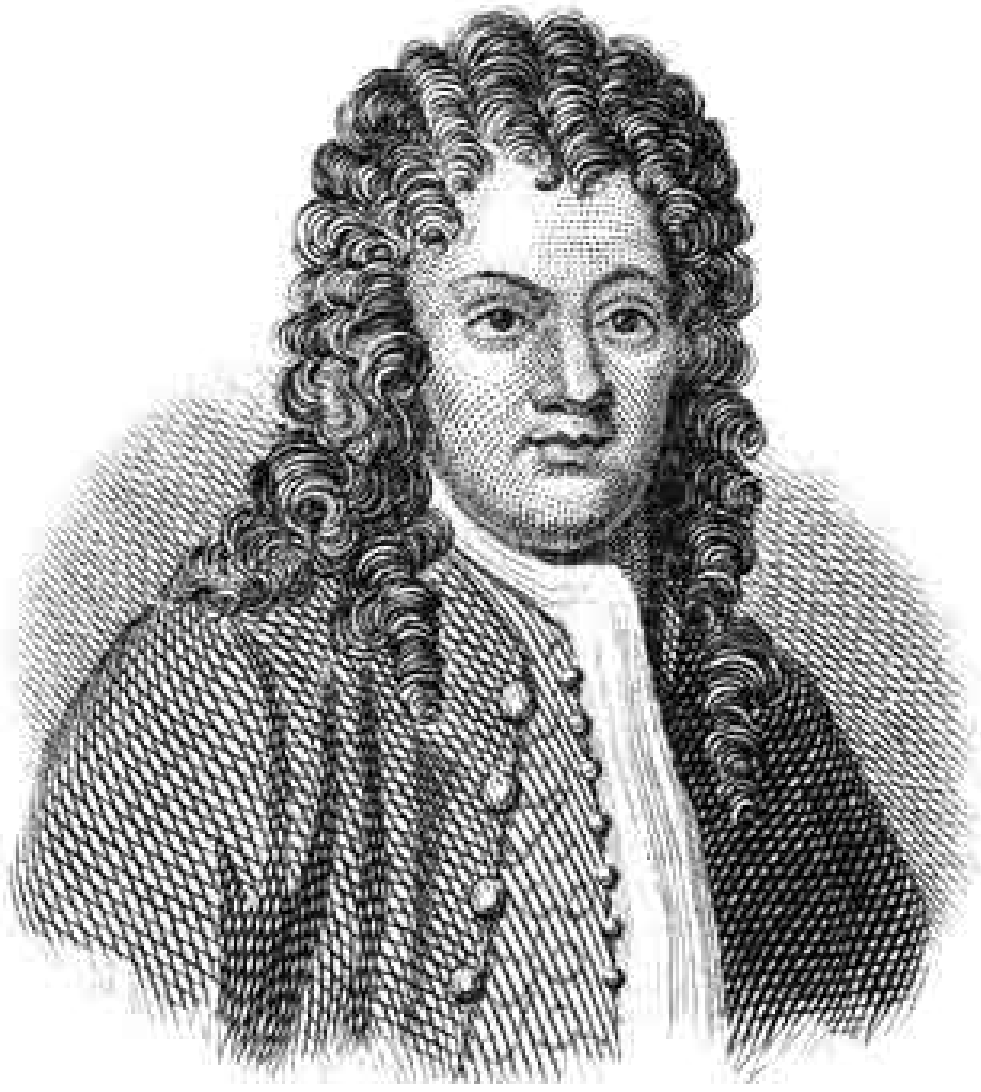
Mathématiques

Chapitre A10
Développements limités

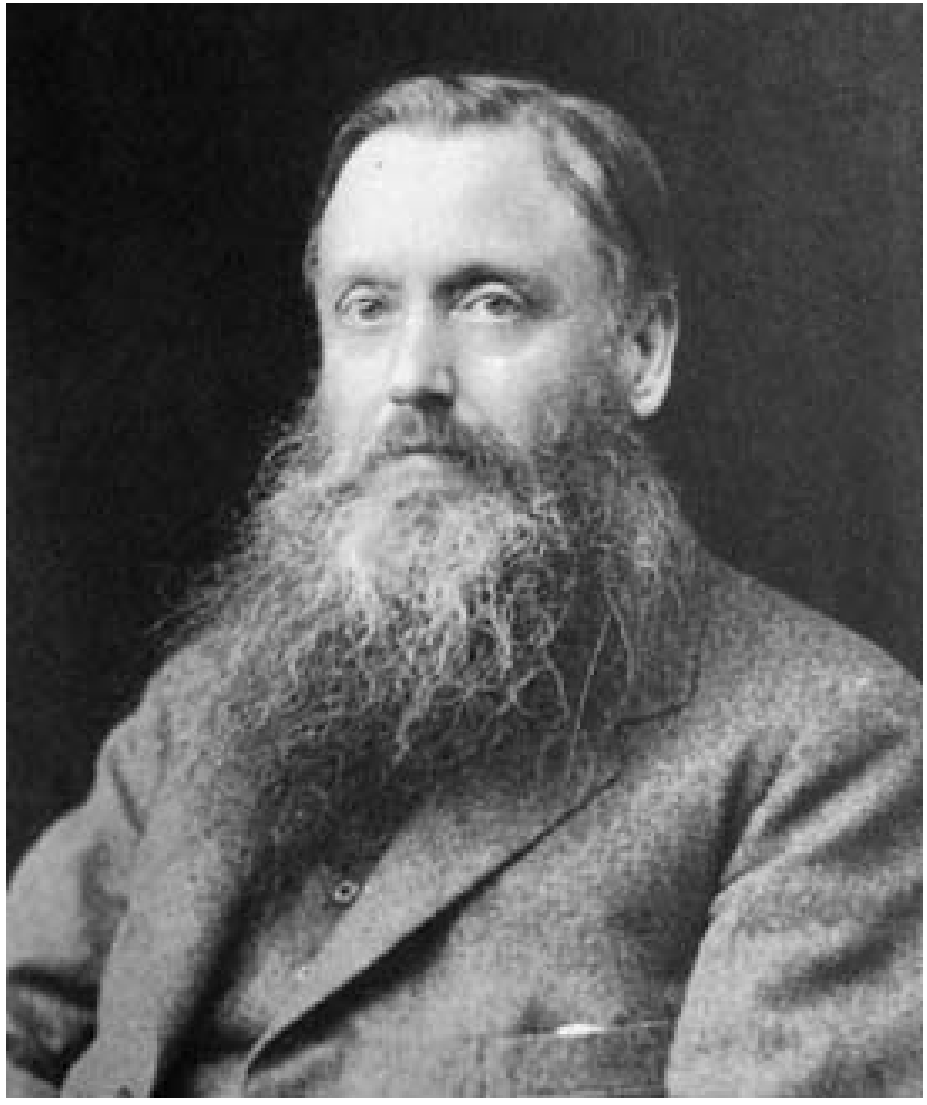
MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Brook Taylor (Angleterre) 1685 – 1731



