

Mathématiques

Chapitre A11
Intégration

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Isaac Newton (GB) 1642 – 1727



Gottfried Leibniz (Allemagne) 1646 – 1716



Bernhard Riemann (Allemagne) 1826 – 1866



Henri Lebesgue (France) 1875 – 1941



Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

VI. Intégrales des fonctions complexes

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

VI. Intégrales des fonctions complexes

I : intervalle

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction

Définition

f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2 \\ |x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Rappel

f est continue si :

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Rappel

f est continue si :

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Rappel

f est continue si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Rappel

f est continue si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in I \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in I \\ |x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le réel η dépend de x .

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Exemple 1

(i) La fonction carré n'est pas uniformément continue.

Définition

f est uniformément continue si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Exemple 1

(ii) La fonction carré est uniformément continue sur $[0, 10]$.

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Exemple 1

(iii) La fonction racine carrée est uniformément continue.

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Proposition

f lipschitzienne

$$\implies f \text{ uniformément continue}$$

$$\implies f \text{ continue}$$

Les réciproques sont fausses.

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. (i)

f **lipschitzienne** $\implies f$ **uniformément continue**

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. (i)

f **lipschitzienne** $\not\iff$ f **uniformément continue**

$x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue
n'est pas lipschitzienne.

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. (ii)

f uniformément continue $\implies f$ continue

Immédiat.

Définition

f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. (ii)

f uniformément continue $\nLeftrightarrow$ **f continue**

$x \mapsto x^2$ est continue

n'est pas uniformément continue. □

Théorème de Heine

Si f est continue sur un **segment**
alors f est uniformément continue.

Eduard Heine (Allemagne) 1821 – 1881



Théorème de Heine

Si f est continue sur un **segment**
alors f est uniformément continue.

Démonstration.

Théorème de Heine

Si f est continue sur un **segment**
alors f est uniformément continue.

Démonstration.



Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

A. Fonctions en escalier

B. Fonctions continues par morceaux

C. Intégrale d'une fonction CPM sur un segment

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

VI. Intégrales des fonctions complexes

II. Définition de l'intégrale

A. Fonctions en escalier

B. Fonctions continues par morceaux

C. Intégrale d'une fonction CPM sur un segment

Définition

Dans toute cette partie I est un **segment** :

$$I = [a, b] \quad \text{avec} \quad a \leqslant b$$

Définitions

Soit $I = [a, b]$ un segment.

(i) Subdivision de I :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

Définitions

Soit $I = [a, b]$ un segment.

(i) **Subdivision** de I :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

(ii) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de I telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.

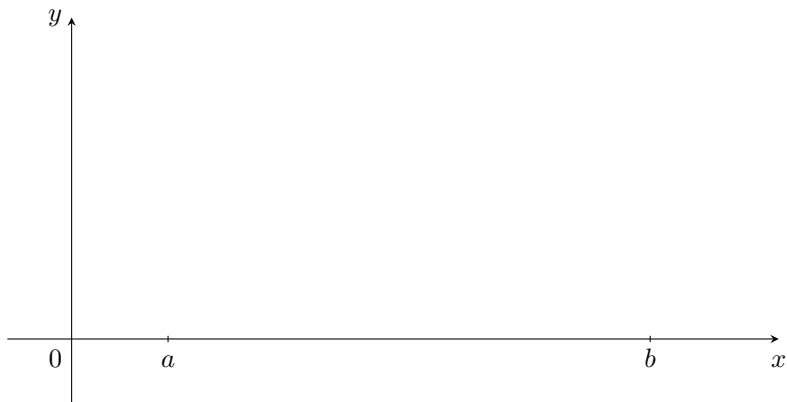
Définitions

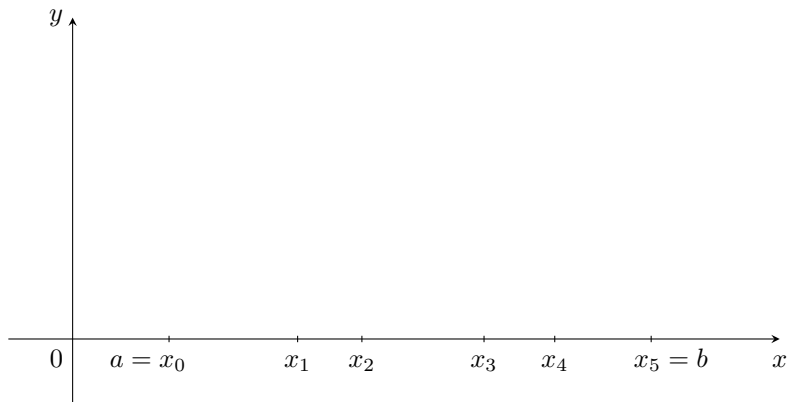
Soit $I = [a, b]$ un segment.

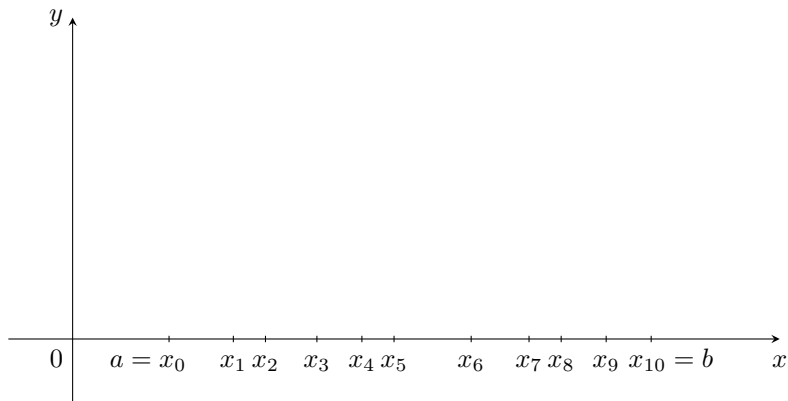
(i) **Subdivision** de I :

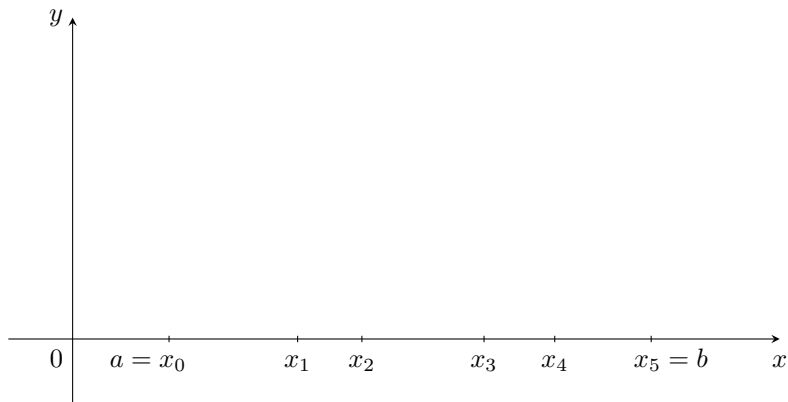
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

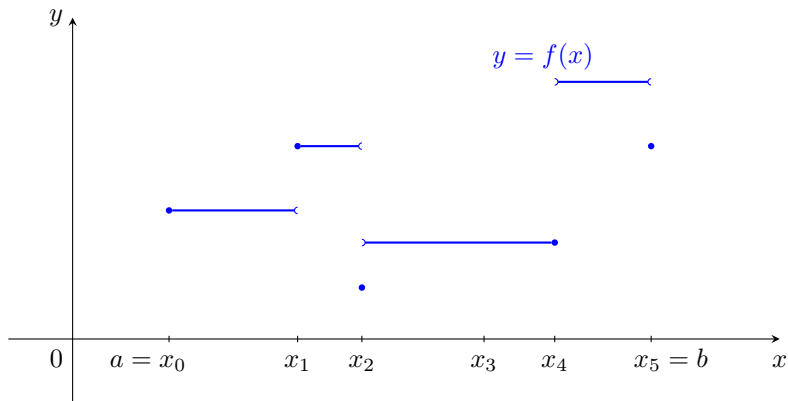
(ii) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **en escalier** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de I telle que f est constante sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
Subdivision **adaptée** à f .

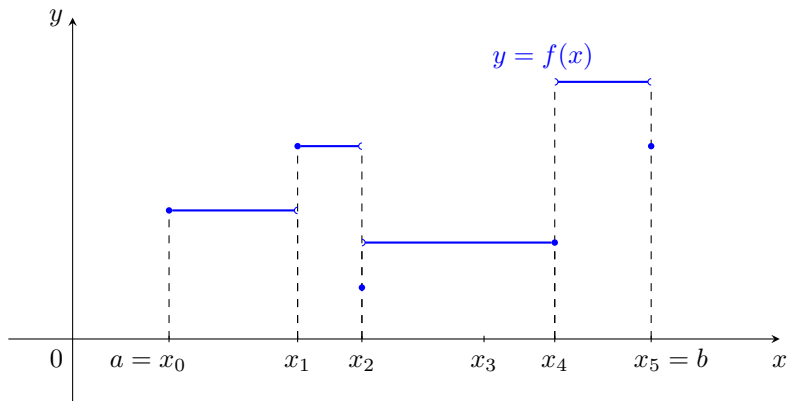


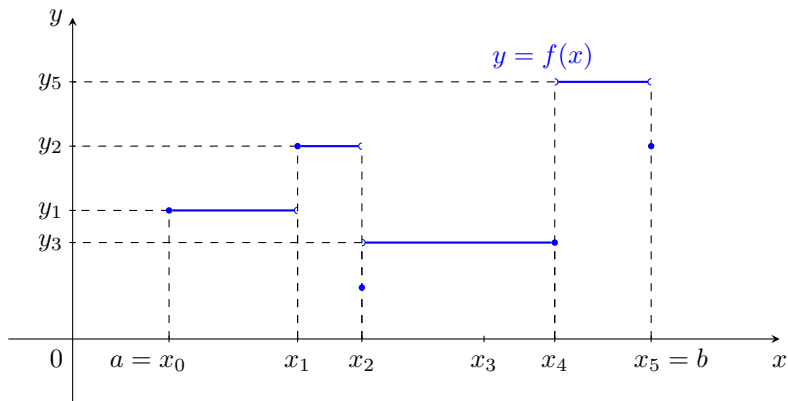






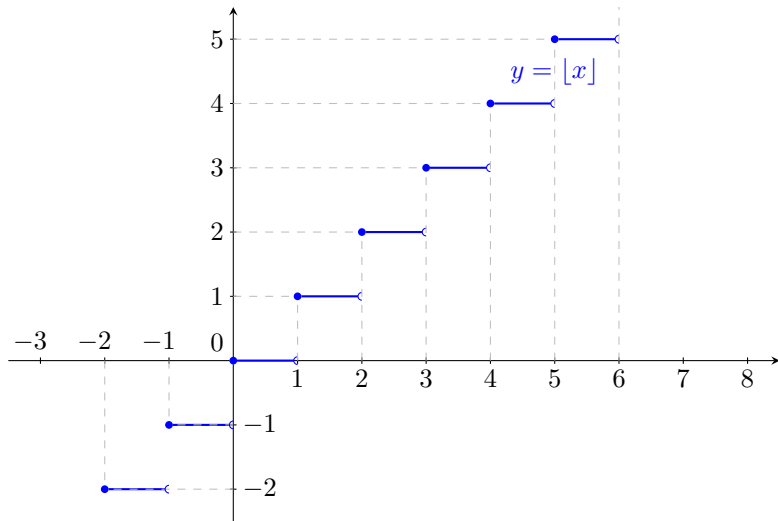






Exemple

La fonction partie entière $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est en escalier sur tout segment.



Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

- ▶ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier
- ▶ $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ subdivision adaptée à f
- ▶ y_k valeur de f sur $]x_{k-1}, x_k[$

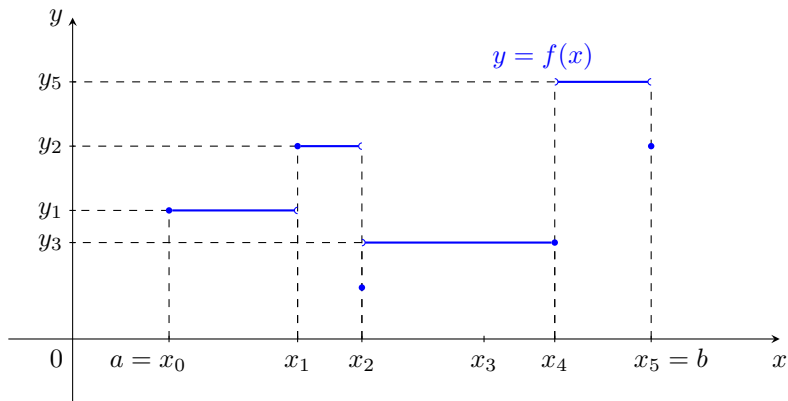
Intégrale de f sur I :

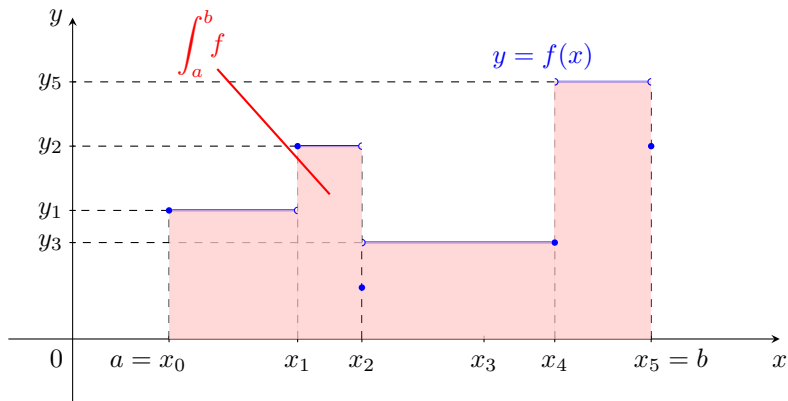
Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

- ▶ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier
- ▶ $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ subdivision adaptée à f
- ▶ y_k valeur de f sur $]x_{k-1}, x_k[$

Intégrale de f sur I :

$$\int_I f = \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1})$$





Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

Intégrale de f sur I :

$$\int_I f = \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1})$$

Proposition

L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie,

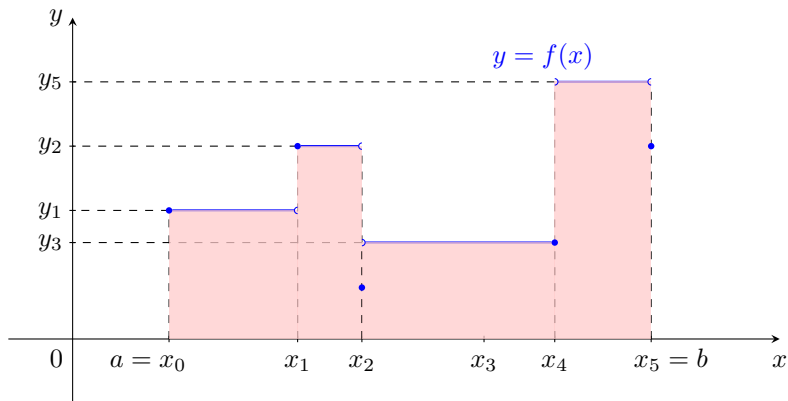
Définition : Intégrale d'une fonction en escalier

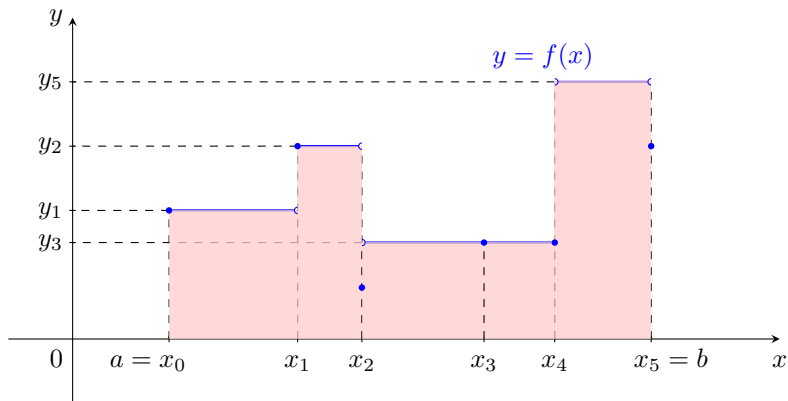
Intégrale de f sur I :

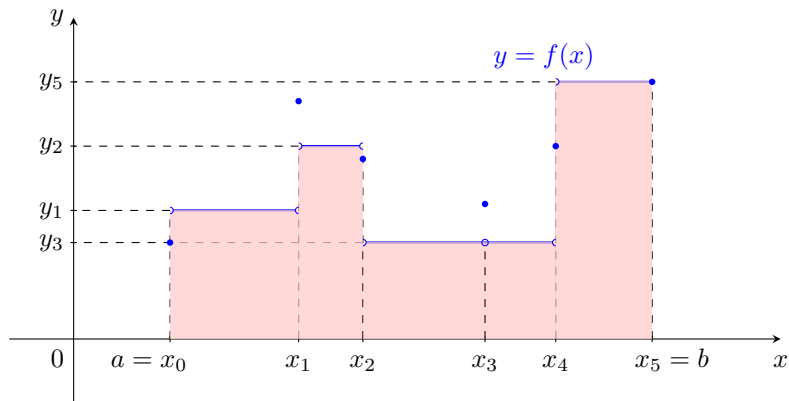
$$\int_I f = \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1})$$

Proposition

L'intégrale de f ne dépend pas de la subdivision choisie, ni des valeurs de f aux points de cette subdivision.





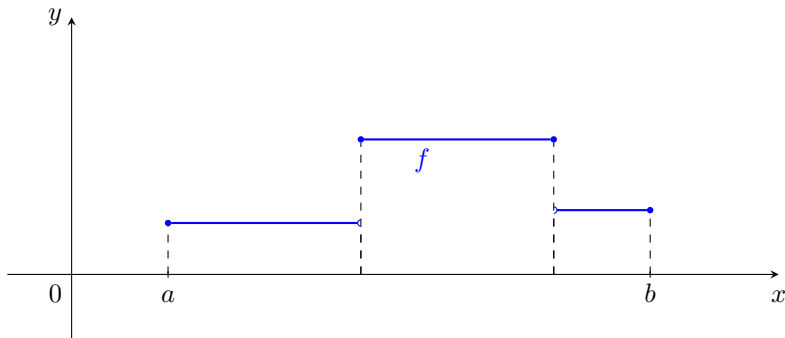


Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .

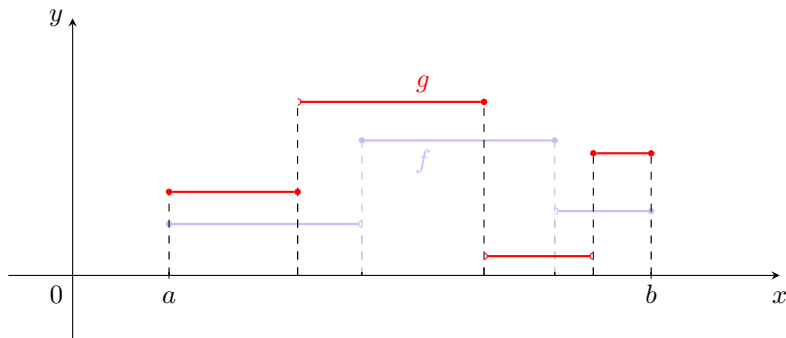
Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .



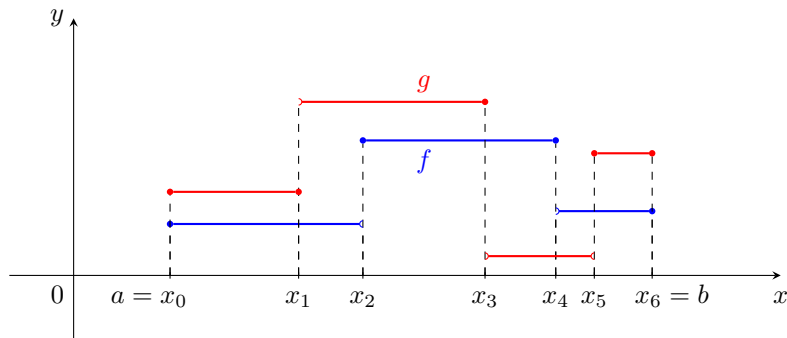
Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .



Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .



Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .

Démonstration.

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f
et $(y_0, \dots, y_m)$ une subdivision adaptée à g .

Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .

Démonstration.

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f
et $(y_0, \dots, y_m)$ une subdivision adaptée à g .

L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}$ contient un certain nombre de réels distincts que l'on note $z_0, \dots, z_p$ en les ordonnant.

Proposition

Soit f et g deux fonctions en escalier. Alors il existe une subdivision de I adaptée à f et à g .

Démonstration.

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f
et $(y_0, \dots, y_m)$ une subdivision adaptée à g .

L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n\} \cup \{y_0, \dots, y_m\}$ contient un certain nombre de réels distincts que l'on note $z_0, \dots, z_p$ en les ordonnant.

La subdivision $(z_0, \dots, z_p)$ est adaptée à f et à g car elle contient tous les x_i et les y_j . □

Lemme - Croissance de l'intégrale sur $\mathcal{E}(I)$

Soit f et g deux fonctions en escalier.

$$\text{Si } f \leq g \quad \text{alors} \quad \int_I f \leq \int_I g$$

Démonstration. **Si** $f \leq g$ **alors** $\int_I f \leq \int_I g$

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .
Soit y_k et z_k les valeurs de f et de g sur $]x_{k-1}, x_k[$.

Démonstration. **Si** $f \leq g$ **alors** $\int_I f \leq \int_I g$

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .
Soit y_k et z_k les valeurs de f et de g sur $]x_{k-1}, x_k[$.

Alors :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k \leq z_k$$

Démonstration. **Si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$**

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .
Soit y_k et z_k les valeurs de f et de g sur $]x_{k-1}, x_k[$.

Alors :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k \leq z_k$$

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k(x_k - x_{k-1}) \leq z_k(x_k - x_{k-1})$$

Démonstration. **Si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$**

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .
Soit y_k et z_k les valeurs de f et de g sur $]x_{k-1}, x_k[$.

Alors :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k \leq z_k$$

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k(x_k - x_{k-1}) \leq z_k(x_k - x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^n y_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n z_k(x_k - x_{k-1})$$

Démonstration. **Si** $f \leq g$ **alors** $\int_I f \leq \int_I g$

Soit $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .
Soit y_k et z_k les valeurs de f et de g sur $]x_{k-1}, x_k[$.

