

Mathématiques

Chapitre 0
Dérivation

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

IV. Dérivation des fonctions complexes

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

IV. Dérivation des fonctions complexes

V. Convexité

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

- A. Dérivabilité en un point
- B. Propriétés locales
- C. Fonction dérivée
- D. Opérations sur les dérivées
- E. Dérivée d'une application réciproque

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

IV. Dérivation des fonctions complexes

V. Convexité

I. Fonction dérivée

A. Dérivabilité en un point

B. Propriétés locales

C. Fonction dérivée

D. Opérations sur les dérivées

E. Dérivée d'une application réciproque

- ▶ D partie de $\mathbb{R}$
- ▶ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonction
- ▶ x_0 élément de D

Définition

$$D \subseteq \mathbb{R} \quad f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in D$$

f est **dérivable en x_0** si la fonction

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers x_0 .

Définition

$$D \subseteq \mathbb{R} \quad f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in D.$$

Dans ce cas la **dérivée** ou le **nombre dérivé** de f en x_0 est :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition

$$D \subseteq \mathbb{R} \quad f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad x_0 \in D.$$

Dans ce cas la **dérivée** ou le **nombre dérivé** de f en x_0 est :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Remarque

On dit que

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1
s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Remarque

On dit que

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 :
s'il existe deux réels a_0 et a_1 tels que :

$$f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} a_0 + a_1 h + o(h)$$

Remarque

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Proposition

f est dérivable en x_0

$\iff f$ admet un dl en x_0 à l'ordre 1.

Remarque

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Proposition

f est dérivable en x_0

$\Longleftrightarrow f$ admet un dl en x_0 à l'ordre 1.

Dans ce cas ce dl est :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Remarque

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 :

$$f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} a_0 + a_1 h + o(h)$$

Proposition

f est dérivable en x_0

$\iff f$ admet un dl en x_0 à l'ordre 1.

Dans ce cas ce dl est :

$$f(x_0 + h) \underset{(0)}{=} f(x_0) + h f'(x_0) + o(h)$$

Remarque

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Proposition

f est dérivable en x_0

$\iff f$ admet un dl en x_0 à l'ordre 1.

Dans ce cas ce dl est :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Démonstration.

Remarque

f admet un développement limité en x_0 à l'ordre 1 :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Proposition

f est dérivable en x_0

$\iff f$ admet un dl en x_0 à l'ordre 1.

Dans ce cas ce dl est :

$$f(x) \underset{(x_0)}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Démonstration.



Exemple 1

(i) $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0 de dérivée :

$$f'(x_0) = nx_0^{n-1}$$

Exemple 1

- (i) $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0 de dérivée :
$$f'(x_0) = nx_0^{n-1}$$
- (ii) $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 1

- (i) $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0 de dérivée :
$$f'(x_0) = nx_0^{n-1}$$
- (ii) $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$.
- (iii) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$.

Exemple 1

- (i) $f : x \mapsto x^n$ est dérivable en x_0 de dérivée :
$$f'(x_0) = nx_0^{n-1}$$
- (ii) $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 mais est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}_+^*$.
- (iii) $x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point x_0 de $\mathbb{R}^*$.
- (iv) $\ln$ et $\exp$ sont dérivables en tout point.

▷ Exercice 1.

On admet que la fonction sinus est dérivable en 0, de dérivée 1.

- a. Démontrer que la fonction cosinus est dérivable en 0, de dérivée 0.
- b. Démontrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout point de $\mathbb{R}$ et donner leurs dérivées.

Définition

La fonction f admet une tangente en x_0 si son taux d'accroissement en x_0 admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Définition

La fonction f admet une tangente en x_0 si son taux d'accroissement en x_0 admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

► Si cette limite est finie alors elle vaut $f'(x_0)$.

La tangente en x_0 à la courbe de f est la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition

La fonction f admet une tangente en x_0 si son taux d'accroissement en x_0 admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Si cette limite est finie alors elle vaut $f'(x_0)$.

La tangente en x_0 à la courbe de f est la droite d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

- Si cette limite est infinie alors la tangente en x_0 à la courbe de f est la droite d'équation :

$$x = x_0$$

I. Fonction dérivée

A. Dérivabilité en un point

B. Propriétés locales

C. Fonction dérivée

D. Opérations sur les dérivées

E. Dérivée d'une application réciproque

Théorème

$$f \text{ dérivable} \implies f \text{ continue}$$

Théorème

$$f \text{ dérivable} \implies f \text{ continue}$$

Remarque

La réciproque est fausse !

$$f \text{ dérivable} \not\Leftarrow f \text{ continue}$$

Théorème

$$f \text{ dérivable} \implies f \text{ continue}$$

Remarque

La réciproque est fausse !

$$f \text{ dérivable} \not\Leftarrow f \text{ continue}$$

La fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0
n'est pas dérivable en 0.

Théorème

$$f \text{ dérivable} \implies f \text{ continue}$$

Démonstration.

Théorème

$$f \text{ dérivable} \implies f \text{ continue}$$

Démonstration.



Définition

f est **dérivable à gauche** en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

On note alors $f'_g(x_0)$ cette limite.

Définition

f est **dérivable à droite** en x_0 si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

On note alors $f'_d(x_0)$ cette limite.

Exemple 2

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est dérivable à gauche et à droite en 0, avec :

$$f'_g(0) = -1 \quad \text{et} \quad f'_d(0) = 1$$

Elle n'est pas dérivable en 0.

Rappel

x_0 est **intérieur** à D si D est voisinage de x_0 :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq D$$

Rappel

x_0 est **intérieur** à D si D est voisinage de x_0 :

$$\exists \varepsilon > 0 \quad]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\subseteq D$$

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable en x_0
alors f est dérivable à gauche et à droite en x_0
de même dérivée.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable en x_0
alors f est dérivable à gauche et à droite en x_0
de même dérivée.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

(ii) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0
alors f est continue en x_0 .

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable en x_0
alors f est dérivable à gauche et à droite en x_0
de même dérivée.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Démonstration. (i) Si f est dérivable en x_0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Donc f est dérivable à gauche et $f'_g(x_0) = f'(x_0)$.

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable en x_0
alors f est dérivable à gauche et à droite en x_0
de même dérivée.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Démonstration. (i) Si f est dérivable en x_0 :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Donc f est dérivable à droite et $f'_d(x_0) = f'(x_0)$.

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable en x_0
alors f est dérivable à gauche et à droite en x_0
de même dérivée.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Démonstration. Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 de mêmes dérivées alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable en x_0
alors f est dérivable à gauche et à droite en x_0
de même dérivée.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$

Démonstration. Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0 de mêmes dérivées alors :

Donc
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$$

Proposition

Soit x_0 intérieur à D .