William Henry Young
(Angleterre) 1863 – 1942



Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités

A. Définition

B. Propriétés

C. Développements limités des fonctions usuelles

II. Calculs de développements limités

III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

IV. Applications

D : partie de $\mathbb{R}$ telle que $0 \in \overline{D}$

$D = \mathbb{R}$ $\qquad$ $D = \mathbb{R}^*$

$D = \mathbb{R}_+$ $\qquad$ $D = \mathbb{R}_+^*$

$D =]-1, 1[$ $\qquad$ etc.

Chapitre A10. Développements limités

I. **Généralités**

A. Définition

B. Propriétés

C. Développements limités des fonctions usuelles

Définition

Développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

Définition

Développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

Remarque

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Définition

Développement limité en 0 à l'ordre n :

$$f(x) \underset{(0)}{=} \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{o\left(x^n\right)}_{\text{reste}}$$

Remarque

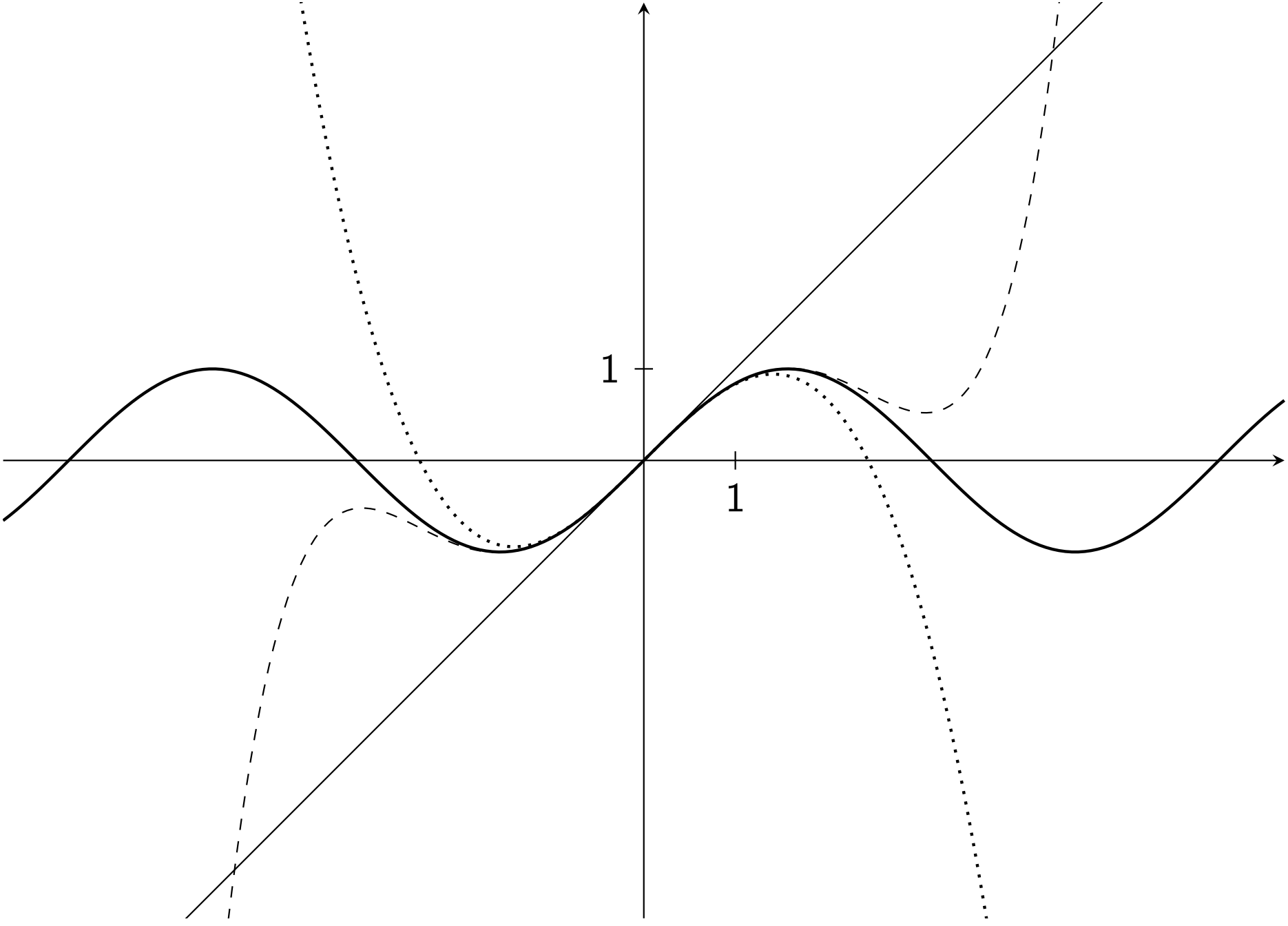
$$f(x) = \underbrace{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n}_{\text{partie régulière}} + \underbrace{x^n \varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

