notation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Remarque

En cas de convergence :

$$\begin{aligned} S_n + R_n &= \ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \\ S_n &\longrightarrow \ell \\ R_n &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

▷ Exercice 1.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose : $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

a. Calculer les 4 premières sommes partielles de la série de terme général u_n.

b. Établir une conjecture pour exprimer la valeur des sommes partielles en fonction de n, et démontrer cette conjecture.

c. Démontrer que la série de terme général u_n est convergente et donner sa somme.

d. Calculer le reste R_n de cette série pour tout n.

Proposition (Linéarité)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes alors $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda u_k + v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Remarque

Ainsi

$$\mathscr{S}_c = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum u_n \text{ converge} \right\}$$

est un espace vectoriel et l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{S}_c & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \end{array}$$

est linéaire.

Démonstration.

Soit $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + v_k) = \lambda S_n + T_n$$

La propriété est conséquence de la linéarité de la limite des suites. $\square$

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \longrightarrow 0$$

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \longrightarrow 0$$

<u>Démonstration</u>.

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \longrightarrow 0$$

Démonstration.

$\square$

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \qquad \Longrightarrow \qquad (u_n) \longrightarrow 0$$

Remarque

La réciproque est fausse.

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \longrightarrow 0$$

Remarque

La réciproque est fausse.

Contre-exemple

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0 \quad \text{mais} \quad \sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \longrightarrow 0$$

Corollaire

$$(u_n) \not\longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}$$

Proposition

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad (u_n) \longrightarrow 0$$

Corollaire

$$(u_n) \not\longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}$$

Remarque

Si $u_n \not\longrightarrow 0$ alors on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple

La série $\sum n$ diverge grossièrement.

Le problème

- Si $u_n \longrightarrow 0$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Le problème

- Si $u_n \longrightarrow 0$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
- Si oui, quelle est sa somme ?

Proposition

On ne modifie pas la convergence d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes.

Proposition

On ne modifie pas la convergence d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes.

En particulier pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k \geqslant 0} u_k \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k \geqslant m} u_k \text{ converge}$$

Proposition

On ne modifie pas la convergence d'une série en lui enlevant un nombre fini de termes.

En particulier pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k \geqslant 0} u_k \text{ converge} \iff \sum_{k \geqslant m} u_k \text{ converge}$$

Remarque

On ne change pas non plus la nature de la série en modifiant un nombre fini de termes.
Par contre dans les deux cas la somme est modifiée.

Remarque

On peut donc écrire que la série $\sum u_k$ converge sans avoir précisé à quelle indice elle débute.

Exemple 2

$$\sum_{k\geqslant 2}\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Définition

Série géométrique : $\sum \lambda q^n$

Théorème

$$\sum q^n \text{ converge} \iff |q| < 1$$

Théorème

$$\sum q^n \text{ converge} \quad \iff \quad |q| < 1$$

Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Théorème

$$\sum q^n \text{ converge} \quad \iff \quad |q| < 1$$

Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

Théorème

$$\sum q^n \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad |q| < 1$$

Dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

$\square$

Remarque

Si $|q| < 1$ alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k =$$

Remarque

Si $|q| < 1$ alors :

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=m}^{+\infty} q^k = \frac{q^m}{1-q}$$

Exemple 3

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{3^n - 5}{4^n}$$

▷ Exercice 2.

Démontrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

$$\sum_{n\geqslant 3} \frac{8}{3^{n-1}} \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{5^n}{6^n}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-n} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{3^n - 2^{n+1}}{4^n}$$

▷ Exercice 3.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et de calculer sa somme dans ce cas.

▷ Exercice 3.

Le but de cet exercice est de démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$, et de calculer sa somme dans ce cas.

a. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 0} nq^n$ diverge si $|q| \geqslant 1$.

▷ Exercice 3.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

b. Exprimer $S_n(x)$ sans signe somme.

c. Démontrer que S_n est dérivable et donner deux expressions de sa dérivée.

d. En déduire la limite de $xS_n'(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

e. Conclure.