Alors :

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k \leq z_k$$

$$\forall k = 1, \dots, n \qquad y_k(x_k - x_{k-1}) \leq z_k(x_k - x_{k-1})$$

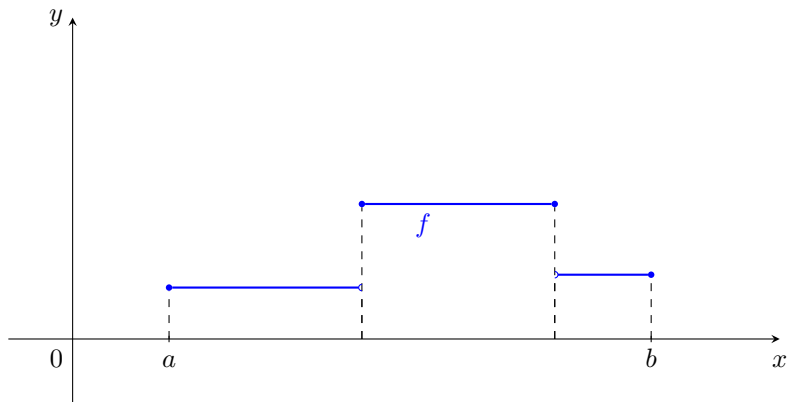
$$\sum_{k=1}^n y_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{k=1}^n z_k(x_k - x_{k-1})$$

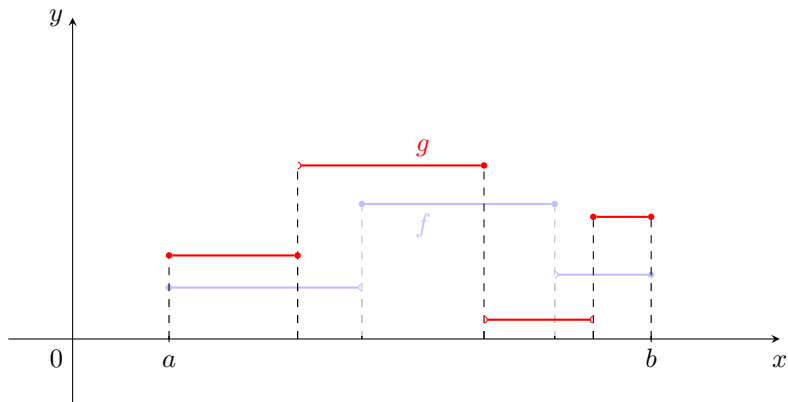
$$\int_I f \leq \int_I g \qquad \square$$

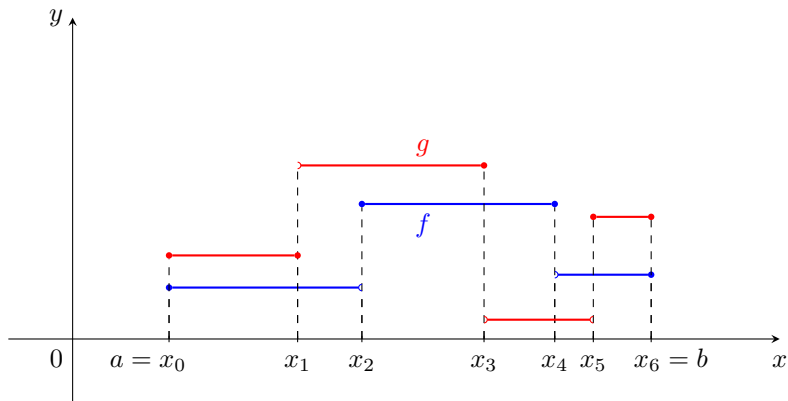
Propositions

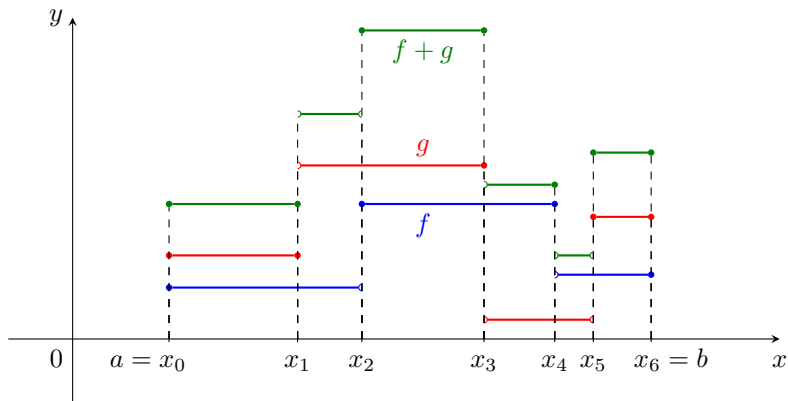
- (i) Les combinaisons linéaires de fonctions en escalier sur I sont en escalier.
- (ii) Le produit d'un nombre fini de fonctions en escalier sur I est en escalier.

Démonstration. En effet, si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions en escalier alors il existe une subdivision de I adaptée à toutes les f_i . □









Lemme - Linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{E}(I)$

Soit f et g deux fonctions en escalier et λ un réel.

Alors :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

Lemme - Linéarité de l'intégrale sur $\mathcal{E}(I)$

Soit f et g deux fonctions en escalier et λ un réel.

Alors :

$$\int_I (\lambda f + g) = \lambda \int_I f + \int_I g$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_I (\lambda f + g) &= \sum_{k=1}^n (\lambda y_k + z_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n z_k (x_k - x_{k-1}) \\ &= \lambda \int_I f + \int_I g \end{aligned}$$

□

II. Définition de l'intégrale

A. Fonctions en escalier

B. Fonctions continues par morceaux

C. Intégrale d'une fonction CPM sur un segment

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de I telle que :

- (i) f est continue sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
- (ii) f admet une limite finie à gauche et à droite en chaque point de cette subdivision.

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de I telle que :

- (i) f est continue sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
- (ii) f admet une limite finie à gauche et à droite en chaque point de cette subdivision.

Définition (suite) Hors programme

Si I est un intervalle quelconque, on dit que f est continue par morceaux sur I si elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I .

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de I telle que :

- (i) f est continue sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
- (ii) f admet une limite finie à gauche et à droite en chaque point de cette subdivision.

Notation

$\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$: ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux.

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $(x_k)_{0 \leq k \leq n}$ de I telle que :

- (i) f est continue sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$.
- (ii) f admet une limite finie à gauche et à droite en chaque point de cette subdivision.

Remarque

$$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$$

Propositions

- (i) Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

Propositions

- (i) Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
- (ii) La somme et le produit de fonctions continues par morceaux sont continues par morceaux.

Propositions

- (i) Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
 - (ii) La somme et le produit de fonctions continues par morceaux sont continues par morceaux.
- $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})$ est un espace vectoriel et un anneau.

Démonstration. (i) Une fonction CPM sur un segment est bornée.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM. Pour tout k on note :

► f_k la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$

Démonstration. (i) Une fonction CPM sur un segment est bornée.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM. Pour tout k on note :

- ▶ f_k la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$
- ▶ $\bar{f}_k$ le prolongement par continuité de f_k à $[x_{k-1}, x_k]$.

Comme f_k admet des limites finies en x_{k-1} et en x_k alors elle est prolongeable par continuité sur le segment $[x_{k-1}, x_k]$.

Démonstration. (i) **Une fonction CPM sur un segment est bornée.**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM. Pour tout k on note :

- ▶ f_k la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$
- ▶ $\bar{f}_k$ le prolongement par continuité de f_k à $[x_{k-1}, x_k]$.

Alors :

- ▶ Les $\bar{f}_k$ sont bornées.

Une fonction continue sur un segment est bornée.

Démonstration. (i) Une fonction CPM sur un segment est bornée.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM. Pour tout k on note :

- ▶ f_k la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$
- ▶ $\bar{f}_k$ le prolongement par continuité de f_k à $[x_{k-1}, x_k]$.

Alors :

- ▶ Les $\bar{f}_k$ sont bornées.
- ▶ Par restriction les f_k sont bornées.

Démonstration. (i) Une fonction CPM sur un segment est bornée.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ CPM. Pour tout k on note :

- ▶ f_k la restriction de f à l'intervalle $]x_{k-1}, x_k[$
- ▶ $\bar{f}_k$ le prolongement par continuité de f_k à $[x_{k-1}, x_k]$.

Alors :

- ▶ Les $\bar{f}_k$ sont bornées.
- ▶ Par restriction les f_k sont bornées.
- ▶ Donc f est bornée sur $\bigcup_{k=1}^n]x_{k-1}, x_k[$.

Démonstration. (i) Une fonction CPM sur un segment est bornée.

Alors :

- ▶ Les $\bar{f}_k$ sont bornées.
- ▶ Par restriction les f_k sont bornées.
- ▶ Donc f est bornée sur $\bigcup_{k=1}^n]x_{k-1}, x_k[$.
- ▶ Donc f est bornée. □

Les valeurs de f en $x_0, \dots, x_n$ sont en nombre fini donc elles sont bornées.

Démonstration. (ii) **La somme et le produit de fonctions CPM sont CPM.**

Soit f et g deux fonctions CPM et $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .

- ▶ Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ les fonctions $f + g$ et fg sont continues.
- ▶ En chaque point x_k leurs limites à gauche et à droite sont finies.

Donc $f + g$ et fg sont CPM.

Démonstration. (ii) **La somme et le produit de fonctions CPM sont CPM.**

Soit f et g deux fonctions CPM et $(x_0, \dots, x_n)$ une subdivision adaptée à f et à g .

- ▶ Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ les fonctions $f + g$ et fg sont continues.
- ▶ En chaque point x_k leurs limites à gauche et à droite sont finies.

Donc $f + g$ et fg sont CPM.

En particulier λf est CPM pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Théorème

Approximation par une fonction en escalier

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux $\varepsilon > 0$

Alors il existe f_1 et f_2 fonctions en escalier telles que :

$\forall x \in I$

$$f(x) - \varepsilon \leq f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

Démonstration.

- ▶ On démontre l'existence de f_1 , puis $f_2 = f_1 + \varepsilon$ convient.
- ▶ On suppose d'abord que f est continue.

Démonstration. Soit f continue sur I .

Théorème de Heine : f est uniformément continue.

Démonstration. Soit f continue sur I .

Théorème de Heine : f est uniformément continue.

Comme $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. Soit f continue sur I .

Théorème de Heine : f est uniformément continue.

Comme $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in I^2$$

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a, b]$:

$$n = \left\lceil \frac{b - a}{\eta} \right\rceil \quad h = \frac{b - a}{n}$$

$$\text{et} \quad \forall k = 0, \dots, n \quad x_k = a + kh$$

Démonstration. Soit f continue sur I .

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit :

$$y_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$$

Démonstration. Soit f continue sur I .

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit :

$$y_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$$

Puis :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}[\quad f_1(x) = y_k$$

Démonstration. Soit f continue sur I .

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit :

$$y_k = \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x)$$

Puis :

$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}[\quad f_1(x) = y_k$$

Alors :

$$\forall x \in I \quad f(x) - \varepsilon \leq f_1(x) \leq f(x)$$

Démonstration. Soit f continue par morceaux sur I .

Démonstration. Soit f continue par morceaux sur I .

Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ la fonction f est continue donc il existe une fonction en escalier $f_{1,k}$ telle que :

$$f - \varepsilon \leq f_{1,k} \leq f \quad \text{sur} \quad]x_{k-1}, x_k[$$

Démonstration. Soit f continue par morceaux sur I .

Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ la fonction f est continue donc il existe une fonction en escalier $f_{1,k}$ telle que :

$$f - \varepsilon \leq f_{1,k} \leq f \quad \text{sur} \quad]x_{k-1}, x_k[$$

On définit alors f_1 par :

$$\forall k = 1, \dots, n \quad f_1|_{]x_{k-1}, x_k[} = f_{1,k}$$

$$\forall k = 0, \dots, n \quad f_1(x_k) = f(x_k)$$

La fonction f_1 est en escalier et vérifie bien :

$$f - \varepsilon \leq f_1 \leq f$$



II. Définition de l'intégrale

A. Fonctions en escalier

B. Fonctions continues par morceaux

C. Intégrale d'une fonction CPM sur un segment

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

$\mathcal{E}_1 = \{\text{fonctions en escalier sur } I \text{ inférieures à } f\}$

$\mathcal{E}_2 = \{\text{fonctions en escalier sur } I \text{ supérieures à } f\}$

Alors :

$$\sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

$\mathcal{E}_1 = \{\text{fonctions en escalier sur } I \text{ inférieures à } f\}$

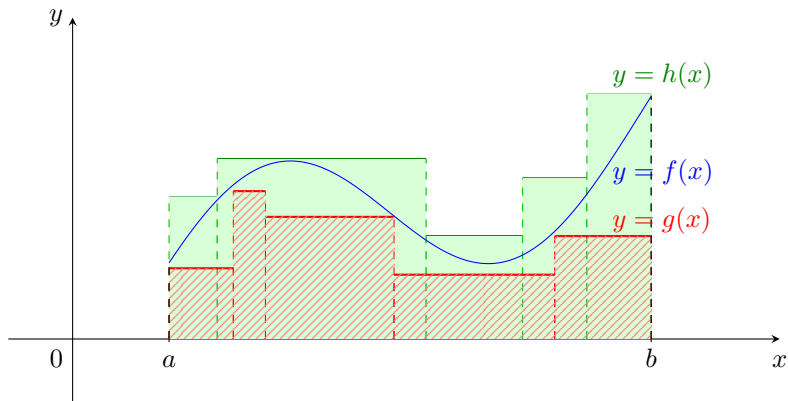
$\mathcal{E}_2 = \{\text{fonctions en escalier sur } I \text{ supérieures à } f\}$

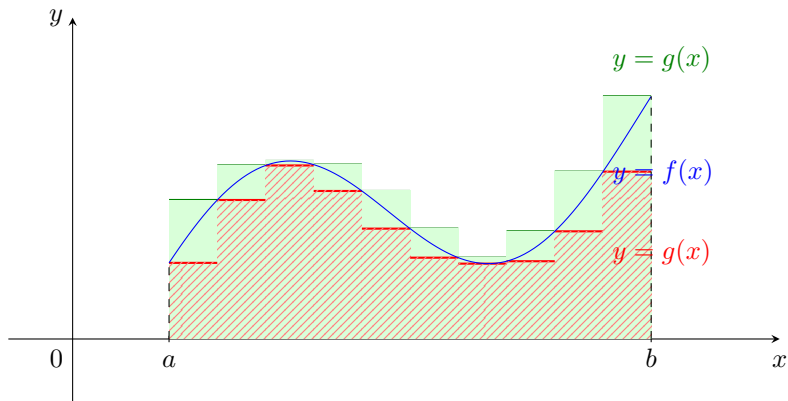
Alors :

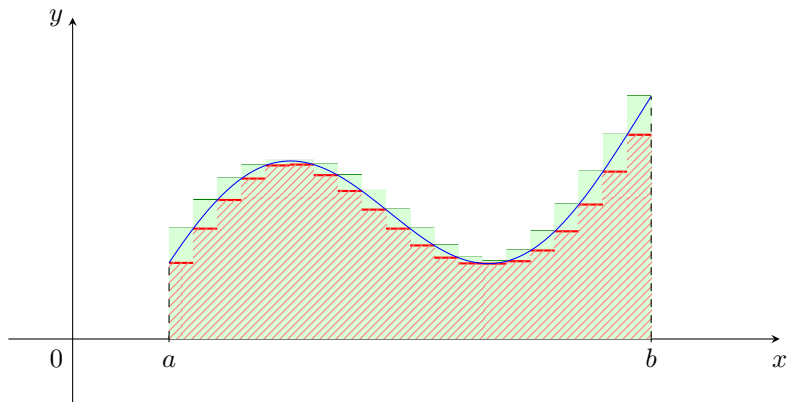
$$\sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

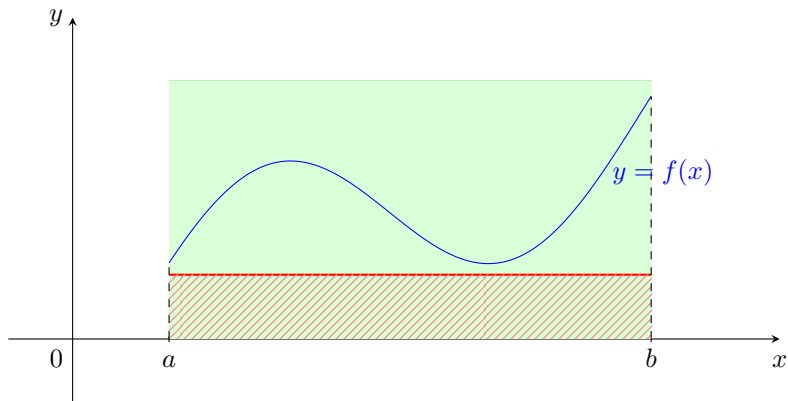
Définition

On appelle **intégrale** de f sur I cette borne commune.









Définition

On appelle **intégrale** de f sur I la borne commune définie par le théorème.

Notations

$$\int_I f \qquad \int_{[a,b]} f \qquad \int_a^b f \qquad \int_a^b f(t)dt$$

Démonstration. On note :

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

Démonstration. On note :

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

Trois étapes :

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

Démonstration. On note :

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

Trois étapes :

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

(ii) $I_1 \leq I_2$

Démonstration. On note :

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

Trois étapes :

- (i) I_1 et I_2 sont bien définies.
- (ii) $I_1 \leq I_2$
- (iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$

Démonstration.

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

f est bornée sur I .

$$\forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M$$

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

f est bornée sur I .

$$\forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$(x \mapsto m) \in \mathcal{E}_1$$

donc $\left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\}$ est non-vide.

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

f est bornée sur I .

$$\forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$(x \mapsto m) \in \mathcal{E}_1$$

donc $\left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\}$ est non-vide.

De plus il est majoré par $M(b - a)$.

PBS : I_1 est bien défini.

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

f est bornée sur I .

$$\forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M$$

$$(x \mapsto M) \in \mathcal{E}_2$$

donc $\left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$ est non-vide.

De plus il est minoré par $m(b-a)$.

PBI : I_2 est bien défini.

Démonstration.

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(ii) \quad I_1 \leq I_2$$

Soit $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$. Alors :

$$f_1 \leq f \leq f_2$$

Démonstration.

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(ii) \quad I_1 \leq I_2$$

Soit $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$. Alors :

$$f_1 \leq f \leq f_2$$

Donc
$$\int_I f_1 \leq \int_I f_2$$

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(ii) \quad I_1 \leq I_2$$

Soit $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$. Alors :

$$f_1 \leq f \leq f_2$$

Donc
$$\int_I f_1 \leq \int_I f_2$$

Donc
$$I_1 \leq \int_I f_2$$

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(ii) \quad I_1 \leq I_2$$

Soit $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$. Alors :

$$f_1 \leq f \leq f_2$$

Donc
$$\int_I f_1 \leq \int_I f_2$$

Donc
$$I_1 \leq \int_I f_2$$

Donc
$$I_1 \leq I_2$$

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(iii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$.

Théorème d'approximation :

Il existe $f_1 \in \mathcal{E}_1$ et $f_2 \in \mathcal{E}_2$ telles que :

$$f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f_1 \leq f \leq f_2 \leq f + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Démonstration.

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(iii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$$

$$f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f_1 \leq f \leq f_2 \leq f + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\text{Donc} \quad 0 \leq f_2 - f_1 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

$$(iii) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$$

$$f - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq f_1 \leq f \leq f_2 \leq f + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

$$\text{Donc} \quad 0 \leq f_2 - f_1 \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Lemmes de croissance et de linéarité :

$$0 \leq \int_I f_2 - \int_I f_1 \leq \int_I \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Démonstration.

$$I_1 = \text{Sup} \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \text{Inf} \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

(i) I_1 et I_2 sont bien définies.

(ii) $I_1 \leq I_2$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$

(iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad I_2 - I_1 \leq \varepsilon$

$$0 \leq \int_I f_2 - \int_I f_1 \leq \int_I \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Or
$$\int_I f_2 - \int_I f_1 \geq I_2 - I_1$$

Donc
$$I_2 - I_1 \leq \varepsilon$$

Démonstration.

$$I_1 = \sup \left\{ \int_I f_1 \mid f_1 \in \mathcal{E}_1 \right\} \quad I_2 = \inf \left\{ \int_I f_2 \mid f_2 \in \mathcal{E}_2 \right\}$$

Les deux bornes I_1 et I_2 sont bien définies et :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq I_2 - I_1 \leq \varepsilon$$

Elles sont donc égales : $I_1 = I_2$ □

Définition

On appelle **intégrale** de f sur I la borne commune définie par le théorème.

Définition

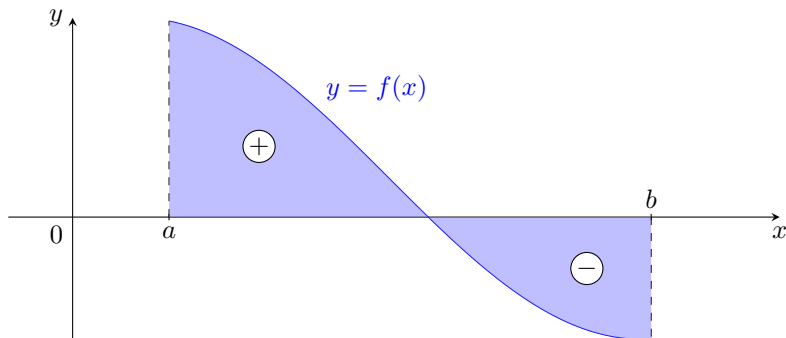
On appelle **intégrale** de f sur I la borne commune définie par le théorème.

Notations

$$\int_I f \quad \int_{[a,b]} f \quad \int_a^b f \quad \int_a^b f(t)dt$$

Remarque

L'intégrale d'une fonction est l'aire sous la courbe, en comptant négativement les parties où la fonction est négative.



Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. **Propriétés**

A. Linéarité

B. Inégalités

C. Inversion des bornes

D. Parité, périodicité

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

VI. Intégrales des fonctions complexes

III. Propriétés

A. Linéarité

B. Inégalités

C. Inversion des bornes

D. Parité, périodicité

Proposition : Linéarité de l'intégrale

f, g CPM sur $I = [a, b]$

λ, μ réels

$$\int_a^b \lambda f(t) + \mu g(t) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt + \mu \int_a^b g(t) \, dt$$

Proposition : Linéarité de l'intégrale

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$$

$$\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$$

Proposition : Linéarité de l'intégrale

L'application $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.

$$f \longmapsto \int_I f$$

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}_m(I, \mathbb{R})^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

Lemme

f fonction CPM sur un segment I .