(i) Si f est dérivable à gauche et à droite en x_0
alors f est continue en x_0 .

Démonstration.

f dérivable à gauche et à droite en x_0

$\implies f$ continue à gauche et à droite en x_0

$\implies f$ continue en x_0 .



I. Fonction dérivée

A. Dérivabilité en un point

B. Propriétés locales

C. Fonction dérivée

D. Opérations sur les dérivées

E. Dérivée d'une application réciproque

On note dorénavant I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad A \subseteq I$$

f est **dérivable sur A** si f est dérivable en tout point de A .

Définition

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad A \subseteq I$$

f est **dérivable sur A** si f est dérivable en tout point de A .

f est **dérivable** si elle est dérivable sur I .

Définition

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} \quad A \subseteq I$$

f est **dérivable sur A** si f est dérivable en tout point de A .

f est **dérivable** si elle est dérivable sur I .

Si f est dérivable sur A alors la fonction

$$\begin{aligned} f' : A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée **fonction dérivée** ou **dérivée** de f sur A .

Notations

$$f'$$

$$\frac{df}{dx}$$

I. Fonction dérivée

A. Dérivabilité en un point

B. Propriétés locales

C. Fonction dérivée

D. Opérations sur les dérivées

E. Dérivée d'une application réciproque

Proposition

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

(i) $\lambda f + \mu g$ est dérivable

(ii) fg est dérivable

(iii) $\frac{1}{g}$ est dérivable

(iv) $\frac{f}{g}$ est dérivable

Proposition

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

(i) $\lambda f + \mu g$ est dérivable $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$

(ii) fg est dérivable $(fg)' = f'g + fg'$

(iii) $\frac{1}{g}$ est dérivable $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

(iv) $\frac{f}{g}$ est dérivable $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Remarque

En résumé :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg'$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(i) $\lambda f + \mu g$ **dérivable** : $\forall x \in I \setminus \{x_0\}$

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{\lambda f(x) + \mu g(x) - \lambda f(x_0) - \mu g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lambda \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \mu \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ & \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) fg **dérivable** :

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) fg **dérivable** :

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) fg **dérivable** :

$$\begin{aligned}\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\&= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\&= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0)\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) fg **dérivable** :

$$\begin{aligned}
 \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x_0) + f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
 &= f(x) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x_0) \\
 &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0)
 \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) f g **dérivable** : (avec les DL)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

et $g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + h\eta(h)$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) fg **dérivable** : (avec les DL)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

$$\text{et } g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + h\eta(h)$$

Par produit :

$$(fg)(x_0 + h) = f(x_0 + h) \times g(x_0 + h)$$

$$= (fg)(x_0) + h(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)) + h\nu(h)$$

avec $\nu(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$

(ii) fg **dérivable** : (avec les DL)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

$$\text{et } g(x_0 + h) = g(x_0) + hg'(x_0) + h\eta(h)$$

Par produit :

$$(fg)(x_0 + h) = f(x_0 + h) \times g(x_0 + h)$$

$$= (fg)(x_0) + h \underbrace{\left(f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \right)}_{(fg)'(x_0)} + h\nu(h)$$

avec $\nu(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

Démonstration.

(iii) $\left(\frac{1}{g}\right)$ **dérivable** :

Voir plus bas, en composant g et $x \mapsto \frac{1}{x}$.

(iv) $\left(\frac{f}{g}\right)$ **dérivable** :

On utilise les deux points précédents.

Démonstration.

Ceci est vrai pour tout x_0 de I ou de I' , donc les fonctions concernées sont bien dérivables sur I ou sur I' , et les fonctions dérivées sont bien données par les formules ci-dessus. □

Proposition

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables

(i) $f + g$ est dérivable

(ii) fg est dérivable

Remarque

L'ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$ est un anneau.

Proposition

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f : J \rightarrow \mathbb{R} \quad u(I) \subseteq J$$

Si u et f sont dérivables alors $f \circ u$ est dérivable de dérivée :

Proposition

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f : J \rightarrow \mathbb{R} \quad u(I) \subseteq J$$

Si u et f sont dérivables alors $f \circ u$ est dérivable de dérivée :

$$\forall x \in I \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x))$$

$$\text{i.e.,} \quad (f \circ u)' = u' \cdot f' \circ u$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \frac{(f \circ u)(x) - (f \circ u)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} & \frac{(f \circ u)(x) - (f \circ u)(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(u(x)) - f(u(x_0))}{u(x) - u(x_0)} \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(u(x_0)) u'(x_0) \end{aligned}$$

Proposition

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f : J \rightarrow \mathbb{R} \quad u(I) \subseteq J$$

Si u et f sont dérivables alors $f \circ u$ est dérivable de dérivée :

$$\forall x \in I \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x))$$

$$\text{i.e.,} \quad (f \circ u)' = u' \cdot f' \circ u$$

Démonstration.

Proposition

$$u : I \rightarrow \mathbb{R} \quad f : J \rightarrow \mathbb{R} \quad u(I) \subseteq J$$

Si u et f sont dérivables alors $f \circ u$ est dérivable de dérivée :

$$\forall x \in I \quad (f \circ u)'(x) = u'(x) f'(u(x))$$

$$\text{i.e.,} \quad (f \circ u)' = u' \cdot f' \circ u$$

Démonstration.



Exemples

(i) Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ dérivable et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Alors $f \circ g$ est dérivable par composition et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) =$$

Exemples

(i) Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^*$ dérivable et $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Alors $f \circ g$ est dérivable par composition et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Exemples

(ii) Soit α un réel quelconque, et $f : x \mapsto x^\alpha$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) =$$

Exemples

(ii) Soit α un réel quelconque, et $f : x \mapsto x^\alpha$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$$

Exemples

(iii) Soit u une fonction dérivable. Alors les fonctions e^u , $\ln u$, u^α sont dérivables et

$$(e^u)' =$$

$$(\ln u)' =$$

$$(u^\alpha)' =$$

Exemples

(iii) Soit u une fonction dérivable. Alors les fonctions e^u , $\ln u$, u^α sont dérivables et

$$(e^u)' = u' e^u \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$$

▷ Exercice 2.

Étudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

$$g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$

$$h(x) = \arcsin \frac{x-1}{x+1}$$

I. Fonction dérivée

- A. Dérivabilité en un point
- B. Propriétés locales
- C. Fonction dérivée
- D. Opérations sur les dérivées
- E. Dérivée d'une application réciproque

Proposition

I, J intervalles $f : I \rightarrow J$ dérivable et bijective.

Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable sur :

Proposition

I, J intervalles $f : I \rightarrow J$ dérivable et bijective.

Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable sur :

$$J' = \{y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$$

Sa dérivée est

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

$$\text{i.e.,} \quad \forall y \in J' \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Proposition

I, J intervalles $f : I \rightarrow J$ dérivable et bijective.

Alors $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable sur :

$$J' = \{y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$$

f^{-1} n'est dérivable en aucun point de $J \setminus J'$.

Elle admet des tangentes verticales en ces points.

Démonstration. $y_0 \in J'$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Taux d'accroissement de f^{-1} en y :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

Démonstration. $y_0 \in J'$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Taux d'accroissement de f^{-1} en y :

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}\end{aligned}$$

Démonstration. $y_0 \in J'$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Taux d'accroissement de f^{-1} en y :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}$$

$$= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}$$

$$f'(x_0) \neq 0 : \quad \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration. $y_0 \in J'$ $x_0 = f^{-1}(y_0)$

Taux d'accroissement de f^{-1} en y :

$$\begin{aligned}\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)} \\ &= \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x_0)}{f^{-1}(y) - x_0}}\end{aligned}$$

$$f'(x_0) = 0 : \quad \xrightarrow{y \rightarrow y_0} \pm \infty$$



Exemple 3

Dérivabilité de l'arc-sinus.

Exemple 3

Dérivabilité de l'arc-sinus.

Remarque

On démontre également que

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

est dérivable sur $] -1, 1[$, de dérivée :

$$\begin{aligned} \arccos' :] -1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Exemple 3

Dérivabilité de l'arc-sinus.

Remarque

On démontre également que

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée :

$$\begin{aligned} \arctan' : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

▷ Exercice 3.

- a. Justifier que la fonction cosinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans un intervalle à préciser.
- b. On note argch la réciproque de ch . Simplifier $\operatorname{sh}(\operatorname{argch}(x))$.
- c. Sur quel ensemble la fonction argch est-elle dérivable ? Calculer sa dérivée.

Remarque

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sauf :

- ▶ $x \mapsto \sqrt{x}$: définie et continue sur $\mathbb{R}_+$
dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- ▶ $x \mapsto |x|$: définie et continue sur $\mathbb{R}$
dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- ▶ $\arccos$ et $\arcsin$:
définies et continues sur $[-1, 1]$
dérivables sur $] -1, 1[$

Remarque

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sauf :

► $x \mapsto \lfloor x \rfloor$: continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{d\lfloor x \rfloor}{dx} =$$

Remarque

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sauf :

► $x \mapsto \lfloor x \rfloor$: continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad \frac{d\lfloor x \rfloor}{dx} = 0$$

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

- A. Extremum local
- B. Théorème de Rolle
- C. Accroissements finis
- D. Croissance des fonctions
- E. Prolongement de la dérivée

III. Dérivées successives

IV. Dérivation des fonctions complexes

V. Convexité

II. Théorèmes

- A. Extremum local
- B. Théorème de Rolle
- C. Accroissements finis
- D. Croissance des fonctions
- E. Prolongement de la dérivée

Définition

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction

f présente un **maximum local** en x_0 si elle présente un maximum sur un voisinage de x_0 .

f présente un **minimum local** en x_0 si elle présente un minimum sur un voisinage de x_0 .

f présente un **extremum local** en x_0 si elle présente un maximum ou un minimum local en x_0 .

Définition

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction

f présente un **maximum local** en x_0 si elle présente un maximum sur un voisinage de x_0 .

f présente un **minimum local** en x_0 si elle présente un minimum sur un voisinage de x_0 .

f présente un **extremum local** en x_0 si elle présente un maximum ou un minimum local en x_0 .

Remarque

Un extremum est aussi appelé extremum **global**.

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Définition

Un **point critique** de f est un zéro de sa dérivée :

$$f'(x_0) = 0$$

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Définition

Un **point critique** de f est un zéro de sa dérivée :

$$f'(x_0) = 0$$

Remarques

(i) La réciproque est fausse.

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

(i) La réciproque est fausse.

(ii) Le théorème est faux si x_0 n'est pas intérieur à I .

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

- (i) La réciproque est fausse.
- (ii) Le théorème est faux si x_0 n'est pas intérieur à I .
- (iii) Le théorème est faux également si f n'est pas dérivable en x_0 .

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f présente un maximum en x_0 sur $]x_0 - c, x_0 + c[$. Alors :

$$\forall x \in [x_0 - c, x_0[\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

Th de comparaison : $f'(x_0) \geq 0$.

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f présente un maximum en x_0 sur $]x_0 - c, x_0 + c[$. Alors :

$$\forall x \in]x_0, x_0 + c[\quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Th de comparaison : $f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$.

Théorème

x_0 intérieur à I $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en x_0

Si f présente un extremum local en x_0

alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f présente un maximum en x_0 sur $]x_0 - c, x_0 + c[$.

$f'(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) \leq 0$ donc $f'(x_0) = 0$. □

II. Théorèmes

- A. Extremum local
- B. Théorème de Rolle
- C. Accroissements finis
- D. Croissance des fonctions
- E. Prolongement de la dérivée

On note a et b deux réels tels que $a < b$.

Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque

Toutes les hypothèses sont indispensables.

Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.

Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration.



Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polynomiale de degré n admettant n racines réelles distinctes. Alors f' admet exactement $n - 1$ racines réelles distinctes.

Théorème de Rolle

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ $f(a) = f(b)$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exemple 5

Si un mobile M parcourant une droite passe deux fois par le même point alors sa vitesse s'annule pendant le trajet.

II. Théorèmes

- A. Extremum local
- B. Théorème de Rolle
- C. Accroissements finis
- D. Croissance des fonctions
- E. Prolongement de la dérivée

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarques

- (i) Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des accroissements finis.

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarques

- (i) Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis sont équivalents.

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Remarques

(ii) Géométriquement :

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration.

Théorème des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Démonstration.



Inégalité des accroissements finis, v1

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in]a, b[\quad m \leq f'(t) \leq M$$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Inégalité des accroissements finis, v1

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in]a, b[\quad m \leq f'(t) \leq M$$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Démonstration.

Inégalité des accroissements finis, v1

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ Il existe $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall t \in]a, b[\quad m \leq f'(t) \leq M$$

Alors :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$$

Démonstration.