Séries à termes positifs

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \geqslant 0$$

Remarque

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n - S_{n-1} =$$

$$R_n - R_{n-1} =$$

Remarque

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

$$R_n - R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$$

Remarque

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

$$R_n - R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = -u_n$$

Remarque

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n - S_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_n$$

$$R_n - R_{n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = -u_n$$

Si $(u_n) \geqslant 0$ alors (S_n) est croissante
(R_n) est décroissante.

II. Séries à termes positifs

Proposition

$(u_n) \geqslant 0$:

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad (S_n) \text{ est majorée}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n = \operatorname{Sup} S_n$$

Proposition

$(u_n) \geqslant 0$:

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad (S_n) \text{ est majorée}$$

Dans ce cas :

$$\sum_{n \geqslant 0} u_n = \operatorname{Sup} S_n$$

Démonstration.

Si les u_n sont positifs alors la suite (S_n) est croissante donc :

$$(S_n) \text{ convergente} \iff (S_n) \text{ majorée} \qquad \square$$

Théorème de comparaison (TCSTP)

Hypothèse : APCR $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

Théorème de comparaison (TCSTP)

Hypothèse : APCR $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

(i) $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ converge

(ii) $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ diverge

Théorème de comparaison (TCSTP)

Hypothèse : APCR $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

(i) $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ converge, et

$$\sum_{k=N}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$$

(ii) $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ diverge

Théorème de comparaison (TCSTP)

Hypothèse : APCR $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

(i) $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ converge, et

$$\sum_{k=N}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$$

(ii) $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ diverge

Démonstration.

Théorème de comparaison (TCSTP)

Hypothèse : APCR $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$

(i) $\sum v_n$ converge $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ converge, et

$$\sum_{k=N}^{+\infty} u_k \leqslant \sum_{k=N}^{+\infty} v_k$$

(ii) $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ diverge

Démonstration. $\square$

Exemple 4

$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ est divergente}$$

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(i) $u_n = O(v_n)$

Alors :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(i) $u_n = O(v_n)$

Alors :

$$\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge}$$

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(ii) $u_n = o(v_n)$

Alors :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

$$\textit{(ii)} \quad u_n = o(v_n)$$

Alors :

$$\sum u_n \text{ diverge} \quad \Longrightarrow \quad \sum v_n \text{ diverge}$$

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(i) $u_n = O(v_n)$

Alors :

$$\sum v_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

(i) $u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$$

TCSTP

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(i) $u_n = O(v_n)$

Alors :

$$\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge}$$

(i) $u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant M v_n$$

TCSTP

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(ii) $u_n = o(v_n)$

Alors :

$$\sum v_n \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

(ii)

$$u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$$

Corollaire du TCSTP

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

(ii) $u_n = o(v_n)$

Alors :

$$\sum u_n \text{ diverge} \implies \sum v_n \text{ diverge}$$

(ii)

$$u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n) \qquad \square$$

Théorème d'équivalence (TESTP)

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

$$u_n \sim v_n$$

Alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}$$

Théorème d'équivalence (TESTP)

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

$$u_n \sim v_n$$

Alors :

$$\sum u_n \text{ diverge} \iff \sum v_n \text{ diverge}$$

Exemple 5

(i) $\displaystyle\sum \frac{n}{n^2+1}$

Exemple 5

(i) $$\sum \frac{n}{n^2+1}$$ *(ii)* $$\sum \frac{1}{n^2}$$

Remarque

Si $u_n \sim v_n$ et $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, mais en général

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \neq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Théorème d'équivalence (TESTP)

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

$$u_n \sim v_n$$

Alors :

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration. Ce théorème est conséquence du corollaire précédent, car :

$$u_n \sim v_n \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} u_n = O(v_n) \\ v_n = O(u_n) \end{cases}$$

Théorème d'équivalence (TESTP)

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

$$u_n \sim v_n$$

Alors :

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration directe.

Théorème d'équivalence (TESTP)

Hypothèses : (u_n) et (v_n) strictement positives

$$u_n \sim v_n$$

Alors :

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration directe.