$\mathcal{E}_1 = \{\text{fonctions en escalier inférieures à } f\}$

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions de $\mathcal{E}_1$ telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x)) = 0$$

Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I$$

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I$$

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

Par définition de l'intégrale de f :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f_n \leq \int_I f \leq \int_I (f_n + \varepsilon_n)$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I$$

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

Par définition de l'intégrale de f et par linéarité :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f_n &\leq \int_I f \leq \int_I (f_n + \varepsilon_n) \\ &\leq \int_I f_n + \int_I \varepsilon_n \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I$$

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

Par définition de l'intégrale de f et par linéarité :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f_n &\leq \int_I f \leq \int_I (f_n + \varepsilon_n) \\ &\leq \int_I f_n + \int_I \varepsilon_n \\ &\leq \int_I f_n + (b - a)\varepsilon_n \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I$$

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

Par définition de l'intégrale de f et par linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f_n \leq \int_I f \leq \int_I f_n + (b - a)\varepsilon_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f - (b - a)\varepsilon_n \leq \int_I f_n \leq \int_I f$$

Démonstration. Soit $\varepsilon_n = \sup_{x \in I} (f(x) - f_n(x))$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in I$$

$$f_n(x) \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon_n$$

Par définition de l'intégrale de f et par linéarité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f_n \leq \int_I f \leq \int_I f_n + (b-a)\varepsilon_n$$

On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I f - (b-a)\varepsilon_n \leq \int_I f_n \leq \int_I f$$

$\varepsilon_n \rightarrow 0$ donc par théorème d'encadrement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$



Démonstration de la linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe f_n et g_n en escalier telles que :

$$f - \frac{1}{2n} \leq f_n \leq f \quad \text{et} \quad g - \frac{1}{2n} \leq g_n \leq g$$

Démonstration de la linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe f_n et g_n en escalier telles que :

$$f - \frac{1}{2n} \leq f_n \leq f \quad \text{et} \quad g - \frac{1}{2n} \leq g_n \leq g$$

Par somme :

$$f + g - \frac{1}{n} \leq f_n + g_n \leq f + g$$

Démonstration de la linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Il existe f_n et g_n en escalier telles que :

$$f - \frac{1}{2n} \leq f_n \leq f \quad \text{et} \quad g - \frac{1}{2n} \leq g_n \leq g$$

Par somme :

$$f + g - \frac{1}{n} \leq f_n + g_n \leq f + g$$

Donc :

$$0 \leq f - f_n \leq \frac{1}{2n} \qquad 0 \leq g - g_n \leq \frac{1}{2n}$$

$$0 \leq (f + g) - (f_n + g_n) \leq \frac{1}{n}$$

Démonstration de la linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq \sup_I (f - f_n) \leq \frac{1}{2n} \qquad 0 \leq \sup_I (g - g_n) \leq \frac{1}{2n}$$

$$0 \leq \sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \leq \frac{1}{n}$$

Démonstration de la linéarité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$0 \leq \sup_I (f - f_n) \leq \frac{1}{2n} \qquad 0 \leq \sup_I (g - g_n) \leq \frac{1}{2n}$$

$$0 \leq \sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \leq \frac{1}{n}$$

Par théorème d'encadrement :

$$\sup_I (f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \qquad \sup_I (g - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Démonstration de la linéarité.

$$\sup_I (f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \qquad \sup_I (g - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f \qquad \int_I g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I g$$

$$\int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I (f + g)$$

Démonstration de la linéarité.

$$\sup_I (f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \qquad \sup_I (g - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I f_n + \int_I g_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f + \int_I g$$

$$\int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I (f + g)$$

Démonstration de la linéarité.

$$\sup_I (f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \sup_I (g - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f + \int_I g$$

$$\int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I (f + g)$$

Linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_I (f_n + g_n) = \int_I f_n + \int_I g_n$$

Démonstration de la linéarité.

$$\sup_I (f - f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \sup_I (g - g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\sup_I (f + g - (f_n + g_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f + \int_I g$$

$$\int_I (f_n + g_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I (f + g)$$

Par unicité de la limite :

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$$

Démonstration de la linéarité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe f_n telle que :

$$f - \frac{1}{|\lambda|n} \leq f_n \leq f$$

Démonstration de la linéarité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe f_n telle que :

$$f - \frac{1}{|\lambda|n} \leq f_n \leq f$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I f \qquad \int_I \lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \lambda f$$

Démonstration de la linéarité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe f_n telle que :

$$f - \frac{1}{|\lambda|n} \leq f_n \leq f$$

D'après le lemme précédent :

$$\lambda \int_I f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_I f \qquad \int_I \lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \lambda f$$

Démonstration de la linéarité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe f_n telle que :

$$f - \frac{1}{|\lambda|n} \leq f_n \leq f$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I \lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_I f \qquad \int_I \lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \lambda f$$

Linéarité pour l'intégrale des fonctions en escalier.

Démonstration de la linéarité.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe f_n telle que :

$$f - \frac{1}{|\lambda|n} \leq f_n \leq f$$

D'après le lemme précédent :

$$\int_I \lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \int_I f \qquad \int_I \lambda f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_I \lambda f$$

Par unicité de la limite :

$$\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$$



III. Propriétés

A. Linéarité

B. Inégalités

C. Inversion des bornes

D. Parité, périodicité

Proposition : Croissance de l'intégrale

f, g CPM sur $I = [a, b]$.

$$\forall t \in [a, b] \quad f(t) \leq g(t)$$

$$\implies \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt$$

Proposition : Croissance de l'intégrale

f, g CPM sur $I = [a, b]$.

$$\left(\forall t \in [a, b] \quad f(t) \leq g(t) \right)$$

$$\implies \left(\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt \right)$$

Proposition : Croissance de l'intégrale

L'application $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

$$f \longmapsto \int_I f$$

$$f \leq g \quad \implies \quad \int_I f \leq \int_I g$$

Proposition : Croissance de l'intégrale

L'application $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

$$f \longmapsto \int_I f$$

$$f \leq g \quad \implies \quad \int_I f \leq \int_I g$$

Démonstration. La fonction nulle est en escalier et inférieure à $g - f$, donc par définition de l'intégrale :

$$\int_I (g - f) \geq 0$$

Proposition : Croissance de l'intégrale

L'application $\mathcal{C}_m(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

$$f \longmapsto \int_I f$$

$$f \leq g \quad \implies \quad \int_I f \leq \int_I g$$

Démonstration. Par définition de l'intégrale :

$$\int_I (g - f) \geq 0$$

Par linéarité : $\int_I f \leq \int_I g$



Théorème : Positivité

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive

$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

Théorème : Positivité

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive

$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

Corollaire

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de signe constant

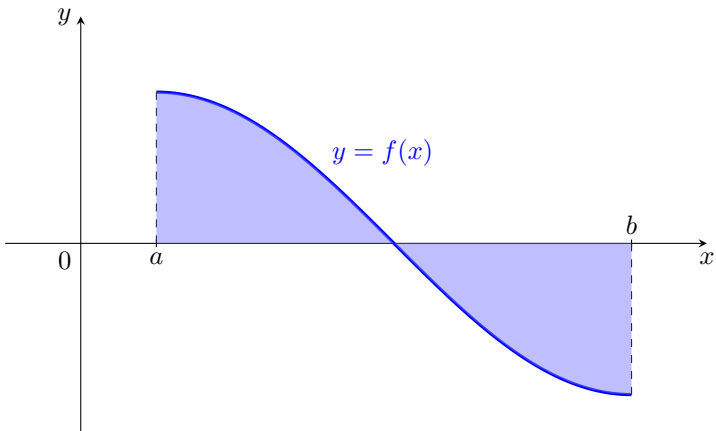
$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \iff \quad f = 0$$

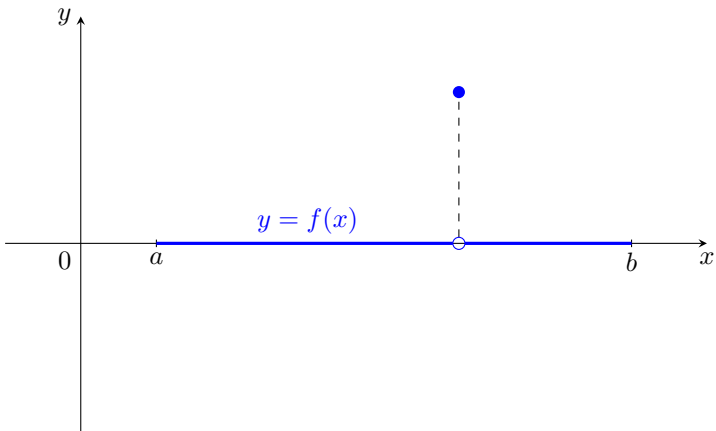
Théorème : Positivité

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive

$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

Contre-exemples.



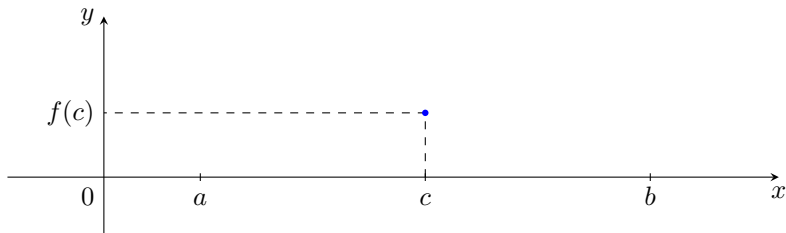


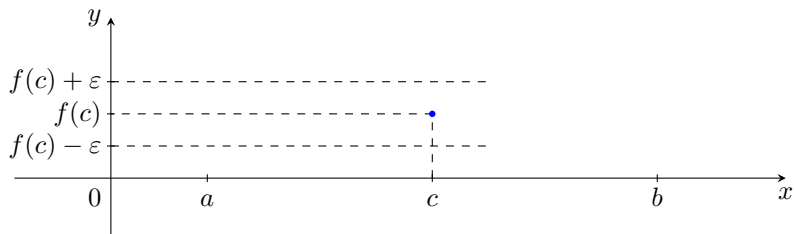
Théorème : Positivité

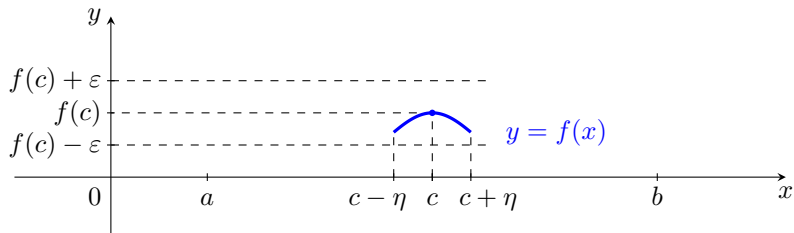
$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive

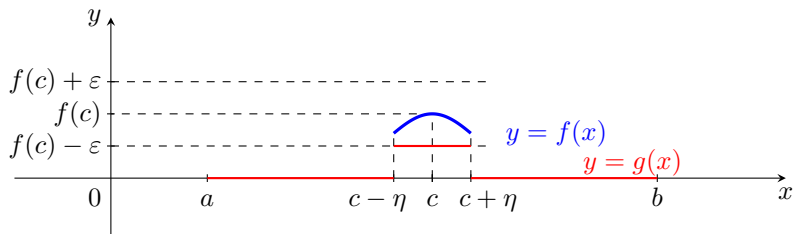
$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

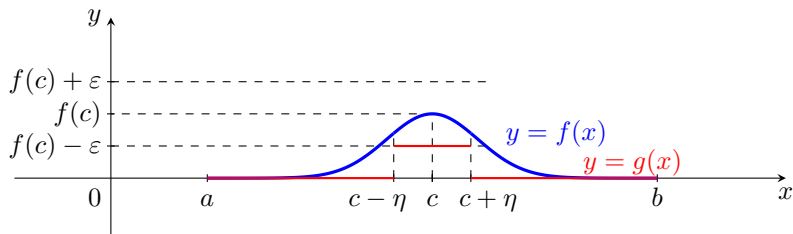
Démonstration.

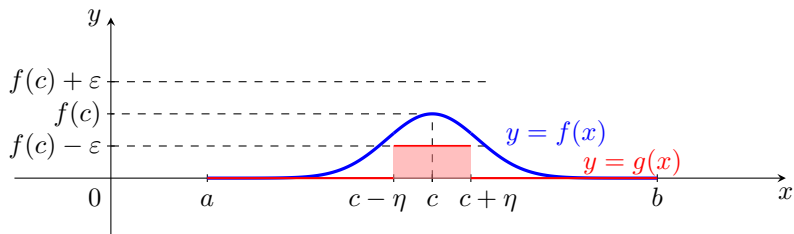












Théorème : Positivité

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive

$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

Démonstration.