Inégalité des accroissements finis, v2

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est dérivable sur I
- ▶ $|f'|$ est bornée par un réel M , i.e.,

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall t \in I \quad |f'(t)| \leq M$$

Alors f est M -lipschitzienne sur I , i.e., :

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Définition

Soit M un réel.

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est M -lipschitzienne si

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

On dit que f est lipschitzienne si elle est M -lipschitzienne pour un certain réel M .

Inégalité des accroissements finis, v2

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est dérivable sur I
- ▶ $|f'|$ est bornée par un réel M .

Alors f est M -lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Démonstration. $[x', x] \subseteq I$

Inégalité des accroissements finis, v2

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est dérivable sur I
- ▶ $|f'|$ est bornée par un réel M .

Alors f est M -lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Démonstration. $[x', x] \subseteq I$

Hypothèse : $-M \leq f' \leq M$

Inégalité des accroissements finis, v2

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est dérivable sur I
- ▶ $|f'|$ est bornée par un réel M .

Alors f est M -lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Démonstration. $[x', x] \subseteq I$

Hypothèse : $-M \leq f' \leq M$

IAF : $-M(x - x') \leq (f(x) - f(x')) \leq M(x - x')$

Inégalité des accroissements finis, v2

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est dérivable sur I
- ▶ $|f'|$ est bornée par un réel M .

Alors f est M -lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Démonstration. $[x', x] \subseteq I$

$$\text{IAF : } -M(x - x') \leq (f(x) - f(x')) \leq M(x - x')$$

$$\implies |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Inégalité des accroissements finis, v2

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ f est dérivable sur I
- ▶ $|f'|$ est bornée par un réel M .

Alors f est M -lipschitzienne sur I :

$$\forall (x, x') \in I^2 \quad |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$$

Démonstration. $[x', x] \subseteq I$

$$\text{IAF : } -M(x - x') \leq (f(x) - f(x')) \leq M(x - x')$$

$$\implies |f(x) - f(x')| \leq M|x - x'| \quad \square$$

Remarque

Pour les fonctions complexes

- ✗ le théorème de Rolle
 - ✗ le théorème des accroissements finis
 - ✗ la version 1 de l'inégalité des accroissements finis
- ne sont pas valables, alors que
- ▶ la version 2 de l'inégalité des accroissements finis est valable.

▷ Exercice 4.

a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

b. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

Démontrer que : $S_n \sim \ln n$

En particulier (S_n) tend vers $+\infty$.

Exemple 6 : suite récurrente

- a. Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution α , et que celle-ci est point fixe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

Exemple 6 : suite récurrente

- a. Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution α , et que celle-ci est point fixe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- b. Démontrer que f est k -lipschitzienne pour un certain $k \in [0, 1[$.

Exemple 6 : suite récurrente

- a. Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution α , et que celle-ci est point fixe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- b. Démontrer que f est k -lipschitzienne pour un certain $k \in [0, 1[$.

Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

- c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$$

Exemple 6 : suite récurrente

- a. Démontrer que l'équation $x^3 + x = 1$ admet une unique solution α , et que celle-ci est point fixe de $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- b. Démontrer que f est k -lipschitzienne pour un certain $k \in [0, 1[$.

Soit $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$

- c. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k |u_n - \alpha|$$

- d. En déduire que la suite (u_n) converge vers α .

II. Théorèmes

- A. Extremum local
- B. Théorème de Rolle
- C. Accroissements finis
- D. Croissance des fonctions
- E. Prolongement de la dérivée

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

- (i) f croissante $\iff f'$ positive
- (ii) f décroissante $\iff f'$ négative
- (iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

- (i) f croissante $\iff f'$ positive
- (ii) f décroissante $\iff f'$ négative
- (iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Démonstration. Juste le (i).

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(i) f croissante $\iff f'$ positive

Démonstration. Juste le (i).

f croissante : $\forall (x, y) \in I^2$

$$\begin{cases} x < y \implies f(x) \leq f(y) \\ x > y \implies f(x) \geq f(y) \end{cases} \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(i) f croissante $\iff f'$ positive

Démonstration. Juste le (i).

f croissante : $\forall (x, y) \in I^2$

$$\begin{cases} x < y \implies f(x) \leq f(y) \\ x > y \implies f(x) \geq f(y) \end{cases} \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$$

Donc $\forall x \in I \quad \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(i) f croissante $\iff f'$ positive

Démonstration. Juste le (i).

f croissante : $\forall (x, y) \in I^2$

$$\begin{cases} x < y \implies f(x) \leq f(y) \\ x > y \implies f(x) \geq f(y) \end{cases} \implies \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$$

Donc $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0.$

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(i) f croissante $\iff$ f' positive

Démonstration. Juste le (i) .

f' positive.

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(i) f croissante $\iff$ f' positive

Démonstration. Juste le (i).

f' positive.



Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

- (i) f croissante $\iff f'$ positive
- (ii) f décroissante $\iff f'$ négative
- (iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Remarques

- (i) Ce théorème n'est valable que sur un intervalle.

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

- (i) f croissante $\iff f'$ positive
- (ii) f décroissante $\iff f'$ négative
- (iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Remarques

- (i) Ce théorème n'est valable que sur un intervalle.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

- (i) f croissante $\iff f'$ positive
- (ii) f décroissante $\iff f'$ négative
- (iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Remarques

- (ii) On ne peut pas remplacer «croissante» par «strictement croissante» et «positive» par «strictement positive».

$$f : x \mapsto x^3$$

Corollaire

Avec les hypothèses du théorème précédent :

- (i) Si f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.
- (ii) Si f' est strictement négative sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante.

Corollaire

Avec les hypothèses du théorème précédent :

- (i) Si f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.

Démonstration. Si f est croissante non strictement alors il existe $x < y$ tels que $f(x) = f(y)$.

Corollaire

Avec les hypothèses du théorème précédent :

(i) Si f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.

Démonstration. Si f est croissante non strictement alors il existe $x < y$ tels que $f(x) = f(y)$.

Alors f est constante sur $]x, y[$.

Corollaire

Avec les hypothèses du théorème précédent :

(i) Si f' est strictement positive sauf en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante.

Démonstration. Si f est croissante non strictement alors il existe $x < y$ tels que $f(x) = f(y)$.

Alors f est constante sur $]x, y[$.

Donc f' s'annule en une infinité de points : tous ceux de $]x, y[$. □

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Corollaire du (iii)

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables

Si $f' = g'$ alors

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$$

Théorème

I intervalle $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

(iii) f constante $\iff f'$ nulle.