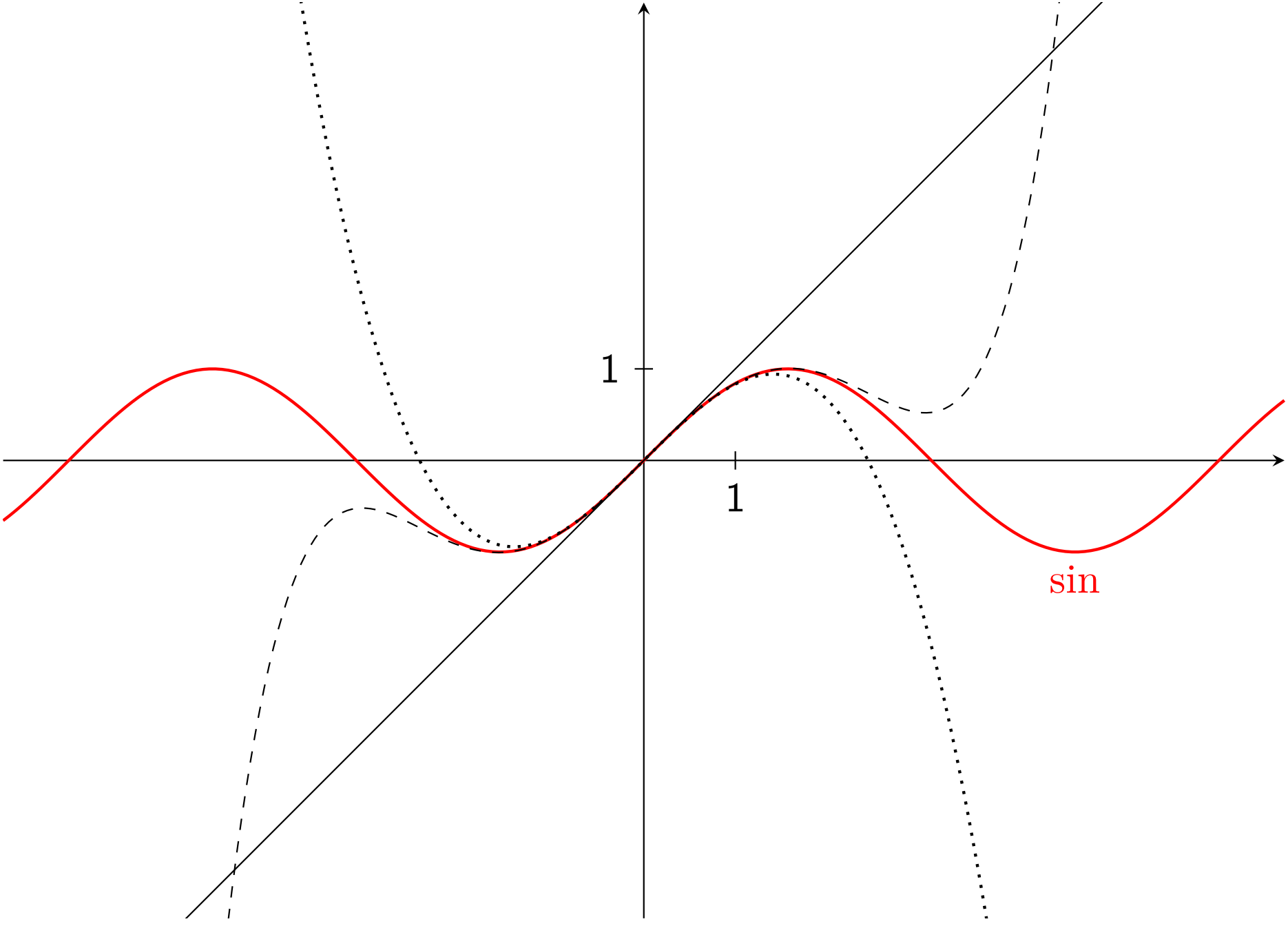
avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