$\square$

Remarque : nouvelles définitions de o, $\sim$, O

Soit u et v deux suites (v peut s'annuler).

$u_n = o(v_n)$: $\quad \exists (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \varepsilon_n v_n \quad \text{et} \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque : nouvelles définitions de o, $\sim$, O

Soit u et v deux suites (v peut s'annuler).

$u_n \sim v_n$: $\exists (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = h_n v_n \qquad \text{et} \qquad h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque : nouvelles définitions de o, $\sim$, O

Soit u et v deux suites (v peut s'annuler).

$u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant M v_n$$

Remarque : nouvelles définitions de o, $\sim$, O

Soit u et v deux suites (v peut s'annuler).

$u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant M v_n$$

Si v ne s'annule pas, ces définitions sont équivalentes aux définitions habituelles.

Remarque : nouvelles définitions de o, $\sim$, O

Soit u et v deux suites (v peut s'annuler).

$u_n = O(v_n)$:

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant M v_n$$

Ces définitions s'adaptent pour les relations de comparaison entre les fonctions.

II. Séries à termes positifs

B. Comparaison avec une intégrale

Exemple 6

$$\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Remarque

$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^{n} f(t)\,dt$$

II. Séries à termes positifs

Définition

Série de Riemann : $\sum \frac{1}{n^s}$ où $s \in \mathbb{R}$

Théorème

$$\sum \frac{1}{n^s} \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s > 1$$

Exemple

$\sum \frac{1}{n^2}$ $\sum \frac{1}{n^3}$ $\sum \frac{1}{n^{1,00001}}$ convergent

$\sum \frac{1}{n}$ $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergent

Démonstration.

$s = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Démonstration.

$s = 1$: $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$s < 1$: $\forall n \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^s}$

TCSTP : $\sum \frac{1}{n^s}$ diverge

Démonstration.

$s = 1$: $$\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}$$

$s < 1$: $$\forall n \geqslant 1 \qquad 0 \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n^s}$$

TCSTP : $$\sum \frac{1}{n^s} \text{ diverge}$$

$s > 1$: Comparaison avec une intégrale

Suite de la démonstration.

$s > 1$:

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_1^{n} f(t)\,dt$$

Suite de la démonstration.

$s > 1$:

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant 1 + \int_1^n f(t)\,dt$$

$$f(t) = \frac{1}{t^s}$$

f est bien définie, continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

Suite de la démonstration.

$s > 1$:

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t^s}$$

Suite de la démonstration.

$s > 1$:

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dt}{t^s}$$

$$\Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}\left[1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right]$$

Suite de la démonstration.

$s > 1$:

$$\forall n \geqslant 1 \qquad \int_1^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \int_1^{n} \frac{dt}{t^s}$$

$$\implies \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} \leqslant 1 + \frac{1}{s-1}\left[1 - \frac{1}{n^{s-1}}\right]$$

$$\implies \qquad S_n \leqslant \frac{s}{s-1} \qquad \square$$

Méthode

Pour les séries à termes positifs :

- TCSTP ou TESTP
- Séries géométriques ou séries de Riemann

Exemple 7

(i) $\sum \dfrac{n}{n^3 + 2n + 1}$

Exemple 7

(i) $\sum \dfrac{n}{n^3+2n+1}$ converge

(ii) $\sum \dfrac{3\sqrt{n}}{2n-5}$

Exemple 7

(i) $\sum \frac{n}{n^3+2n+1}$ converge

(ii) $\sum \frac{3\sqrt{n}}{2n-5}$ diverge

(iii) $\sum \left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)$

Exemple 7

(i) $\sum \dfrac{n}{n^3+2n+1}$ converge

(ii) $\sum \dfrac{3\sqrt{n}}{2n-5}$ diverge

(iii) $\sum \left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{2}{n}\right)$ diverge