Corollaire du (iii)

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables

Si $f' = g'$ alors

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. Soit $h = f - g$

Corollaire du (iii)

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables

Si $f' = g'$ alors

$$\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. Soit $h = f - g$

$$h' = f' - g' = 0 \quad \implies \quad h = K \in \mathbb{R}$$

$$\implies \quad f = g + K \quad \square$$

II. Théorèmes

- A. Extremum local
- B. Théorème de Rolle
- C. Accroissements finis
- D. Croissance des fonctions
- E. Prolongement de la dérivée

Exemple 7

(i) Dérivabilité de : $f(x) = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$

Exemple 7

- (i) Dérivabilité de : $f(x) = \sqrt{x} - \arctan \sqrt{x}$
- (ii) Dérivabilité de : $g(x) = \arcsin e^{-x}$

Théorème de limite de la dérivée

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que :

- ▶ f est continue sur I
- ▶ f est dérivable sur $I - \{a\}$
- ▶ f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet ℓ pour limite en a .

Théorème de limite de la dérivée

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que :

- ▶ f est continue sur I
- ▶ f est dérivable sur $I - \{a\}$
- ▶ f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet ℓ pour limite en a .

En particulier :

- (i) Si ℓ est fini : f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
(Et donc f' est continue en a .)
- (ii) Si ℓ est infini : f n'est pas dérivable en a .

Remarques

- (i) Ce théorème montre que f est dérivable en a .
Il est souvent préférable de calculer

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- (ii) Dans le deuxième cas la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abscisse a .

Théorème de limite de la dérivée

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que :

- ▶ f est continue sur I
- ▶ f est dérivable sur $I - \{a\}$
- ▶ f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet ℓ pour limite en a .

Théorème de limite de la dérivée

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que :

- ▶ f est continue sur I
- ▶ f est dérivable sur $I - \{a\}$
- ▶ f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet ℓ pour limite en a .

Démonstration.

Théorème de limite de la dérivée

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonction telle que :

- ▶ f est continue sur I
- ▶ f est dérivable sur $I - \{a\}$
- ▶ f' admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en a .

Alors $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet ℓ pour limite en a .

Démonstration.



Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

A. Définitions

B. Calculs et propriétés

IV. Dérivation des fonctions complexes

V. Convexité

Dans toute cette partie :

$$n \in \mathbb{N}$$

III. Dérivées successives

A. Définitions

B. Calculs et propriétés

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

f est **deux fois dérivable** si f' est dérivable.

On note $f'' = (f')'$: **dérivée seconde** de f

On note également $f^{(0)}$, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ pour f , f' et f'' .

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n - 1)$ fois dérivable

f est n fois dérivable si $f^{(n-1)}$ est dérivable.

On note $f^{(n)}$ la dérivée de $f^{(n-1)}$.

$f^{(n)} : \text{dérivée } n\text{-ème de } f$

Notation

Dérivée n -ème de f :

$$f^{(n)} \quad \text{ou} \quad \frac{d^n f}{(dx)^n}$$

Définition

f est de classe C^n si elle est n fois dérivable et si sa dérivée n -ème est continue.

Définition

f est de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est n fois dérivable et si sa dérivée n -ème est continue.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est n fois dérivable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Définition

f est de classe $\mathcal{C}^n$ si elle est n fois dérivable et si sa dérivée n -ème est continue.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si elle est n fois dérivable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Notations :

$$\mathcal{C}^n(I) \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$$

$$\mathcal{C}^\infty(I) \quad \text{ou} \quad \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$$

Exemples

(i) f de classe $\mathcal{C}^0 \iff f$ continue
(Toute fonction est 0 fois dérivable.)

Exemples

(i) f de classe $\mathcal{C}^0 \iff f$ continue

(Toute fonction est 0 fois dérivable.)

(ii) f de classe $\mathcal{C}^1 \iff f$ dérivable
de dérivée continue

i.e., f est **continument dérivable**.

Remarques

(i) Si f est n fois dérivable alors $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables et continues.

Remarques

- (i) Si f est n fois dérivable alors $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables et continues.
- (ii) f est de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \geq 1$)
 $\iff f$ est dérivable et f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$

Remarques

- (i) Si f est n fois dérivable alors $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont dérivables et continues.
- (ii) f est de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \geq 1$)
 $\iff f$ est dérivable et f' est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$
- (iii) Inclusions des $\mathcal{C}^n$

▷ Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- a. Démontrer que f est continue.
- b. Démontrer que f est dérivable.
- c. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

▷ Exercice 6.

Déterminer la classe de : $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^{\frac{3}{2}}$$

III. Dérivées successives

A. Définitions

B. Calculs et propriétés

Exemple 8

(i) $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

Exemple 8

(i) $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

(ii) $f(x) = (ax + b)^n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$

Exemple 8

(i) $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$

(ii) $f(x) = (ax + b)^n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$

(iii) Fonction exponentielle

Exemple 8

- (i) $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $f(x) = (ax + b)^n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$
- (iii) Fonction exponentielle
- (iv) Fonctions cosinus et sinus

Exemple 8

- (i) $f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- (ii) $f(x) = (ax + b)^n$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$
- (iii) Fonction exponentielle
- (iv) Fonctions cosinus et sinus

▷ Exercice 7.

Démontrer que la fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner ses dérivées successives.

Remarque

(i) La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, car c'est sa dérivée.

Remarque

(i) La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, car c'est sa dérivée.

(ii) Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité.

Remarque

(i) La fonction $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$, car c'est sa dérivée.

(ii) Toutes les fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de dérivabilité.

Par exemple :

▶ $x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$

▶ $\arccos$, $\arcsin$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.

Propositions

f, g de classe $\mathcal{C}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$

(ii) λf est de classe $\mathcal{C}^n$

Propositions

f, g de classe $\mathcal{C}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$

(ii) λf est de classe $\mathcal{C}^n$

(iii) fg est de classe $\mathcal{C}^n$

Propositions

f, g de classe $\mathcal{C}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$

(ii) λf est de classe $\mathcal{C}^n$

(iii) fg est de classe $\mathcal{C}^n$

(iv) $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (si f et g composables)

Propositions

f, g de classe $\mathcal{C}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$

- (i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$
- (ii) λf est de classe $\mathcal{C}^n$
- (iii) fg est de classe $\mathcal{C}^n$
- (iv) $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (si f et g composables)
- (v) Si f est bijective alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Propositions

f, g de classe $\mathcal{C}^n$ $\lambda \in \mathbb{R}$

- (i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$
- (ii) λf est de classe $\mathcal{C}^n$
- (iii) fg est de classe $\mathcal{C}^n$
- (iv) $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (si f et g composables)
- (v) Si f est bijective alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Tout ceci est valable pour $n = \infty$.