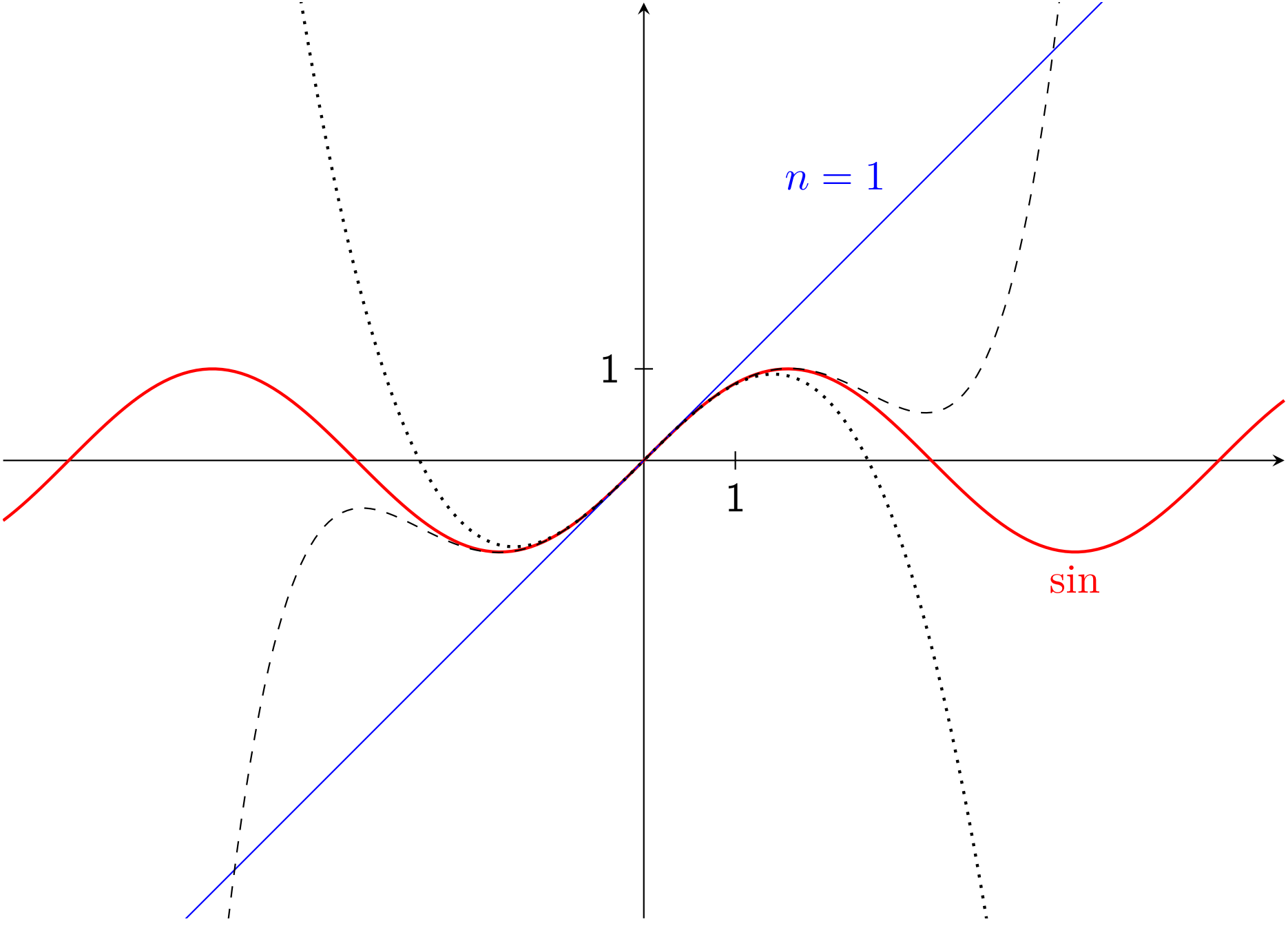
Exemples

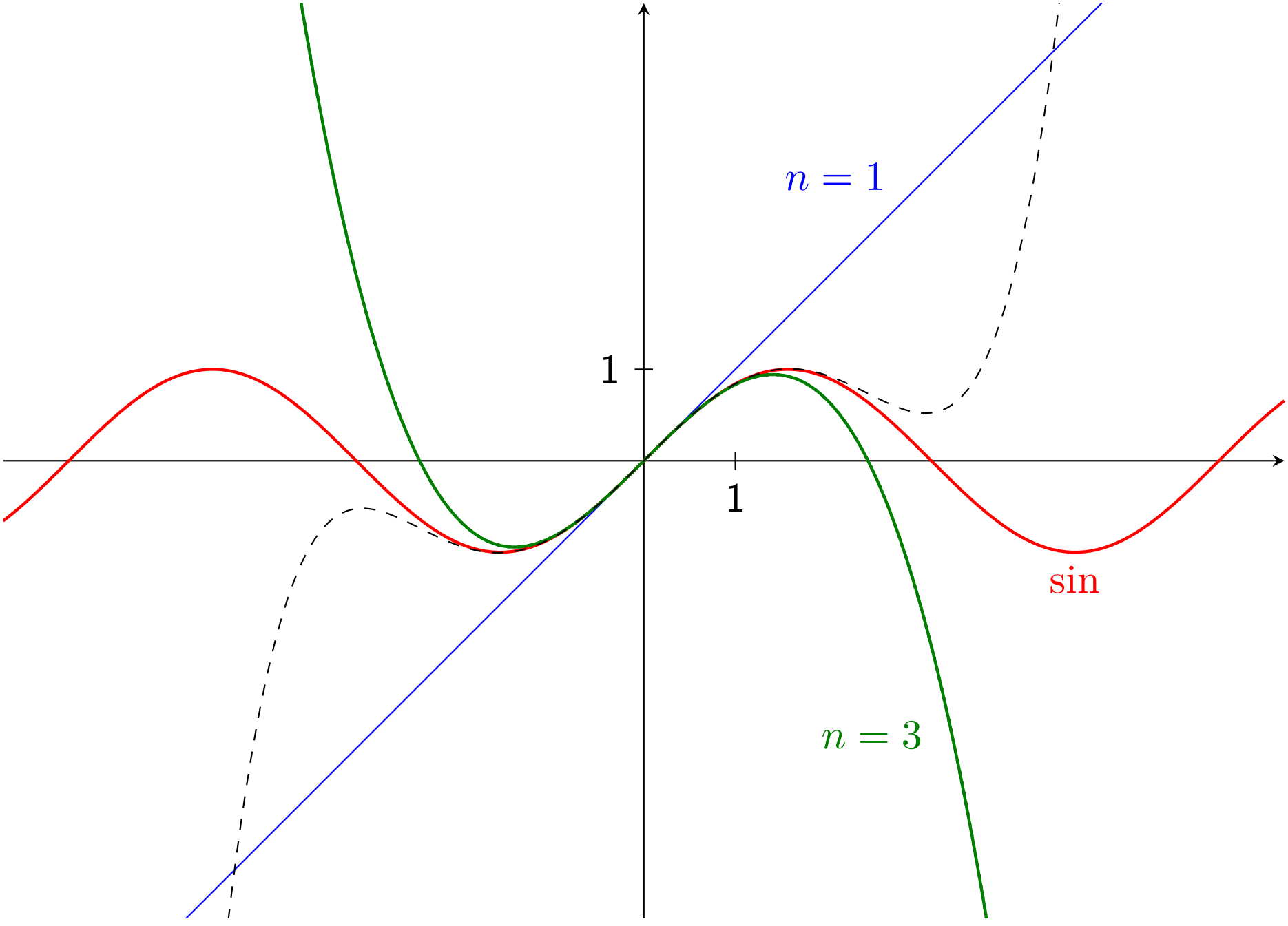
(i) Développements limités en 0 du sinus :