Théorème : Positivité

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et positive

$$\int_a^b f(t) \, dt = 0 \quad \implies \quad f = 0$$

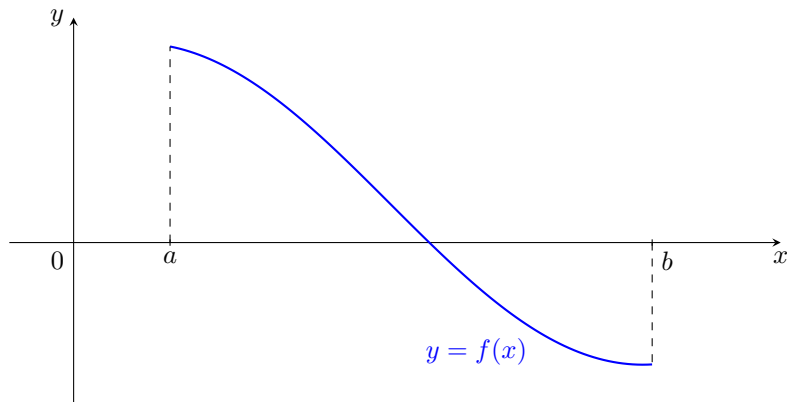
Démonstration.

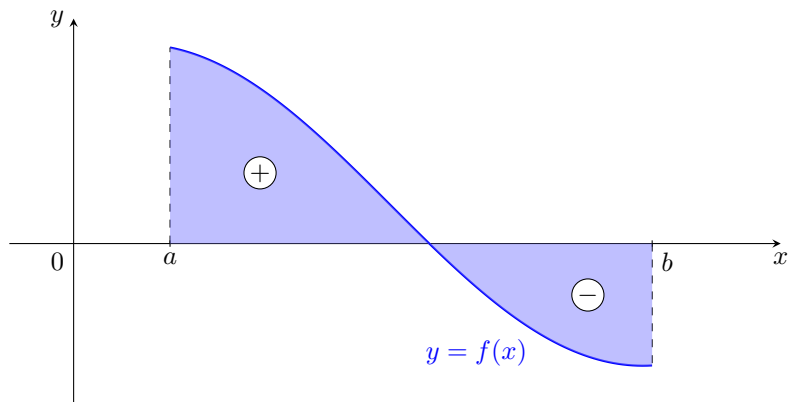


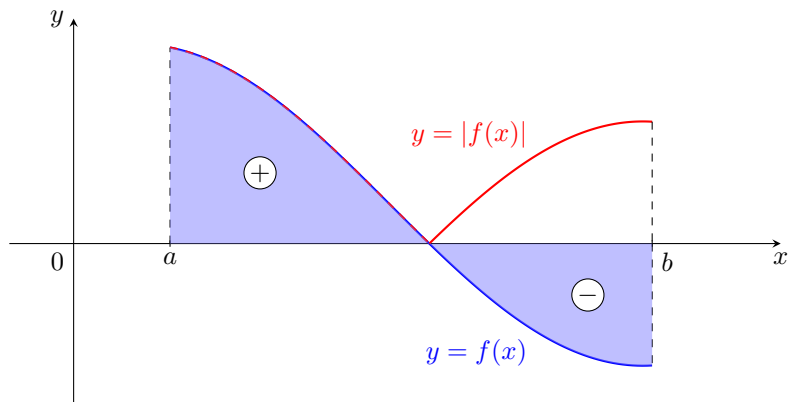
Proposition : Inégalité triangulaire

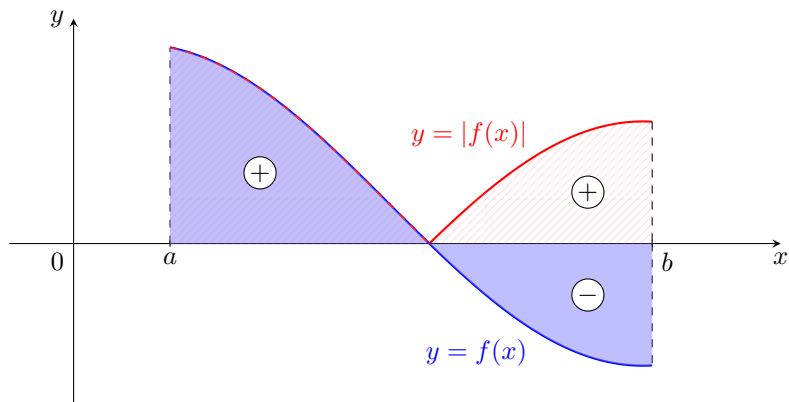
$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM.

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$









Proposition : Inégalité triangulaire

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM.

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Démonstration.

Proposition : Inégalité triangulaire

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM.

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Démonstration.



▷ Exercice 1.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \int_0^\pi \frac{t^n}{n!} \cos t \, dt$$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |I_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

En déduire la limite de la suite (I_n) .

III. Propriétés

A. Linéarité

B. Inégalités

C. Inversion des bornes

D. Parité, périodicité

Définition

Si $b < a$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt$$

Définition

Si $b < a$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt$$

Proposition : Relation de Chasles

Pour tous réels a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt$$

Définition

Si $b < a$:

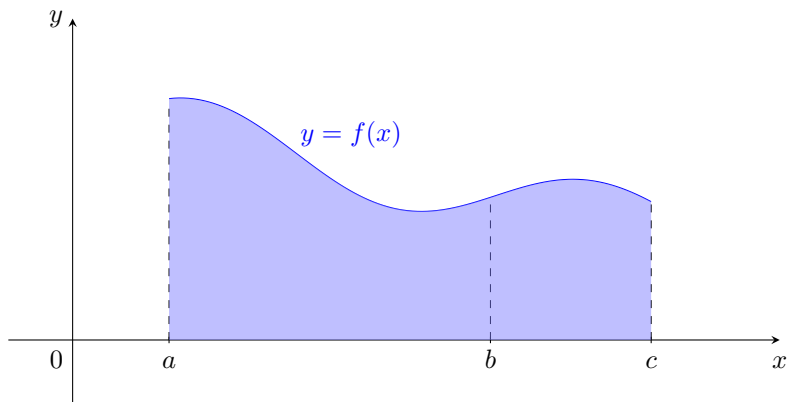
$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt$$

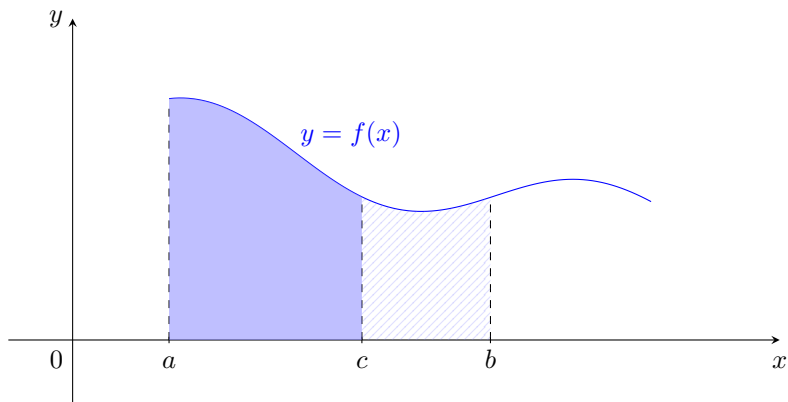
Proposition : Relation de Chasles

Pour tous réels a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt$$

Démonstration.





Définition

Si $b < a$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt$$

Proposition : Relation de Chasles

Pour tous réels a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt$$

Démonstration.

Définition

Si $b < a$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = - \int_b^a f(t) \, dt$$

Proposition : Relation de Chasles

Pour tous réels a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt$$

Démonstration.



Remarque

La croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire ne sont valables que si $a \leq b$.

Remarque

La croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire ne sont valables que si $a \leq b$.

$$f \leq g \quad \text{et} \quad a \leq b \quad \implies \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Remarque

La croissance de l'intégrale et l'inégalité triangulaire ne sont valables que si $a \leq b$.

$$f \leq g \quad \text{et} \quad a \leq b \quad \implies \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

$$a \leq b \quad \implies \quad \left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Proposition

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie si :

Proposition

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie si :

f est CPM sur le segment $[a, b]$.

Proposition

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie si :

f est CPM sur le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$.

Proposition

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie si :

f est CPM sur le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$.

Soit f CPM sur un intervalle I et $a \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie sur :

Proposition

L'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ est définie si :

f est CPM sur le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$.

Soit f CPM sur un intervalle I et $a \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ est définie sur : I

Proposition

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est définie si :

f est CPM sur le segment $[a, b]$ ou $[b, a]$.

Soit f CPM sur un intervalle I et $a \in I$.

Alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est définie sur : I

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ et $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos t}$

Quel est l'ensemble de définition de f ? Et de F ?

III. Propriétés

A. Linéarité

B. Inégalités

C. Inversion des bornes

D. Parité, périodicité

Proposition

$a > 0$ f CPM sur $[-a, a]$

► Si f est impaire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt =$

► Si f est paire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt =$

Proposition

$a > 0$ f CPM sur $[-a, a]$

▶ Si f est impaire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$

▶ Si f est paire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt =$

Proposition

$a > 0$ f CPM sur $[-a, a]$

► Si f est impaire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$

► Si f est paire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt$

Proposition

$a > 0$ f CPM sur $[-a, a]$

► Si f est impaire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 0$

► Si f est paire alors : $\int_{-a}^a f(t) \, dt = 2 \int_0^a f(t) \, dt$

► Exercice 2.

Démontrer cette proposition grâce au changement de variable $u = -t$.

Proposition

Soit f CPM sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t) \, dt =$$

Proposition

Soit f CPM sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t) \, dt = \int_0^T f(t) \, dt$$

Proposition

Soit f CPM sur $\mathbb{R}$ et T -périodique. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{a+T} f(t) \, dt = \int_0^T f(t) \, dt$$

▷ Exercice 3.

Démontrer cette proposition.

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

A. Méthode des rectangles

B. Méthode des trapèzes

V. Théorèmes

VI. Intégrales des fonctions complexes

IV. Sommes de Riemann

A. Méthode des rectangles

B. Méthode des trapèzes

Définition

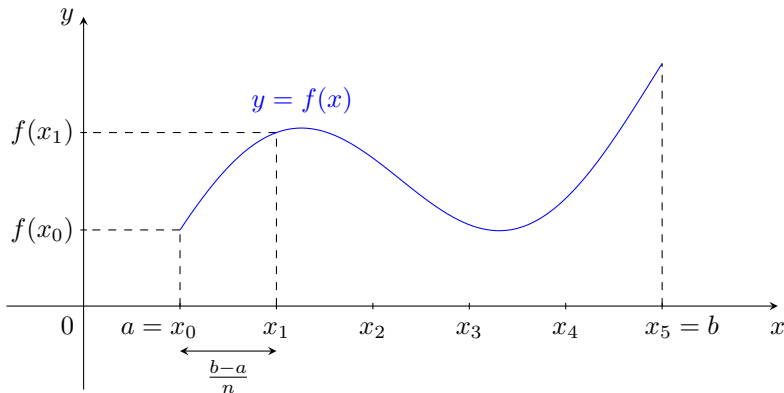
$$\forall k = 0 \dots n \quad x_k = a + k \frac{b-a}{n}$$

Sommes de Riemann :