Remarque

De plus :

$$(i) \quad (f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$$

$$(ii) \quad (\lambda f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

Initialisation. Si f et g sont continues alors $f + g$ est continue et :

$$(f + g)^{(0)} = f + g = f^{(0)} + g^{(0)}$$

Démonstration. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ et $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$

Hérédité. Soit f et g de classe $\mathcal{C}^{n+1}$

Alors f' et g' sont de classe $\mathcal{C}^n$.

Donc d'après l'HR leur somme est de classe $\mathcal{C}^n$ et :

$$(f' + g')^{(n)} = f'^{(n)} + g'^{(n)}$$

Comme $(f' + g') = (f + g)'$ alors

$$(f + g)'^{(n)} = f'^{(n)} + g'^{(n)}$$

puis : $(f + g)^{(n+1)} = f^{(n+1)} + g^{(n+1)}$



Démonstration.

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors elles sont de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(f + g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $(f + g)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

Démonstration.

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors elles sont de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(f + g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $(f + g)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

(ii) Idem.

Démonstration.

(i) $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors elles sont de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(f + g)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi $(f + g)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. □

(ii) Idem.

(iii) Voir la formule de Leibniz ci-dessous.

Démonstration. On suppose que $f \circ g$ est définie.

(iv) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$

Démonstration. On suppose que $f \circ g$ est définie.

(iv) Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$



Démonstration. Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

(v) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Initialisation. Si f est bijective continue alors sa réciproque est continue.

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

(v) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Hérédité. Soit f bijective de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Alors f est dérivable donc par théorème f^{-1} est dérivable sur J' et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

(v) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Hérédité.
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Par hypothèse de récurrence f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$.
 f' est de classe $\mathcal{C}^n$.

Par composition $f' \circ f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ puis
 $\frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (composition avec $x \mapsto \frac{1}{x}$).

$(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^n$, donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow J$ bijective.

(v) Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur son ensemble de dérivabilité.

Conclusion. Par récurrence, cette propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois.

Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois.

Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Exemple

$$(fg)^{(0)} = f^{(0)} g^{(0)}$$

$$(fg)^{(1)} = f^{(1)} g^{(0)} + f^{(0)} g^{(1)}$$

$$(fg)^{(2)} = f^{(2)} g^{(0)} + 2f^{(1)} g^{(1)} + f^{(0)} g^{(2)}$$

$$(fg)^{(3)} = f^{(3)} g^{(0)} + 3f^{(2)} g^{(1)} + 3f^{(1)} g^{(2)} + f^{(0)} g^{(3)}$$

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois.

Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Exemple

$$(fg)^{(0)} = fg$$

$$(fg)^{(1)} = f'g + fg'$$

$$(fg)^{(2)} = f''g + 2f'g' + fg''$$

$$(fg)^{(3)} = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$$

Démonstration. Par récurrence sur n .

Initialisation. Si f et g sont 0 fois dérivables alors fg est 0 fois dérivable et :

$$(fg)^{(0)} = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)} = f^{(0)} g^{(0)} = fg$$

Démonstration. Par récurrence sur n .

Hérédité. Soit f, g dérivables $n + 1$ fois.

Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

f et g sont $n + 1$ fois dérivables donc $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ pour $k = 0 \dots n$ sont dérivables.

Par produit et somme $(fg)^{(n)}$ est dérivable.

Démonstration. Par récurrence sur n .

Hérédité.

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)}\end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur n .

Hérédité.

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= ((fg)^{(n)})' \\&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}) \\&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \\&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\end{aligned}$$

Démonstration. Par récurrence sur n .

Conclusion. Le théorème est démontré pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. □

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois.

Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Exemple 9

Calculer la dérivée 10-ème de :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \cos x \end{aligned}$$

Théorème - Formule de Leibniz

Soit $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables n fois.

Alors fg est dérivable n fois et :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

▷ Exercice 8.

Calculer les dérivées n -èmes de :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^3 e^x \end{aligned}$$

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

IV. Dérivation des fonctions complexes

A. Définition

B. Théorème

V. Convexité

IV. Dérivation des fonctions complexes

A. Définition

B. Théorème

I : intervalle de $\mathbb{R}$

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}$$

Définitions

$$f : I \rightarrow \mathbb{C} \quad t_0 \in I$$

f est dérivable en t_0 si

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers t_0 .

Définitions

$$f : I \rightarrow \mathbb{C} \quad t_0 \in I$$

f est **dérivable en t_0** si

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

admet une limite finie lorsque t tend vers t_0 .

On note $f'(t_0)$ cette limite, et on l'appelle **dérivée** de f en t_0 .

Définitions

$$f : I \rightarrow \mathbb{C}$$

On dit que f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en tout point de I .

La fonction

$$\begin{aligned} f' : I &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f'(t) \end{aligned}$$

est appelée **fonction dérivée** de f sur I .

Proposition

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable

alors $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et :

$$(\bar{f})' = \overline{f'}$$

Proposition

Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable
alors $\bar{f} : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable et :

$$(\bar{f})' = \overline{f'}$$

Démonstration.

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\bar{f}(t) - \bar{f}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \overline{\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \right)} \quad \square$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en t

$\iff$ $\begin{array}{l} \operatorname{Re} f : I \rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{Im} f : I \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$ sont dérivables en t

De plus :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t)$$

Démonstration. On note pour tout $t \in I$:

$$f(t) = x(t) + iy(t)$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \frac{x(t+h) - x(t)}{h} + i \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \end{aligned}$$

et

$$x(t) = \frac{f(t) + \bar{f}(t)}{2} \qquad y(t) = \frac{f(t) - \bar{f}(t)}{2i} \qquad \square$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en t

$\iff \begin{array}{l} \operatorname{Re} f : I \rightarrow \mathbb{R} \\ \operatorname{Im} f : I \rightarrow \mathbb{R} \end{array}$ sont dérivables en t

De plus :

$$\forall t \in I \quad f'(t) = (\operatorname{Re} f)'(t) + i(\operatorname{Im} f)'(t)$$

Exemple 10

Dérivabilité de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto e^{it}$

Remarque

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ peut être représentée par sa trajectoire dans le plan complexe.

Remarque

$f : I \rightarrow \mathbb{C}$ peut être représentée par sa trajectoire dans le plan complexe.

Alors $f'(t)$ est l'affixe du vecteur vitesse de f au point d'affixe $f(t)$. Ce vecteur dirige la tangente à la trajectoire en ce point.