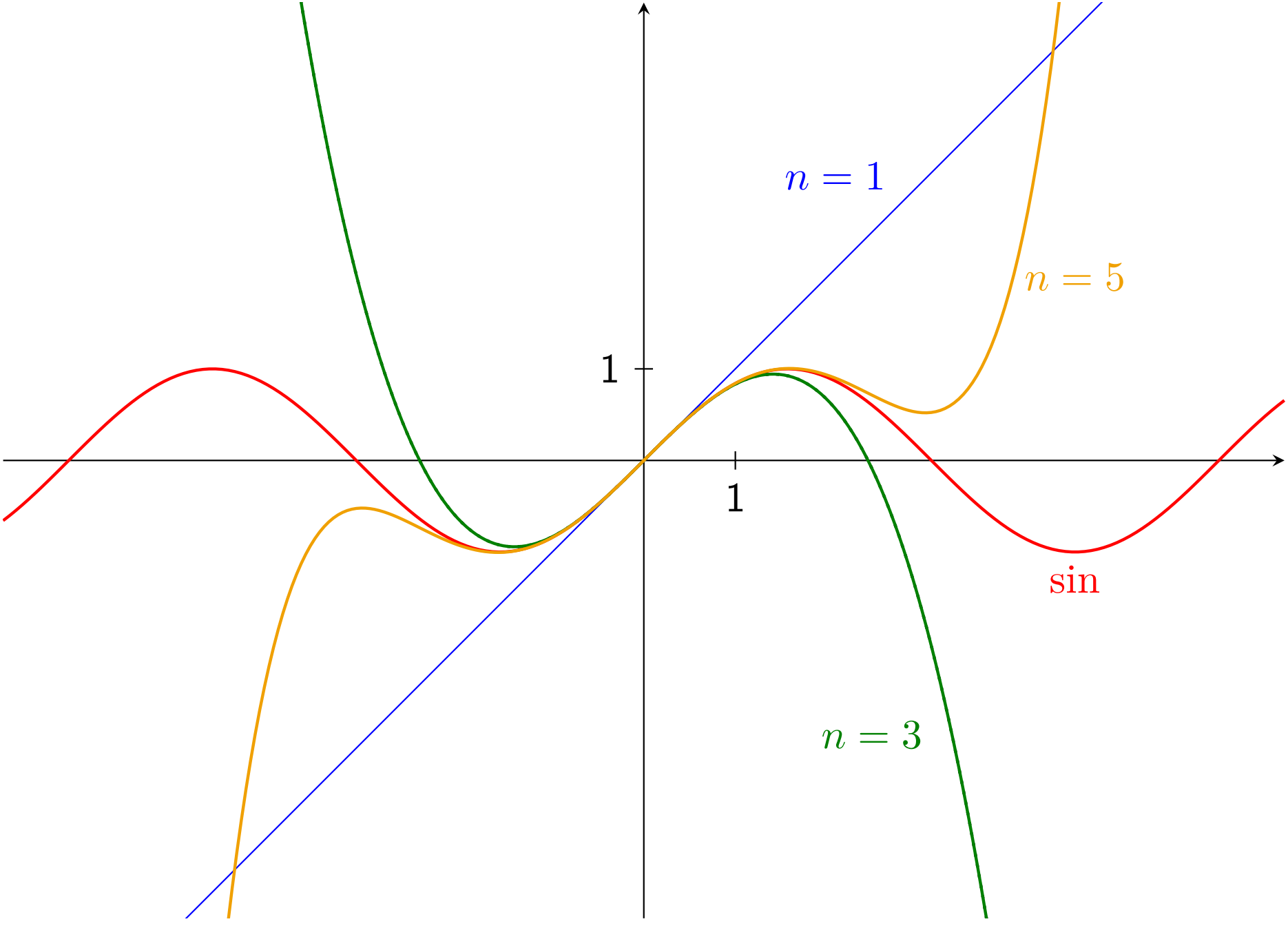
$$\begin{aligned}
\sin x &\underset{(0)}{=} x + o(x) \\
&\underset{(0)}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
&\underset{(0)}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)
\end{aligned}$$

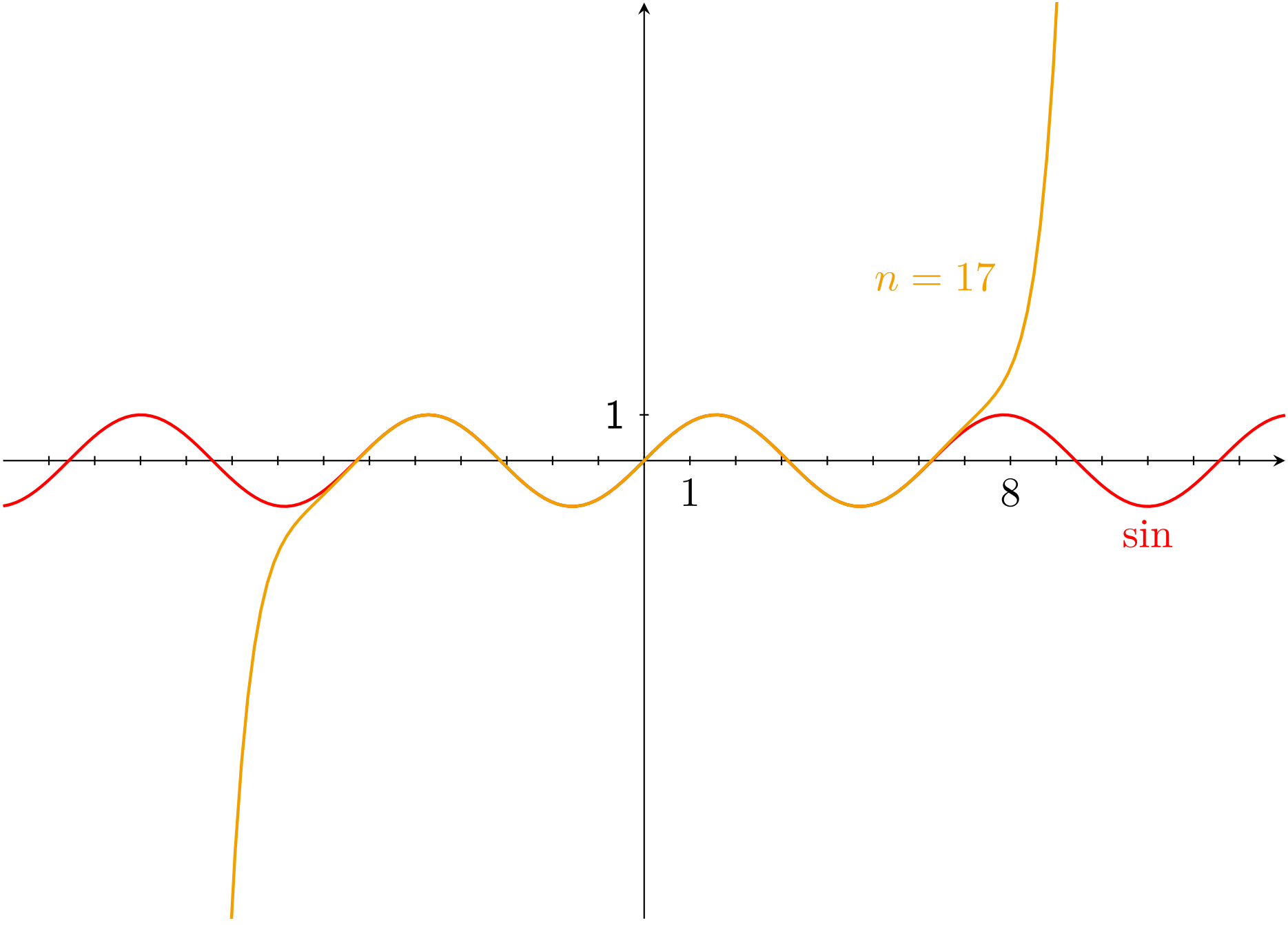

1
1


1
1
sin


$n = 1$
1
1
sin


$n = 1$
1
1
sin
$n = 3$


$n = 1$
$n = 5$
1
1
sin
$n = 3$


$n = 17$
1
1
8
sin

Exemples

(ii) Développement limité de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en 0.