(iv) $\sum \left(\sin \dfrac{1}{n}\right)$

Exemple 7

(i) $\sum \frac{n}{n^3+2n+1}$ converge

(ii) $\sum \frac{3\sqrt{n}}{2n-5}$ diverge

(iii) $\sum \left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)$ diverge

(iv) $\sum \left(\sin\frac{1}{n}\right)$ diverge

(v) $\sum \left(\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\right)$

Exemple 7

(i) $\sum \frac{n}{n^3+2n+1}$ converge

(ii) $\sum \frac{3\sqrt{n}}{2n-5}$ diverge

(iii) $\sum \left(\frac{1}{2^n}+\frac{2}{n}\right)$ diverge

(iv) $\sum \left(\sin\frac{1}{n}\right)$ diverge

(v) $\sum \left(\arctan\frac{1}{n^2+n+1}\right)$ converge

(vi) $\sum \frac{1}{n!}$

Exemple 7

(i) $\sum \frac{n}{n^3 + 2n + 1}$ converge

(ii) $\sum \frac{3\sqrt{n}}{2n - 5}$ diverge

(iii) $\sum \left(\frac{1}{2^n} + \frac{2}{n}\right)$ diverge

(iv) $\sum \left(\sin \frac{1}{n}\right)$ diverge

(v) $\sum \left(\arctan \frac{1}{n^2 + n + 1}\right)$ converge

(vi) $\sum \frac{1}{n!}$ converge

▷ Exercice 4.

Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

$$\text{(a)} \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n+1}}{(n-1)^2 \ln^2 n}$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}} - \frac{1}{\sqrt[4]{n+\frac{3}{2}}}\right)$$

II. Séries à termes positifs

Notation

$C = \{0, \ldots, 9\}$: ensemble des chiffres

Notation

$C = \{0, \dots, 9\}$: ensemble des chiffres

Proposition

$(a_1, a_2, \dots) \in C^{\mathbb{N}^*}$

$$\sum \frac{a_k}{10^k} \text{ est convergente}$$

Démonstration.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{a_k}{10^k} \leqslant 10\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

<u>Démonstration</u>.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{a_k}{10^k} \leqslant 10\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

- $\left|\dfrac{1}{10}\right| < 1$: $\quad \sum 10\left(\dfrac{1}{10}\right)^k$ converge

Démonstration.

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad 0 \leqslant \frac{a_k}{10^k} \leqslant 10\left(\frac{1}{10}\right)^k$$

- $\left|\frac{1}{10}\right| < 1$: $\quad \sum 10\left(\frac{1}{10}\right)^k$ converge
- TCSTP : $\quad \sum \frac{a_k}{10^k}$ converge $\square$

Notation

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de chiffres et a est un entier, alors on note :

$$a, a_1a_2\ldots = a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

Définition

Si $$x = a + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

alors $$x = a, a_1 a_2 \dots$$

est le développement décimal de x.

Exemple

Si $x = \pi$ alors

$$a = 3 \qquad (a_n) = (1, 4, 1, 5, 9, \dots)$$

Définition

Développement décimal impropre :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad a_n = 9)$$

Développement décimal propre :

$$\forall N \in \mathbb{N} \qquad \exists n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \quad \text{et} \quad a_n < 9)$$

Exemple

Si $x = 2{,}85$ alors

$$x = 2{,}849999...$$

et $$x = 2{,}850000...$$

Exemple

Si $x = 2{,}85$ alors

$$x = 2{,}849999\ldots \qquad \text{impropre}$$

et $$x = 2{,}850000\ldots \qquad \text{propre}$$

Théorème

Tout réel admet un unique développement décimal propre.

Théorème

Tout réel admet un unique développement décimal propre.

Théorème

Un réel x est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang.

Exemple 8

(i) $$\frac{1}{3} =$$

Exemple 8

(i) $$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$\frac{267}{11} =$$

Exemple 8

(i)

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$\frac{267}{11} = 24{,}2727\ldots$$

$$\frac{22}{7} =$$

Exemple 8

(i)

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$\frac{267}{11} = 24{,}2727\ldots$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857142857\ldots$$

(ii)

$$2{,}689\,689\,689\ldots =$$

Exemple 8

(i)

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$$

$$\frac{267}{11} = 24{,}2727\ldots$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}142857142857\ldots$$

(ii)

$$2{,}689\,689\,689\ldots = \frac{2\,687}{999}$$

II. Séries à termes positifs

Proposition - Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Proposition - Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Corollaire

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1)$$

Proposition - Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Corollaire

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1)$$

▷ Exercice.