Exemple 10 (suite)

Représentation de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $t \longmapsto e^{it}$

Remarque

On étend aux fonctions complexes :

- ▶ les dérivées à gauche et à droite
- ▶ les opérations de somme, produit et quotient
- ▶ la composition
- ▶ les classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque

On étend aux fonctions complexes :

► la composition.

Proposition

Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : J \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions telles que $u(I) \subseteq J$.

Si f et u sont dérivables alors $f \circ u$ est dérivable, de dérivée :

$$(f \circ u)' = u' \cdot f' \circ u$$

IV. Dérivation des fonctions complexes

A. Définition

B. Théorème

Remarque

- (i) Comme $\mathbb{C}$ n'est pas muni de relation d'ordre, les fonctions complexes ne présentent pas d'extremum.
- (ii) Le théorème de Rolle, le théorème des accroissements finis ne sont plus vérifiés.

Exemple 10 (suite)

La fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

contredit le théorème de Rolle.

Théorème - Inégalité des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ il existe un réel M tel que :

$$\forall t \in]a, b[\quad |f'(t)| \leq M$$

Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Théorème - Inégalité des accroissements finis

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

- ▶ f est continue sur $[a, b]$
- ▶ f est dérivable sur $]a, b[$
- ▶ il existe un réel M tel que :

$$\forall t \in]a, b[\quad |f'(t)| \leq M$$

Alors :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$$

Remarque

On peut démontrer que f est M -lipschitzienne.

Remarque

Par contre, il est faux en général que :

Si il existe un réel m tel que

$$\forall t \in]a, b[\quad m \leq |f'(t)|$$

Alors :

$$m|b - a| \leq |f(b) - f(a)|$$

Démonstration.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = re^{i\theta}$$

Soit

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto f(t)e^{-i\theta} \end{aligned}$$

Alors $g'(t) = f'(t)e^{-i\theta}$ donc $|g'(t)| = |f'(t)|$

Soit $g(t) = x(t) + iy(t)$. Alors

$$|x'(t)| \leq |g'(t)| = |f'(t)| \leq M$$

Démonstration.

$$|x'(t)| \leq M$$

Par l'IAF :

$$|x(b) - x(a)| \leq M|b - a|$$

Or

$$r = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{x(b) - x(a)}{b - a} + i \frac{y(b) - y(a)}{b - a}$$

Comme r est réel alors

$$\frac{y(b) - y(a)}{b - a} = 0$$

Démonstration.

Donc

$$\left| \frac{x(b) - x(a)}{b - a} \right| = \left| \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \right| = r = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|$$

Ceci démontre que :

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a| \quad \square$$

Chapitre 0. Dérivation

I. Fonction dérivée

II. Théorèmes

III. Dérivées successives

IV. Dérivation des fonctions complexes

V. Convexité

A. Définition

B. Croissance des pentes

C. Fonctions convexes dérivables

V. Convexité

A. Définition

B. Croissance des pentes

C. Fonctions convexes dérivables

Lemme

Soit a et b deux réels avec $a \leq b$. Alors :

$$[a, b] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}$$

Lemme

Soit a et b deux réels avec $a \leq b$. Alors :

$$[a, b] = \{ (1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in [0, 1] \}$$

Démonstration. Laissée en exercice. □

De plus : si $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$ alors : $\lambda = \frac{c - a}{b - a}$

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Exemples

Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$,
sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Exemples

Les fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$,
sont convexes sur $\mathbb{R}$.

La fonction $x \mapsto x^3$ ne l'est pas.

Définition

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **convexe** si :

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

▷ Exercice.

Démontrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est convexe.

Démontrer que la fonction $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

Toute corde est en-dessous de la courbe.

Définition

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est **concave** si $-f$ est convexe.

Toute corde est en-dessous de la courbe.

Exemple

La fonction $x \mapsto \ln x$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$, est concave.

Proposition - Inégalité de Jensen

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi :

- ▶ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$
- ▶ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Lemme

Soit :

► $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$

► $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ appartient à I .

Démonstration du lemme.

Soit $a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

Démonstration du lemme.

Soit $a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

Alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad a \leq x_i \leq b$$

Démonstration du lemme.

Soit $a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

Alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad a \leq x_i \leq b$$

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \lambda_i a \leq \lambda_i x_i \leq \lambda_i b$$

Démonstration du lemme.

$$\text{Soit } a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad a \leq x_i \leq b$$

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \lambda_i a \leq \lambda_i x_i \leq \lambda_i b$$

$$\implies \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i b$$

Démonstration du lemme.

Soit $a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$

Alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad a \leq x_i \leq b$$

$$\forall i = 1, \dots, n \qquad \lambda_i a \leq \lambda_i x_i \leq \lambda_i b$$

$$\implies \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i b$$

$$a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq b$$

Démonstration du lemme.

$$\text{Soit } a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \in I$$

$$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \in I$$

Alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a \leq x_i \leq b$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \lambda_i a \leq \lambda_i x_i \leq \lambda_i b$$

$$\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i b$$

$$a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq b$$

Démonstration du lemme.

$$\text{Soit } a = \text{Min} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \in I$$

$$b = \text{Max} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \in I$$

Alors :

$$\forall i = 1, \dots, n \quad a \leq x_i \leq b$$

$$\forall i = 1, \dots, n \quad \lambda_i a \leq \lambda_i x_i \leq \lambda_i b$$

$$\implies \sum_{i=1}^n \lambda_i a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i b$$

$$a \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leq b$$

I est un intervalle donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$.



Proposition - Inégalité de Jensen

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi :

- ▶ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$
- ▶ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration.

Si $n = 1$, alors $\lambda_1 = 1$ donc :

$$f(\lambda_1 x_1) \leq \lambda_1 f(x_1)$$

Proposition - Inégalité de Jensen

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi :

- ▶ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$
- ▶ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Démonstration.

Si $n = 2$, alors $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$ donc :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

Démonstration. Par récurrence sur n .

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Initialisation. La propriété est vraie pour $n = 1$.

Démonstration. Par récurrence sur n .

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Hérédité. Supposons la propriété vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ des éléments de I ,

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1} \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1.$$

Soit $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 - \lambda_{n+1}$.

Si $\lambda = 0$ la propriété est vraie.

Démonstration.

Hérédité. Si $\lambda \neq 0$ on pose $y = \frac{\lambda_1}{\lambda}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_n}{\lambda}x_n$

Par hypothèse de récurrence :

$$f(y) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} f(x_i)$$

Par convexité :

$$f((1 - \lambda)x_{n+1} + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x_{n+1}) + \lambda f(y)$$

Donc :

$$\begin{aligned} & f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \\ & \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang $n + 1$.