Exemples

(iii) La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'admet pas de développement limité en 0 à l'ordre 1.

I. **Généralités**

A. Définition

B. Propriétés

C. Développements limités des fonctions usuelles

Proposition

f admet un DL à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0.

Cette limite est alors c_0.

Exemple : ordres 0 à 3

$$
\begin{aligned}
f(x) &\underset{(0)}{=} c_0 + o(1) \\
&\underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + o(x) \\
&\underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + o(x^2) \\
&\underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + o(x^3)
\end{aligned}
$$

Proposition

f admet un DL à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0.
Cette limite est alors c_0.

Démonstration.

$$f \text{ admet un développement limité en } 0$$

$$\iff \quad \exists c_0 \in \mathbb{R} \qquad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + o(1)$$

Proposition

f admet un DL à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0.
Cette limite est alors c_0.

Démonstration.

$$f \text{ admet un développement limité en } 0$$

$$\iff \quad \exists c_0 \in \mathbb{R} \qquad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + o(1)$$

$$\iff \quad \exists c_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to 0} (f(x) - c_0) = 0$$

Proposition

f admet un DL à l'ordre $n = 0$ en 0 si et seulement si elle admet une limite finie en 0.
Cette limite est alors c_0.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
& f \text{ admet un développement limité en } 0 \\
\iff \quad & \exists c_0 \in \mathbb{R} \qquad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + o(1) \\
\iff \quad & \exists c_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to 0} \left(f(x) - c_0 \right) = 0 \\
\iff \quad & \exists c_0 \in \mathbb{R} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = c_0
\end{aligned}$$

□

Propositions

Supposons que f est définie en 0. (*i.e.*, $0 \in D$)

(i) La fonction f admet un DL à l'ordre 0 en 0 si et seulement si elle est continue en 0.
Alors $c_0 = f(0)$.

(ii) La fonction f admet un DL à l'ordre 1 en 0 si et seulement si elle est dérivable en 0.
Alors $c_1 = f'(0)$.

Remarque

Ceci ne se généralise pas aux ordres supérieurs.

f continue en 0 $\iff$ f admet un DL_0

f dérivable en 0 $\iff$ f admet un DL_1

f de classe $\mathcal{C}^2$ en 0 $\implies$ f admet un DL_2

f de classe $\mathcal{C}^3$ en 0 $\implies$ f admet un DL_3

etc...

▷ Exercice 1.

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + 3x + x^3 \sin \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a. Montrer que f possède un DL en 0 à l'ordre 2.

b. Justifier que f est dérivable en 0.

c. f est-elle deux fois dérivable en 0 ?

Démonstration.

(i) f **admet un DL$_0$ en** 0 $\iff$
f **continue en** 0**, et** $f(0) = c_0$**.**

f admet un DL$_0$ en 0 $\iff$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = c_0$

Démonstration.

(i) f **admet un DL$_0$ en** 0 $\iff$
f **continue en** 0**, et** $f(0) = c_0$**.**

f admet un DL$_0$ en 0 $\iff$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = c_0$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in D$

$|x - 0| \leqslant \eta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - c_0| \leqslant \varepsilon$

Démonstration.

(i) f **admet un DL$_0$ en** 0 $\iff$
f **continue en** 0**, et** $f(0) = c_0$**.**

f admet un DL$_0$ en 0 $\iff$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = c_0$

$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in D$

$|x - 0| \leqslant \eta \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - c_0| \leqslant \varepsilon$

Si f est définie en 0 alors $f(0) = c_0$ et f est continue en 0.

Démonstration.

(ii) f **admet un DL$_1$ en** $0 \implies$
f **est dérivable en** 0**, et** $f'(0) = c_1$**.**

Supposons que f admet un dl à l'ordre 1 :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + x\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Alors $f(0) = c_0$, puis :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = c_1 + \varepsilon(x).$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = c_1$.

Démonstration.

(ii) **f admet un DL_1 en 0 $\Longleftarrow$**
f est dérivable en 0, et $f'(0) = c_1$.

Réciproquement, si f est dérivable en 0, alors :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - f'(0) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Donc :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x).$$

Donc f admet un dl en 0 à l'ordre 1.

Démonstration.

(ii) **f admet un DL_1 en 0 $\iff$**
f est dérivable en 0, et $f'(0) = c_1$.

Réciproquement, si f est dérivable en 0, alors :

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} - f'(0) \xrightarrow[x \to 0]{} 0.$$

Donc :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + x\varepsilon(x).$$

Donc f admet un dl en 0 à l'ordre 1. □

Proposition - Troncature d'un DL

$0 \leqslant k \leqslant n$

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Proposition - Troncature d'un DL

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Démonstration.

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + c_{k+1} x^{k+1} + \cdots + c_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

Proposition - Troncature d'un DL

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Démonstration.

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + x^k\Big(c_{k+1}x + \cdots + c_n x^{n-k} + x^{n-k}\varepsilon(x)\Big)$$

Proposition - Troncature d'un DL

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Démonstration.

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + x^k \Big(\underbrace{c_{k+1} x + \cdots + c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x)}_{\varepsilon_2(x)} \Big)$$

Proposition - Troncature d'un DL

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Démonstration.

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + x^k \Big(\underbrace{c_{k+1} x + \cdots + c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x)}_{\varepsilon_2(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} \Big)$$

Proposition - Troncature d'un DL

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Démonstration.

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + x^k \Big(\underbrace{c_{k+1} x + \cdots + c_n x^{n-k} + x^{n-k} \varepsilon(x)}_{\varepsilon_2(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0} \Big)$$

f admet bien un DL_k en 0.

Proposition - Troncature d'un DL

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots\cdots\cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_k x^k + o(x^k)$$

Démonstration.

$$f(x) = c_0 + \cdots + c_k x^k + x^k \varepsilon_2(x)$$

f admet bien un DL_k en 0.
Celui-ci est la restriction du DL_n de f. □

Exemple

Développement limité en 0 de :

$$f(x) = 3 - x + 4x^3$$

Exemple

Développement limité en 0 de :

$$f(x) = 3 - x + 4x^3$$

Remarque

Le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe.

Proposition - Unicité d'un DL

Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n alors ce développement limité est unique.

Proposition - Unicité d'un DL

Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n alors ce développement limité est unique.

Démonstration.