On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n$$

▷ Exercice.

On pose, pour tout $n \geqslant 1$:

$$u_n = \ln(n!) - n \ln n + n - \frac{1}{2} \ln n$$

a. Donner un développement asymptotique à l'ordre 2 de $v_n = u_{n+1} - u_n$.

b. En déduire que la série $\sum v_n$ converge, puis que la suite (u_n) converge.

c. On note $A = \lim u_n$. Donner un équivalent de $n!$ dépendant de A.

▷ Exercice.

Les intégrales de Wallis sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$$

On démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$$

▷ Exercice.

Les intégrales de Wallis sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

On démontre :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$$

On en déduit :

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

▷ Exercice.

Les intégrales de Wallis sont, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t$$

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

d. Déterminer la valeur de A et démontrer la formule de Stirling.

Proposition - Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

▷ Exercice 5.

Donner un équivalent de $\displaystyle\binom{2n}{n}$ en $+\infty$.

III. Séries à termes quelconques

Définition

Une série $\sum u_n$ est **alternée** si la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de signe constant.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante,
- la suite $(|u_n|)_n$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante,
- la suite $(|u_n|)_n$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Exemple 9

La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante,
- la suite $(|u_n|)_n$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante,
- la suite $(|u_n|)_n$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration du théorème.
On peut remplacer (u_n) par $(-u_n)$.
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est du signe de $(-1)^n$.

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante,
- la suite $(|u_n|)_n$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration du théorème.

On peut remplacer (u_n) par $(-u_n)$.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est du signe de $(-1)^n$.

$\square$

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série alternée telle que :

- la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante,
- la suite $(|u_n|)_n$ converge vers 0.

Alors la série $\sum u_n$ converge.

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration de la proposition.

La suite (S_{2n}) décroît vers S,
la suite (S_{2n+1}) croît vers S :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration de la proposition.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration de la proposition.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$$

Pour $n = 0$: $\quad u_0 - u_1 \leqslant S \leqslant u_0$

Donc : $\quad 0 \leqslant S \leqslant u_0$

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration de la proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$$

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration de la proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$$

$$u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$$

Proposition

De plus :

- $0 \leqslant |S| \leqslant |u_0|$
- R_n est du signe de u_{n+1}
- $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

Démonstration de la proposition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n} \qquad S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n+2}$$

$$u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0 \qquad 0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$$

Ceci démontre la propriété. $\square$

III. Séries à termes quelconques

Remarque

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe quelconque.
On ne suppose plus les suites positives.

Définition

$\sum u_n$ converge absolument si $\sum |u_n|$ converge

Théorème

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Théorème

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Théorème

De façon équivalente :

$$\sum |u_n| \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Démonstration. (u_n) réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

Démonstration. (u_n) réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

$\sum u_n$ converge absolument

$\iff$ $\sum |u_n|$ converge

Démonstration. (u_n) réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

$\sum u_n$ converge absolument

$\iff \sum |u_n|$ converge

$\iff \sum 2|u_n|$ converge par linéarité

Démonstration. (u_n) réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

$$\begin{array}{lll} & \sum u_n \text{ converge absolument} & \\ \iff & \sum |u_n| \text{ converge} & \\ \iff & \sum 2|u_n| \text{ converge} & \text{par linéarité} \\ \implies & \sum (u_n + |u_n|) \text{ converge} & \text{par le TCSTP} \end{array}$$