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

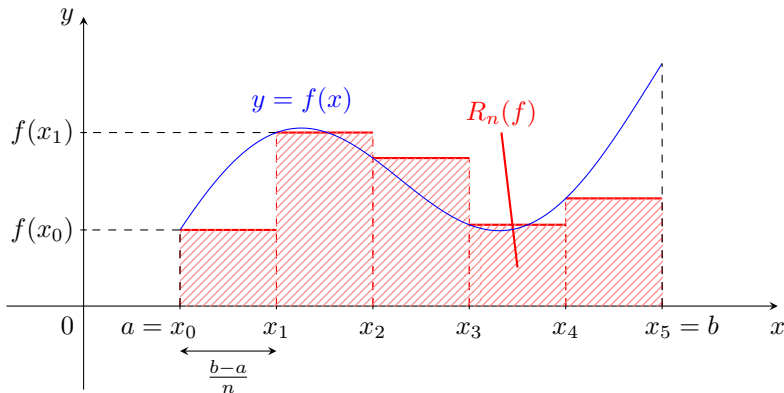
Définition

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$



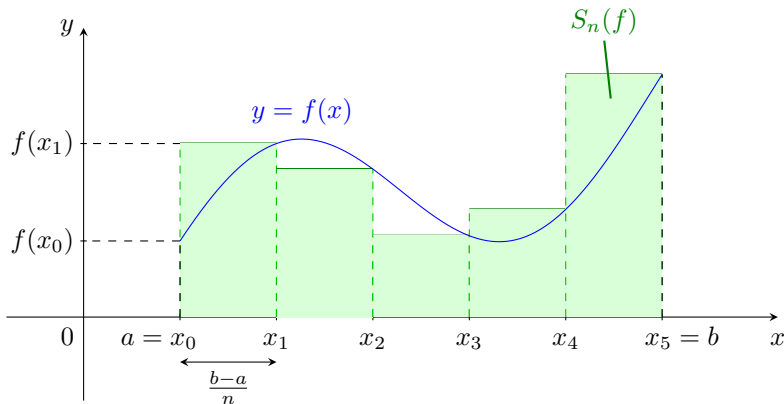
Définition

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$



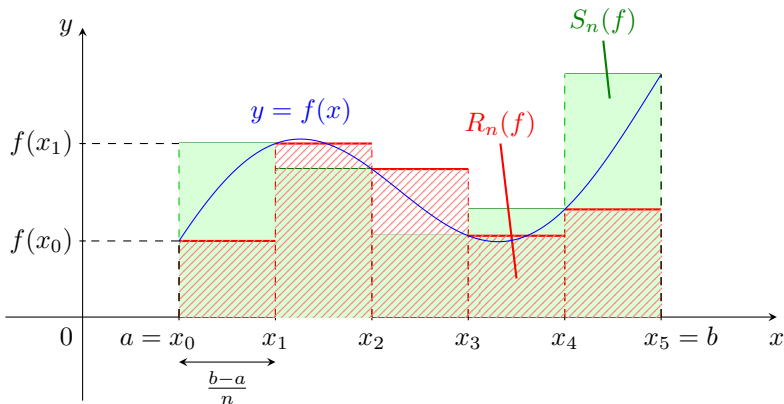
Définition

$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \qquad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$



Définition

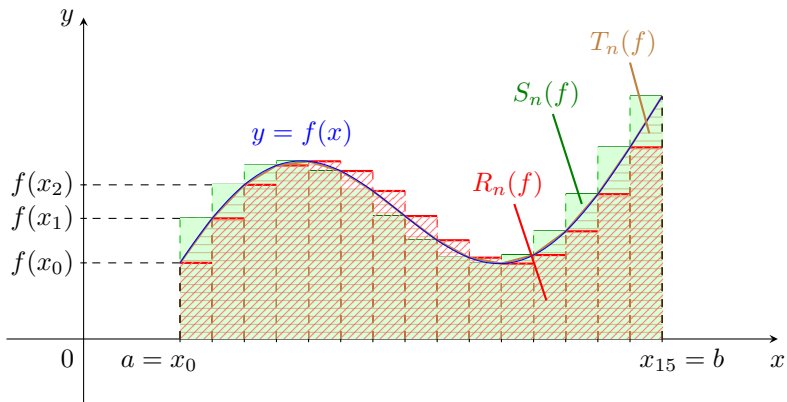
$$R_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \quad S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$



Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) \, dt$.



Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) \, dt$.

Démonstration.

Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

Démonstration.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = R_n + \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$$

$$\text{Donc} \quad R_n \rightarrow \int_a^b f \quad \implies \quad S_n \rightarrow \int_a^b f$$

Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

Démonstration.

On suppose que f est lipschitzienne.

Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

Démonstration.

On suppose que f est lipschitzienne.



Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) \, dt$.

Remarque

Si f lipschitzienne alors la convergence est en $O(\frac{1}{n})$:

$$\left(R_n - \int_a^b f(t) \, dt \right) = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

▷ Exercice 4.

Calculer

$$I_2 = \int_1^3 t^2 dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_0^1 e^t dt$$

grâce au théorème ci-dessus.

Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

Exemple 2

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Théorème

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ CPM

$(R_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers $\int_a^b f(t) dt$.

▷ Exercice 5.

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$

IV. Sommes de Riemann

A. Méthode des rectangles

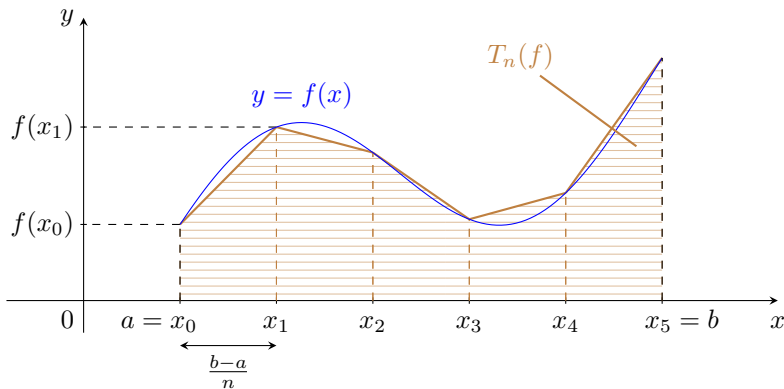
B. Méthode des trapèzes

Définition : Méthode des trapèzes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

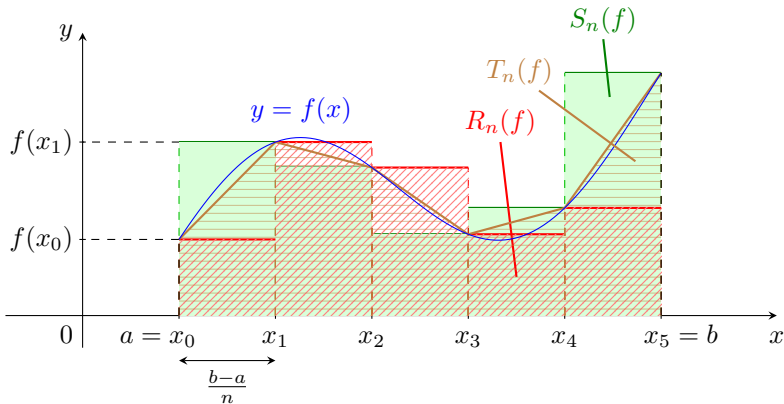
Définition : Méthode des trapèzes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$



Définition : Méthode des trapèzes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$



Définition : Méthode des trapèzes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

Remarque

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{R_n + S_n}{2}$$

Définition : Méthode des trapèzes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

Remarque

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{R_n + S_n}{2}$$

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_a^b f(t) dt$ si f est continue.

Définition : Méthode des trapèzes

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}$$

Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors la convergence est en $O(\frac{1}{n^2})$:

$$\left(T_n - \int_a^b f(t) \, dt \right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

A. Théorème fondamental

B. Formules de Taylor

VI. Intégrales des fonctions complexes

V. Théorèmes

A. Théorème fondamental

B. Formules de Taylor

Théorème Fondamental

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f .

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

Théorème Fondamental

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f .

$$x \longmapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

Corollaire 1

Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive.

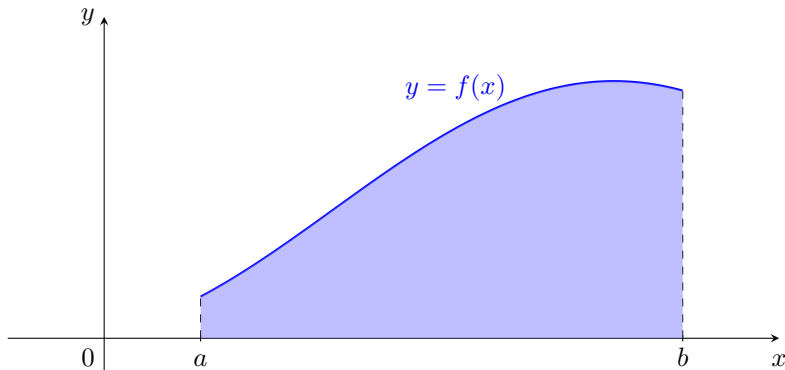
Définition

Valeur moyenne de f :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$

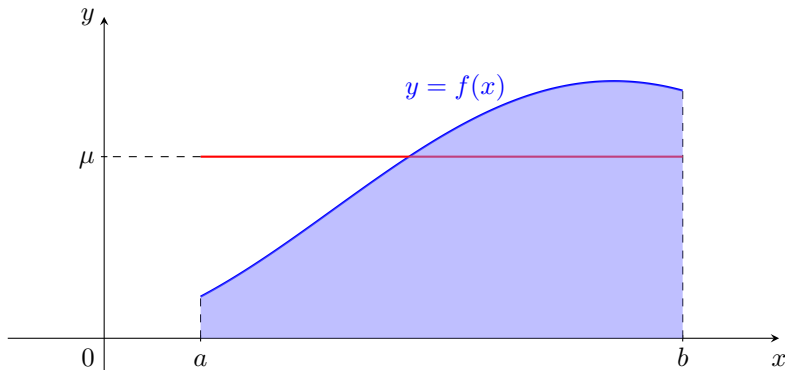
Définition : valeur moyenne de f

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$



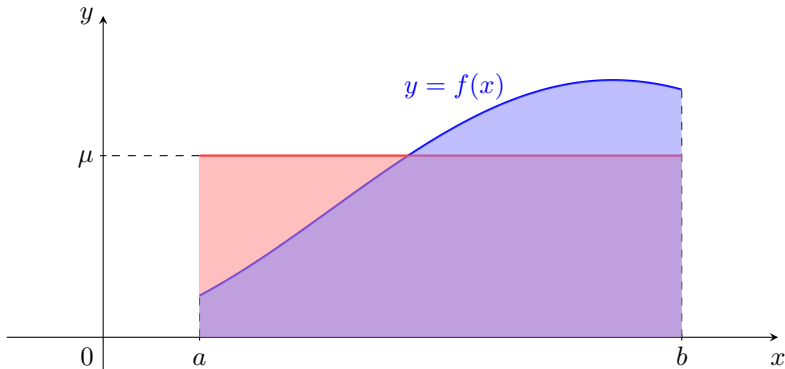
Définition : valeur moyenne de f

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$



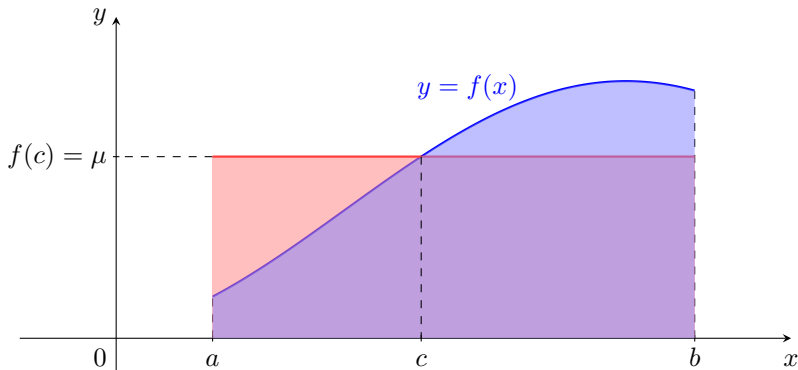
Définition : valeur moyenne de f

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$



Proposition

Une fonction continue atteint sa moyenne.