Proposition - Unicité d'un DL

Si f admet un développement limité en 0 à l'ordre n alors ce développement limité est unique.

Démonstration.

□

Proposition - Parité des DL

f paire :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots + c_{2k} x^{2k} + o\left(x^{2k}\right)$$

f impaire :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_1 x + c_3 x^3 + \cdots + c_{2k+1} x^{2k+1} + o\left(x^{2k+1}\right)$$

Proposition - Parité des DL

f paire :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots + c_{2k} x^{2k} + o(x^{2k})$$

f impaire :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_1 x + c_3 x^3 + \cdots + c_{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

Démonstration.

Proposition - Parité des DL

f paire :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + \cdots + c_{2k} x^{2k} + o(x^{2k})$$

f impaire :

$$f(x) \underset{(0)}{=} c_1 x + c_3 x^3 + \cdots + c_{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2k+1})$$

Démonstration.

□

Définition

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(x) \underset{(0)}{=} x^p(a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m + o(x^m))$$

avec $a_0 \neq 0$.

Proposition

Dans ce cas : $f(x) \underset{(0)}{\sim} a_0 x^p$

$f(x)$ est du même signe que $a_0 x^p$ au voisinage de 0.

I. **Généralités**

A. Définition

B. Propriétés

C. Développements limités des fonctions usuelles

Théorème - Développements limités usuels

$$\frac{1}{1+x} \qquad \ln(1+x) \qquad e^x$$

$$\sin x \qquad \cos x \qquad (1+x)^\alpha$$

Théorème - Développements limités usuels

$$\frac{1}{1+x} \qquad \ln(1+x) \qquad e^x$$

$$\sin x \qquad \cos x \qquad (1+x)^\alpha$$

$$\operatorname{sh} x \qquad \operatorname{ch} x$$

Théorème - Développements limités usuels

$$\frac{1}{1+x} \qquad \ln(1+x) \qquad e^x$$

$$\sin x \qquad \cos x \qquad (1+x)^\alpha$$

$$\operatorname{sh} x \qquad \operatorname{ch} x$$

$$\tan x \qquad \arctan x$$

Exemple 1

Développement limité de $(1+x)^\alpha$

Exemple 1

Développement limité de $(1+x)^\alpha$

▷ Exercice 2.

Donner un développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$$

Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

B. Primitivation

C. Formule de Taylor-Young

III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

IV. Applications

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

B. Primitivation

C. Formule de Taylor-Young

Exemple 2

(i) e^{3x} en 0 à l'ordre 4

(ii) $\ln(1-x)$ en 0 à l'ordre 5

(iii) $\dfrac{1}{1-x^2}$ en 0 à l'ordre 5

(iv) (Addition de développements limités)

$e^x + e^{3x}$ en 0 à l'ordre 4

(v) (Multiplication de développements limités)

$e^x \cos x$ en 0 à l'ordre 4

▷ Exercice 3.

Calculer par produit le développement limité de $e^x(1+e^{2x})$ en 0 à l'ordre 4 et vérifier ainsi l'un des développements limités calculés ci-dessus.

▷ Exercice 4.

Donner à l'ordre 5 les développements limités de :

$$\frac{1}{1+x} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-x}$$

Calculer la somme, puis le produit de ces développements limités et vérifier ainsi deux fois l'un des développements limités calculés ci-dessus.

▷ Exercice 5.

Donner un développement limité de $\cos(2x)$ en 0 à l'ordre 6 en utilisant le développement limité de $\cos u$ puis la formule $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$.

Exemple 3

(i) $\dfrac{1}{3+x}$ en 0 à l'ordre 3

(ii) $\ln(2-x)$ en 0 à l'ordre 3

Exemple 3

(i) $\dfrac{1}{3+x}$ en 0 à l'ordre 3

(ii) $\ln(2-x)$ en 0 à l'ordre 3

▷ Exercice 6.

Calculer les développements limités suivants :

(i) e^{2+x} en 0 à l'ordre 3

(ii) $\sqrt{4+x}$ en 0 à l'ordre 2

Exemple 4

(i) $\exp(2x - x^2)$ en 0 à l'ordre 4

(ii) (Composition de développements limités)

$\ln(\cos x)$ en 0 à l'ordre 5

(iii) (Quotient de développements limités)

$\dfrac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 5

(iv) $\tan x$ en 0 à l'ordre 5

▷ Exercice 7.

Donner les développements limités des fonctions suivantes en 0 à l'ordre 3 :

(i) $\ln(e^{-x}+1)$

(ii) $\dfrac{1}{\cos x - \sin x}$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} \qquad o(x^2)+o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

$$o(x^2+x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4+o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

$$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2)$$

$$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2)$$

$$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2)$$

$$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^7)$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} \qquad x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2)$$

$$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^7)$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^7) \qquad x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=}$$

Remarque : manipulation des o

Au voisinage de 0 :

$$o(3x^2) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad o(x^2) + o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2)$$

$$o(x^2 + x^3) \underset{(0)}{=} o(x^2) \qquad x^4 o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^7)$$

$$o(x^4)o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^7) \qquad x^4 + o(x^3) \underset{(0)}{=} o(x^3)$$

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

B. Primitivation

C. Formule de Taylor-Young

Théorème - Primitivation de DL

Soit f dérivable. Si :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

alors :

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration.

Théorème - Primitivation de DL

Soit f dérivable. Si :

$$f'(x) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + o(x^n)$$

alors :

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + c_0 x + c_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + c_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Démonstration. □

Exemple 5

Démonstration de la formule du développement limité de $\ln(1+x)$.

Exemple 5

Démonstration de la formule du développement limité de $\ln(1+x)$.

Exemple 6

(i) $\arcsin$ en 0 à l'ordre 5

(ii) $\arctan$ en 0 à l'ordre $2n+1$

II. Calculs de développements limités

A. Opérations

B. Primitivation

C. Formule de Taylor-Young

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$\cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Exemple 7

Cas $n = 0,\ 1,\ 2$.

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Démonstration.

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Démonstration.

□

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Corollaire

Toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I admet un développement limité à tout ordre en tout point de I.