Démonstration. (u_n) réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

$$
\begin{aligned}
& \textstyle\sum u_n \text{ converge absolument} & \\
\iff & \textstyle\sum |u_n| \text{ converge} & \\
\iff & \textstyle\sum 2|u_n| \text{ converge} & \text{par linéarité} \\
\implies & \textstyle\sum (u_n + |u_n|) \text{ converge} & \text{par le TCSTP} \\
\implies & \textstyle\sum (u_n + |u_n| - |u_n|) \text{ converge} & \text{par linéarité}
\end{aligned}
$$

Démonstration. (u_n) réelle :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$$

$$\begin{array}{lll}
 & \sum u_n \text{ converge absolument} & \\
\iff & \sum |u_n| \text{ converge} & \\
\iff & \sum 2|u_n| \text{ converge} & \text{par linéarité} \\
\implies & \sum (u_n + |u_n|) \text{ converge} & \text{par le TCSTP} \\
\implies & \sum (u_n + |u_n| - |u_n|) \text{ converge} & \text{par linéarité} \\
\iff & \sum u_n \text{ converge} &
\end{array}$$

Suite de la démonstration. (u_n) complexe :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$$

Suite de la démonstration. (u_n) complexe :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$$

$\sum u_n$ converge absolument donc $\sum |u_n|$ converge

Suite de la démonstration. (u_n) complexe :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n|$$

$$0 \leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n|$$

$\sum u_n$ converge absolument donc $\sum |u_n|$ converge

$\Longrightarrow \sum |\operatorname{Re} u_n|$ et $\sum |\operatorname{Im} u_n|$ convergent par TCSTP

Suite de la démonstration. (u_n) complexe :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} u_n &= \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n \\ 0 &\leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n| \\ 0 &\leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n| \end{aligned}$$

$\sum u_n$ converge absolument donc $\sum |u_n|$ converge

$\Longrightarrow \sum |\operatorname{Re} u_n|$ et $\sum |\operatorname{Im} u_n|$ convergent par TCSTP

$\Longrightarrow \sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent

Suite de la démonstration. (u_n) complexe :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n &= \operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n \\ 0 &\leqslant |\operatorname{Re} u_n| \leqslant |u_n| \\ 0 &\leqslant |\operatorname{Im} u_n| \leqslant |u_n| \end{aligned}$$

$\sum u_n$ converge absolument donc $\sum |u_n|$ converge

$\Longrightarrow \sum |\operatorname{Re} u_n|$ et $\sum |\operatorname{Im} u_n|$ convergent par TCSTP

$\Longrightarrow \sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent

$\Longrightarrow \sum u_n$ converge par linéarité $\square$

Démonstration alternative du cas réel.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration alternative du cas réel.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alors :

$$x = x^+ - x^- \qquad \text{et} \qquad |x| = x^+ + x^-$$

Démonstration alternative du cas réel.

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$x^+ = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad x^- = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Alors :

$$x = x^+ - x^- \qquad \text{et} \qquad |x| = x^+ + x^-$$

$$0 \leqslant x^+ \leqslant |x| \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant x^- \leqslant |x|$$

Démonstration alternative du cas réel.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$$

Démonstration alternative du cas réel.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$$

$$\sum |u_n| \text{ cv} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n^+ \quad \text{et} \quad \sum u_n^- \text{ cv} \qquad\qquad \text{TCSTP}$$

Démonstration alternative du cas réel.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$$

$$\sum |u_n| \text{ cv} \implies \sum u_n^+ \text{ et } \sum u_n^- \text{ cv} \qquad \text{TCSTP}$$

$$\implies \sum (u_n^+ - u_n^-) \text{ cv} \qquad \text{par linéarité}$$

Démonstration alternative du cas réel.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant u_n^+ \leqslant |u_n| \quad \text{et} \quad 0 \leqslant u_n^- \leqslant |u_n|$$

$$\begin{aligned}
\sum |u_n| \text{ cv} \quad & \Longrightarrow \quad \sum u_n^+ \quad \text{et} \quad \sum u_n^- \text{ cv} && \text{TCSTP} \\
& \Longrightarrow \quad \sum (u_n^+ - u_n^-) \text{ cv} && \text{par linéarité} \\
& \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ cv} && \square
\end{aligned}$$

Théorème

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

Théorème

De façon équivalente :

$$\sum |u_n| \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge}$$

Remarque

La réciproque est fausse.