Définition

Valeur moyenne de f :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$

Proposition

Si f est continue sur $[a, b]$ alors :

$$\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) \, dt$$

Une fonction continue atteint sa moyenne.

Démonstration. f est continue sur le segment $[a, b]$.

Soit $[m, M] = f([a, b])$. Alors :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Démonstration. f est continue sur le segment $[a, b]$.

Soit $[m, M] = f([a, b])$. Alors :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_a^b m \, dt \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b M \, dt$$

Démonstration. f est continue sur le segment $[a, b]$.

Soit $[m, M] = f([a, b])$. Alors :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b - a)$$

Démonstration. f est continue sur le segment $[a, b]$.

Soit $[m, M] = f([a, b])$. Alors :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b - a)$$

Division par $(b - a)$:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) \, dt \leq M$$

Démonstration. f est continue sur le segment $[a, b]$.

Soit $[m, M] = f([a, b])$. Alors :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a)$$

Division par $(b-a)$:

$$m \leq \mu \leq M$$

Démonstration. f est continue sur le segment $[a, b]$.

Soit $[m, M] = f([a, b])$. Alors :

$$\forall t \in [a, b] \quad m \leq f(t) \leq M$$

Par croissance de l'intégrale :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) \, dt \leq M(b-a)$$

Division par $(b-a)$:

$$m \leq \mu \leq M$$

Donc il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \mu$.



Théorème Fondamental

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f .
$$x \longmapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

Démonstration.

Théorème Fondamental

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f .
$$x \longmapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

Démonstration.



Théorème Fondamental

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors $\Phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f .
$$x \longmapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

Corollaire 2

- (i) Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- (ii) Si F est une primitive de f alors pour tout $b \in I$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

Corollaire 2

- (i) Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- (ii) Si F est une primitive de f alors pour tout $b \in I$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

Remarques

- (i) On peut donc calculer une intégrale grâce aux primitives.

Corollaire 2

- (i) Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
- (ii) Si F est une primitive de f alors pour tout $b \in I$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

Remarques

- (ii) Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ alors :

$$\int_a^b f'(t) \, dt = f(b) - f(a)$$

Corollaire 2

- (i) Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
(ii) Si F est une primitive de f alors pour tout $b \in I$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration.

Corollaire 2

- (i) Φ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .
(ii) Si F est une primitive de f alors pour tout $b \in I$:

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

Démonstration.



Exemple 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

a. f bien définie et impaire

Exemple 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

- a. f bien définie et impaire
- b. f dérivable

Exemple 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

- a. f bien définie et impaire
- b. f dérivable
- c. f de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis DL_3 en 0

Exemple 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

- a. f bien définie et impaire
- b. f dérivable
- c. f de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis DL_3 en 0
- d. (i) $\forall t \in [1, +\infty[\quad e^{-t^2/2} \leq e^{-t/2}$

Majoration de f sur $[1, +\infty[$

Exemple 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

- a. f bien définie et impaire
- b. f dérivable
- c. f de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis DL_3 en 0
- d. (i) $\forall t \in [1, +\infty[\quad e^{-t^2/2} \leq e^{-t/2}$

Majoration de f sur $[1, +\infty[$

(ii) Limite de f en $+\infty$

Exemple 3

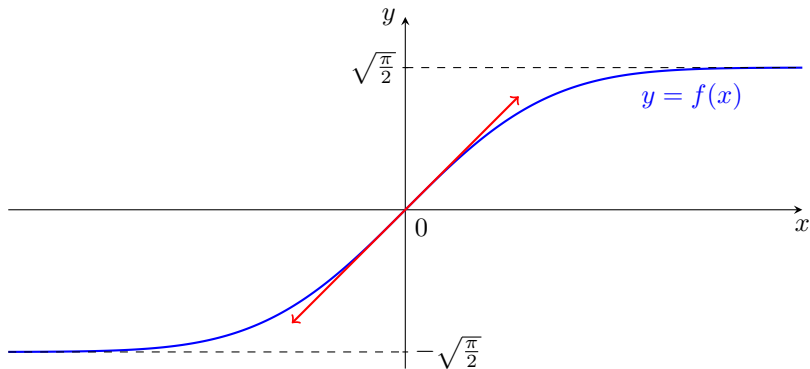
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2/2} dt$$

- a. f bien définie et impaire
- b. f dérivable
- c. f de classe $\mathcal{C}^\infty$ puis DL_3 en 0
- d. (i) $\forall t \in [1, +\infty[\quad e^{-t^2/2} \leq e^{-t/2}$

Majoration de f sur $[1, +\infty[$

(ii) Limite de f en $+\infty$

- e. Tracé



Exemple 4

$$I =]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

Exemple 4

$$I =]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

a. $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ admet une primitive sur I

Exemple 4

$$I =]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

- a. $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ admet une primitive sur I
- b. Φ bien définie sur I

Exemple 4

$$I =]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

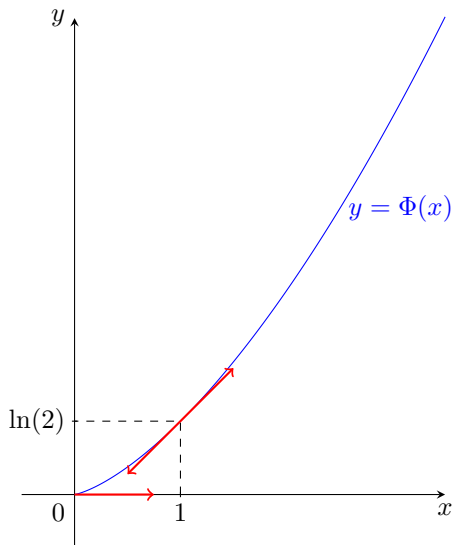
- a. $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ admet une primitive sur I
- b. Φ bien définie sur I
- c. Φ dérivable sur I

Exemple 4

$$I =]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

- a. $f : t \mapsto \frac{1}{\ln t}$ admet une primitive sur I
- b. Φ bien définie sur I
- c. Φ dérivable sur I
- d. Mêmes question sur $J =]0, 1[$.
Limite et classe $\mathcal{C}^1$ de Φ en 1.



▷ **Exercice 6.**

$$I =]1, +\infty[$$

$$\forall x \in I \quad \Phi(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt$$

a. Calculer $A(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$

b. Démontrer que pour tout $x \in I$:

$$xA(x) \leq \Phi(x) \leq x^2 A(x)$$

c. Justifier que Φ peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.

d. Donner un DL de Φ en $x = 1$ à l'ordre 3.

▷ Exercice 7.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \int_2^{2x} \ln t \, dt$$

$$f_2(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} \, dt$$

$$f_3(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} \, dt$$

$$f_4(x) = \int_{\frac{1}{\sqrt{x}}}^{\sqrt{x}} \frac{t \, dt}{1 + t^4}$$

V. Théorèmes

A. Théorème fondamental

B. Formules de Taylor

Théorème

Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle $a \in I$ $n \in \mathbb{N}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

$\forall x \in I$

$$\begin{aligned} f(x) = & f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \\ & \dots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} dt \end{aligned}$$

Théorème

Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle $a \in I$ $n \in \mathbb{N}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

$\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Théorème

Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle $a \in I$ $n \in \mathbb{N}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

$\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Exemple 5

Cas particuliers où $n = 0$ et $n = 1$.

Remarque

Formule de Taylor avec reste intégral :

pour tout $x \in I$

Formule de Taylor-Young :

pour x au voisinage de a

Formule de Taylor avec reste intégral

Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ alors pour tout $x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + \cdots \\ \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x - t)^n}{n!} dt$$

Formule de Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors au voisinage de $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2} + \dots$$

$$\dots + f^{(n)}(a)\frac{(x - a)^n}{n!} + o_a((x - a)^n)$$

Théorème

Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle $a \in I$ $n \in \mathbb{N}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

$\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Démonstration.

Théorème

Formule de Taylor avec reste intégral

I intervalle $a \in I$ $n \in \mathbb{N}$

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

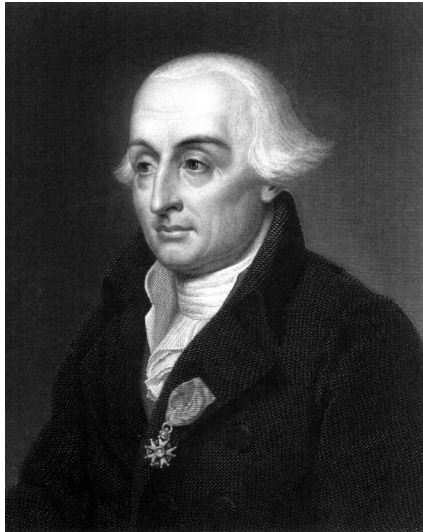
$\forall x \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Démonstration.



Joseph-Louis Lagrange (Italie - France)
1736 – 1813



Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque

(i) Il s'agit d'une majoration du reste intégral.

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque

(ii) Si x est proche de a , le majorant est très petit.

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration.

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Démonstration.



Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 6

(i) Cas $n = 0$

Théorème - Inégalité de Taylor-Lagrange

- ▶ f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I intervalle
- ▶ $a \in I$
- ▶ M un majorant de $|f^{(n+1)}|$

Alors pour tout $x \in I$:

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemple 6

(ii) Cas $n = 1$

▷ Exercice 8.

Appliquer l'ITL à la fonction $\exp$ avec $a = 0$, $x = 1$,
 $n \in \mathbb{N}$.

En déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

Chapitre A11. Intégration

I. Continuité uniforme

II. Définition de l'intégrale

III. Propriétés

IV. Sommes de Riemann

V. Théorèmes

VI. Intégrales des fonctions complexes

Définition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

Définition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

▷ Exercice 9.

Calculer $\int_0^\pi e^{it} dt$ de deux manières différentes.

Définition

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue

$$\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$$

▷ Exercice 10.

Calculer : $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i} dt$

Remarque

Valides :

- ▶ Linéarité
- ▶ Relation de Chasles
- ▶ Intégration par parties
- ▶ Changement de variable
- ▶ Formules de Taylor

Non valide :

- ▶ Croissance

Proposition : Inégalité triangulaire

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue

$$\underbrace{\left| \int_a^b f(t) \, dt \right|}_{\text{module}} \leq \int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\text{module}} \, dt$$

Démonstration.

On note $\int_a^b f = re^{i\theta}$ puis $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$

Démonstration.

On note $\int_a^b f = re^{i\theta}$ puis $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$

Alors $\int_a^b g(t) \, dt = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) \, dt = r \in \mathbb{R}_+$

Démonstration.

On note $\int_a^b f = re^{i\theta}$ puis $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$

Alors $\int_a^b g(t) dt = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = r \in \mathbb{R}_+$

Or $\int_a^b g(t) dt = \underbrace{\int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt}_r + i \underbrace{\int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt}_0$

Démonstration.

On note $\int_a^b f = re^{i\theta}$ puis $g(t) = e^{-i\theta} f(t)$

Alors $\int_a^b g(t) dt = e^{-i\theta} \int_a^b f(t) dt = r \in \mathbb{R}_+$

Or $\int_a^b g(t) dt = \underbrace{\int_a^b \operatorname{Re}(g(t)) dt}_r + i \underbrace{\int_a^b \operatorname{Im}(g(t)) dt}_0$

$$r = \left| \int_a^b \operatorname{Re}(g) \right| \leq \int_a^b |\operatorname{Re}(g)| \leq \int_a^b |g| = \int_a^b |f| \quad \square$$

Remarque : Inégalité des accroissements finis dans le cas complexe

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et M un majorant de $|f'|$. Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Prochain chapitre

Chapitre B11
Matrices
et applications linéaires