Lemme - Formule de Taylor-Young en 0

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ en 0. Alors

$$f(x) \underset{(0)}{=} f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Exemple 8

Démonstration des formules donnant les développements limités des fonctions exponentielle, sinus, cosinus, et $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités

II. Calculs de développements limités

III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

IV. Applications

Définition

Développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Définition

Développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Définition

Développement limité en a à l'ordre n :

$$f(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$
$$\cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Remarques

(i) $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$

$$\cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \eta(x)$$

avec $\lim_{x \to a} \eta(x) = 0$

Remarques

(i) $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$

$$\cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \eta(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \eta(x) = 0$

Remarques

(i) $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$

$$\cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n \eta(x)$$

avec $\lim\limits_{x \to a} \eta(x) = 0$

$$f(a+h) \underset{(0)}{=} c_0 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots + c_n h^n + o(h^n)$$

Remarques

(ii) Les propriétés d'unicité et de troncature sont toujours valables.

Théorème - Primitivation de DL

Soit f dérivable sur I, et $a \in I$. Si :

$$f'(x) \underset{(a)}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

alors :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \cdots$$
$$\cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Théorème - Formule de Taylor-Young

Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ en a alors :

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots$$

$$\cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + o((x-a)^n)$$

Rappel - Formule de Taylor pour les polynômes

$$P = P(a) + P'(a)(X-a) + P''(a)\frac{(X-a)^2}{2!} + \cdots$$
$$\cdots + P^{(n)}(a)\frac{(X-a)^n}{n!}$$

où $n = \deg P$

Méthode

Pour obtenir un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point a, on pose $h = x - a$ et on calcule un développement limité de f au voisinage de $h = 0$.

Méthode

Pour obtenir un développement limité d'une fonction au voisinage d'un point a, on pose $h = x - a$ et on calcule un développement limité de f au voisinage de $h = 0$.

Exemple 9

(i) $\frac{1}{x}$ au voisinage de $x = 2$ à l'ordre 2

(ii) e^x au voisinage de $x = 4$ à l'ordre 2

(iii) $\cos x$ à l'ordre 3 en $a = \frac{\pi}{3}$

▷ Exercice 8.

Donner un développement limité en 4 à l'ordre 2 de :

$$f(x) = \sqrt{x+5}$$

▷ Exercice 9.

A l'aide de la formule de Taylor-Young, donner le développement limité de la fonction $\sin$ en $a = -\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

Chapitre A10. Développements limités

I. Généralités

II. Calculs de développements limités

III. Développement limité au voisinage d'un point quelconque

IV. Applications

A. Calculs de limites

B. Tangentes

C. Développement asymptotique

IV. **Applications**

A. Calculs de limites

B. Tangentes

C. Développement asymptotique

Exemple 10

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x - \ln(1+x)}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

Exemple 10

(i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x-\ln(1+x)}$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$

▷ Exercice 10.

Calculer :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x - e^{-x})}{e^x + e^{-x} - 2} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{\ln(x) - \ln(2-x)}$$

IV. **Applications**

A. Calculs de limites

B. Tangentes

C. Développement asymptotique

Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a alors

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a alors

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

Le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe.

Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ en a alors

$$f(x) \underset{(a)}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o((x-a)^2)$$

Le développement limité d'une fonction à l'ordre 1 donne la tangente à la courbe.

Le terme suivant donne la position de la courbe par rapport à cette tangente.

Exemple 9 (suite)

(i) $$\frac{1}{x} \underset{(2)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 + o((x-2)^2)$$

▷ Exercice 11.

Soit : $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$

(i) Donner un DL_3 de : $g(h) = \dfrac{1}{(1+h)^2}$

(ii) Donner un DL_2 de f en 0 et en 1.

(iii) Donner un DL_3 de f en 2.

Dans ces trois cas, donner la tangente à la courbe de f et la position de la courbe par rapport à cette tangente.

▷ Exercice 12.

Donner un développement limité en 2 à l'ordre 1 de

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x+7} - 3}$$

En déduire que f est prolongeable par continuité en 2 et que ce prolongement par continuité est dérivable.

IV. **Applications**

A. Calculs de limites

B. Tangentes

C. Développement asymptotique

Définition

Un développement asymptotique d'une fonction est un développement limité en $\pm\infty$, obtenu en posant :

$$h = \frac{1}{x}$$

Il peut contenir des termes non polynomiaux.

Exemples

$$f_1(x) = \frac{x^3+1}{x+2} \underset{(+\infty)}{=} x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Exemples

$$f_1(x) = \frac{x^3+1}{x+2} \underset{(+\infty)}{=} x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln\left(x+1\right)} \underset{(+\infty)}{=} 2 - \frac{2}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$

Exemples

$$f_1(x) = \frac{x^3+1}{x+2} \underset{(+\infty)}{=} x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln\left(x+1\right)} \underset{(+\infty)}{=} 2 - \frac{2}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sin x} \underset{(0)}{=} \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3)$$

Exemples

$$f_1(x) = \frac{x^3+1}{x+2} \underset{(+\infty)}{=} x^2 - 2x + 4 - \frac{7}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_2(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right)}{\ln\left(x+1\right)} \underset{(+\infty)}{=} 2 - \frac{2}{x\ln x} + o\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sin x} \underset{(0)}{=} \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + o(x^3)$$

$$u_n = \sqrt[n]{e} \underset{(+\infty)}{=} 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exemple 11

(i) Développement asymptotique de

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x + 3}$$

en $\pm\infty$ à l'ordre 2.

Exemple 11

(i) Développement asymptotique de

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x + 3}$$

en $\pm\infty$ à l'ordre 2.

(ii) Comportement asymptotique de :

$$u_n = \sqrt[n]{n}$$

▷ Exercice 13.

Décrire le comportement asymptotique en $+\infty$ de :

$$f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$$

▷ Exercice 14.

Décrire le comportement asymptotique de la suite :

$$u_n = \left(\frac{n + \ln n}{n}\right)^n$$

James Stirling (Écosse, 1692 – 1770)

Proposition : Formule de Stirling

$$n! \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Proposition : Formule de Stirling

$$n! \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Exemple 12

On peut en déduire le DA :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=}$$

Proposition : Formule de Stirling

$$n! \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Exemple 12

On peut en déduire le DA :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$$

Proposition : Formule de Stirling

$$n! \underset{(+\infty)}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Exemple 12

On peut en déduire le DA :

$$\ln(n!) \underset{(+\infty)}{=} n\ln n - n + \frac{1}{2}\ln n + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o(1)$$

▷ Exercice 15.

Donner un équivalent en $+\infty$ de $\binom{2n}{n}$.

Prochain chapitre

Chapitre B10
Dimension