Exemple 10

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$ converge alors que

$$\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$$ diverge

Exemple 10

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge alors que

$$\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n} \quad \text{diverge}$$

i.e., $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge mais ne converge pas absolument

Exemple 10

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$ converge alors que

$$\sum_{n\geqslant 1} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$$ diverge

i.e., $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge
mais ne converge pas absolument

On dit que cette série est semi-convergente.

Exemple 10 (suite)

FTRI : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left|\ln 2 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, dt\right| \leqslant \int_0^1 (1-t)^n\, dt = \frac{1}{n+1}$$

Donc $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2$$

Théorème

$$\sum u_n \text{ converge absolument} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Théorème

De façon équivalente :

$$\sum |u_n| \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ converge}$$

Remarque

Pour démontrer que la série $\sum |u_n|$ converge on dispose des théorèmes sur les séries à termes positifs.

Proposition (Inégalité triangulaire)

Si $\sum u_n$ converge absolument alors :

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$$

Démonstration. Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left| \sum_{k=0}^{n} u_k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Démonstration. Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Ces deux suites convergent donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Démonstration. Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

Ces deux suites convergent donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} |u_k|$$

$$\iff \qquad \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \qquad \square$$

Proposition

(u_n) : suite réelle ou complexe
(v_n) : suite réelle à termes positifs

Hypothèses : $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge

Alors $\sum u_n$ est absolument convergente

Proposition

(u_n) : suite réelle ou complexe
(v_n) : suite réelle à termes positifs

Hypothèses : $u_n = O(v_n)$ et $\sum v_n$ converge

Alors $\sum u_n$ est absolument convergente
(donc convergente).

<u>Démonstration</u>. $u_n = O(v_n)$ donc $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)$ est bornée.
Soit M un de ses majorants.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$$

<u>Démonstration</u>. $u_n = O(v_n)$ donc $\left(\left|\frac{u_n}{v_n}\right|\right)$ est bornée. Soit M un de ses majorants.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant |u_n| \leqslant M v_n$$

$\sum v_n$ converge

TCSTP : $\sum |u_n|$ converge

donc $\sum u_n$ converge absolument. $\square$

Exemple 11

$s \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$

$$\sum_{n \geqslant 0} n^s q^n$$

▷ Exercice 6.

Démontrer que les séries suivantes sont convergentes.

(a) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin n}{n^2}$ (b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} e^{(in-1)n}$

III. Séries à termes quelconques

Proposition

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

Cette série est appelée série exponentielle.

Démonstration. Soit $\begin{array}{rccl} f : & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{tz} \end{array}$

Démonstration. Soit $f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz} \end{array}$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad f^{(n)}(t) = z^n f(t)$$

Démonstration. Soit $f : \begin{array}{rcl}[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz}\end{array}$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad f^{(n)}(t) = z^n f(t)$$

Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$.

Alors $M|z|^n$ est un majorant de $\left|f^{(n)}\right|$ sur $[0,1]$.

Démonstration. Soit $\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz} \end{array}$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad f^{(n)}(t) = z^n f(t)$$

Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$.

Alors $M|z|^n$ est un majorant de $\left|f^{(n)}\right|$ sur $[0,1]$.

Inégalité de Taylor Lagrange : $\quad \forall t \in [0,1]$

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant M|z|^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

<u>Démonstration</u>. Soit $\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz} \end{array}$

Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [0,1] \quad f^{(n)}(t) = z^n f(t)$$

Soit M un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$.

Alors $M|z|^n$ est un majorant de $\left|f^{(n)}\right|$ sur $[0,1]$.

Inégalité de Taylor Lagrange pour $t = 1$:

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration. Soit $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{tz} \end{array}$

Inégalité de Taylor Lagrange pour $t = 1$:

$$\left| e^z - \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant M \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées et théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} = e^z \qquad \square$$

Prochain chapitre

Chapitre B12

Déterminants