Démonstration.

Conclusion. Par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Proposition - Inégalité de Jensen

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi :

- ▶ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n$
- ▶ $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

▷ Exercice 9.

Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.

Démontrer que :

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

V. Convexité

A. Définition

B. Croissance des pentes

C. Fonctions convexes dérivables

Lemme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $(x, y, z) \in I^3$.

Si $x < y < z$ alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Lemme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $(x, y, z) \in I^3$.

Si $x < y < z$ alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration.

Lemme

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $(x, y, z) \in I^3$.

Si $x < y < z$ alors :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

Démonstration.



Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Cas 1 : $a < x < y$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Cas 1 : $a < x < y$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Cas 2 : $x < a < y$

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Cas 2 : $x < a < y$

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Cas 3 : $x < y < a$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(y)}{a - y}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Cas 3 : $x < y < a$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(a) - f(y)}{a - y}$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $a \in I$, $x, y \in I \setminus \{a\}$.

Dans tous les cas $p_a(x) \leq p_a(y)$, donc p_a est croissante.

Démonstration. Supposons que la fonction p_a est croissante pour tout $a \in I$.

Soit $(x, y) \in I^2$, $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Démontrons que :

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Démonstration. Supposons que la fonction p_a est croissante pour tout $a \in I$.

Soit $(x, y) \in I^2$, $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$. Démontrons que :

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Évident si $x = y$

$$\lambda = 0$$

$$\lambda = 1$$

De plus on peut supposer que $x < y$.

Démonstration. Supposons que la fonction p_a est croissante pour tout $a \in I$.

Soit $(x, y) \in I^2$, $\lambda \in [0, 1]$.

Soit $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

Si $x < y$ et $\lambda \in]0, 1[$ alors $x < z < y$.

La fonction p_x est croissante donc :

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Or $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$ et $z - x > 0$ donc :

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$



Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

▷ Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$.

Démontrer que si f n'est pas constante alors :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Corollaire

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est concave ssi pour tout $a \in I$ la fonction p_a est décroissante.

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe ssi pour tout $a \in I$ la fonction

$$\begin{aligned} p_a : I \setminus \{a\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

est croissante.

Corollaire

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est concave ssi pour tout $a \in I$ la fonction p_a est décroissante.

Démonstration. Soit $g = -f$ et $q_a = -p_a$.

Alors g est convexe ssi les q_a sont croissantes. □

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une convexe et a intérieur à I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en a , et :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une convexe et a intérieur à I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en a , et :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Démonstration.

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une convexe et a intérieur à I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en a , et :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Démonstration.



Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une convexe et a intérieur à I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en a , et :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur un intervalle **ouvert** I .

Alors f est continue.

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une convexe et a intérieur à I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en a , et :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur un intervalle **ouvert** I .

Alors f est continue.

Démonstration. Tout point de I est intérieur.

Si f est dérivable à gauche et à droite en un point alors elle est continue en ce point. □

Proposition

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une convexe et a intérieur à I .

Alors f est dérivable à gauche et à droite en a , et :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a)$$

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe sur un intervalle **ouvert** I .

Alors f est continue.

Contre-exemple

La fonction smiley.

V. Convexité

A. Définition

B. Croissance des pentes

C. Fonctions convexes dérivables

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. D'après le lemme :

$\forall t \in]x, y[$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$. D'après le lemme :

$\forall t \in]x, y[$

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(t) - f(y)}{t - y}$$

Passage à la limite $t \rightarrow x$ et $t \rightarrow y$:

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f est convexe.

Soit $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

$$f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

Par transitivité : $f'(x) \leq f'(y)$

Ceci pour tout x et y tels que $x < y$, donc f' est croissante sur I .

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

On peut supposer que $x < z < y$.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

TAF : f est dérivable $\exists c_1 \in]x, z[$ $\exists c_2 \in]z, y[$:

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \quad f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

TAF : f est dérivable $\exists c_1 \in]x, z[$ $\exists c_2 \in]z, y[$:

$$f'(c_1) = \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq f'(c_2) = \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

$c_1 < c_2$ donc $f'(c_1) \leq f'(c_2)$.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

On calcule $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$, donc $(1 - \lambda) = \frac{y-z}{y-x}$, puis :

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

On calcule $\lambda = \frac{z-x}{y-x}$, donc $(1 - \lambda) = \frac{y-z}{y-x}$, puis :

$$\frac{f(z) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(z)}{(1 - \lambda)(y - x)}$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$\frac{f(z) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(z)}{(1 - \lambda)(y - x)}$$

$$\implies (1 - \lambda)f(z) - (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda f(y) - \lambda f(z)$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$\frac{f(z) - f(x)}{\lambda(y - x)} \leq \frac{f(y) - f(z)}{(1 - \lambda)(y - x)}$$

$$\implies (1 - \lambda)f(z) - (1 - \lambda)f(x) \leq \lambda f(y) - \lambda f(z)$$

$$\implies f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

La fonction f est donc convexe.

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Démonstration. Supposons que f' est croissante.

Soit $(x, y) \in I^2$ $\lambda \in [0, 1]$ $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$.

$$f(z) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

La fonction f est donc convexe.

Le théorème est démontré. □

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \text{ positive}$$

Démonstration. f' est croissante sur l'intervalle I si et seulement si f'' est positive. $\square$

Théorème

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f' \text{ croissante}$$

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

$$f \text{ concave} \iff f'' \text{ négative}$$

Corollaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :

$$f \text{ convexe} \iff f'' \text{ positive}$$

$$f \text{ concave} \iff f'' \text{ négative}$$

Exemple 11

$x \mapsto x$ $x \mapsto x^2$ $x \mapsto e^x$ $x \mapsto \operatorname{ch} x$
sont convexes sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$, concave sur $\mathbb{R}_-^*$.

$x \mapsto \ln x$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

$x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème

La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.

Théorème

La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.

▷ Exercice 11.

Démontrer ce résultat.

Théorème

La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.

Remarque

La courbe représentative d'une fonction concave dérivable est en-dessous de toutes ses tangentes.

Théorème

La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.

Remarque

La courbe représentative d'une fonction concave dérivable est en-dessous de toutes ses tangentes.

Exemple

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq x + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x \leq x - 1$$

Théorème

La courbe représentative d'une fonction convexe dérivable est au-dessus de toutes ses tangentes.

Remarque

La courbe représentative d'une fonction concave dérivable est en-dessous de toutes ses tangentes.

▷ Exercice 12.

Démontrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Prochain chapitre

Chapitre B8
Espaces vectoriels