Mathématiques

Chapitre A8
Limites et continuité

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Limites

Dans presque tout ce chapitre :

$$I \text{ est un intervalle.}$$

Définition

I intervalle

$\bar{I}$: union de I et de ses extrémités.

Définition

I intervalle

$\bar{I}$: union de I et de ses extrémités.

Exemples

$\overline{]a,b[} =$

$\overline{[a,b[} =$

$\overline{]a,b]} =$

$\overline{[a,b]} =$

Définition

I intervalle

$\bar{I}$: union de I et de ses extrémités.

Exemples

$$\overline{]a,b[} = [a,b]$$

$$\overline{[a,b[} = [a,b]$$

$$\overline{]a,b]} = [a,b]$$

$$\overline{[a,b]} = [a,b]$$

Définition

I intervalle

$\bar{I}$: union de I et de ses extrémités.

Exemples

$\overline{]a,b[} = [a,b]$ $\quad$ $\overline{[a,+\infty[} =$

$\overline{[a,b[} = [a,b]$ $\quad$ $\overline{]a,+\infty[} =$

$\overline{]a,b]} = [a,b]$ $\quad$ $\overline{]-\infty,b]} =$

$\overline{[a,b]} = [a,b]$ $\quad$ $\overline{]-\infty,b[} =$

Définition

I intervalle

$$\bar{I} \text{ : union de } I \text{ et de ses extrémités.}$$

Exemples

$$\overline{]a,b[} = [a,b] \qquad \overline{[a,+\infty[} = [a,+\infty[\cup \{+\infty\}$$

$$\overline{[a,b[} = [a,b] \qquad \overline{]a,+\infty[} = [a,+\infty[\cup \{+\infty\}$$

$$\overline{]a,b]} = [a,b] \qquad \overline{]-\infty,b]} =]-\infty,b] \cup \{-\infty\}$$

$$\overline{[a,b]} = [a,b] \qquad \overline{]-\infty,b[} =]-\infty,b] \cup \{-\infty\}$$

Remarque

Pour tout réel a :

$$\begin{aligned} a \in \bar{I} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \eta > 0 \quad [a-\eta, a+\eta] \cap I \neq \varnothing \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall \eta > 0 \quad \exists y \in I \quad |a-y| \leqslant \eta \end{aligned}$$

Remarque

Pour tout réel a :

$$\begin{aligned} a \in \bar{I} & \iff \forall \eta > 0 \quad [a-\eta, a+\eta] \cap I \neq \varnothing \\ & \iff \forall \eta > 0 \quad \exists y \in I \quad |a-y| \leqslant \eta \\ & \iff \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I \quad u_n \to a \end{aligned}$$

Définition

$f : I \to \mathbb{R}$ fonction $\quad a \in \bar{I} \quad \ell \in \mathbb{R}$

f admet ℓ pour limite en a si :

Définition

$f : I \to \mathbb{R}$ fonction $\quad a \in \bar{I} \quad \ell \in \mathbb{R}$

f admet ℓ pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in I$$
$$|x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$

Remarque

Autres écritures de la dernière implication :

$$\forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow$$

Remarque

Autres écritures de la dernière implication :

$$\forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$$

$$\Longleftrightarrow$$

Remarque

Autres écritures de la dernière implication :

$$\forall x \in I \qquad |x-a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-\ell| \leqslant \varepsilon$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \in [a-\eta, a+\eta] \cap I$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$$

$$\Longleftrightarrow \quad f([a-\eta, a+\eta] \cap I) \subseteq [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$$

Proposition (Unicité)

Si f admet pour limites ℓ et ℓ' en a alors $\ell = \ell'$.

Proposition (Unicité)

Si f admet pour limites ℓ et ℓ' en a alors $\ell = \ell'$.

Définition

Si f admet ℓ pour limite en a alors on dit que ℓ est la limite de f en a, et on note :

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_a f$$

Démonstration.

Proposition (Unicité)

Si f admet pour limites ℓ et ℓ' en a alors $\ell = \ell'$.

Définition

Si f admet ℓ pour limite en a alors on dit que ℓ est la limite de f en a, et on note :

$$\ell = \lim_{x \to a} f(x) \qquad \text{ou} \qquad \ell = \lim_{a} f$$

Démonstration.

$\square$

Remarque

On ramène souvent les limites en 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad & \iff \quad \lim_{x\to a} \left(f(x) - \ell\right) = 0 \\ & \iff \quad \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell \\ & \iff \quad \lim_{h\to 0} \left(f(a+h) - \ell\right) = 0 \end{aligned}$$

Lemme

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, et a un élément de I. Si f admet une limite en a alors cette limite est alors égale à $f(a)$.

Démonstration. Si f admet un réel ℓ pour limite en a alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \qquad |x - a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Or $a \in I$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad |f(a) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Ceci signifie exactement que $f(a) = \ell$. $\square$

Définition

Soit $a \in I$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si

Définition

Soit $a \in I$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Définition

Soit $a \in I$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

En d'autres termes, f est continue en a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in I$$

$$|x - a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Définition

Soit $a \in I$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Exemple

Une fonction continue en a, une autre non continue en a.

Remarque

$f : I \to \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ ssi :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ou $$\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Soit $a \in \bar{I} \setminus I$.

Si f admet une limite finie ℓ en a alors on dit que f est prolongeable par continuité en a.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Soit $a \in \bar{I} \setminus I$.

Si f admet une limite finie ℓ en a alors on dit que f est prolongeable par continuité en a.

La fonction $\overline{f} : I \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en a.
Elle est continue en a.

Remarque

$$
\begin{aligned}
& f \text{ est prolongeable par continuité en } a \\
\Longleftrightarrow \quad & f \text{ admet une limite finie en } a
\end{aligned}
$$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(i) $I =]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$ $\qquad \ell \in \mathbb{R}$

f admet ℓ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists B \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I$$

$$x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(ii) $I =]a, +\infty[$ ou $[a, +\infty[$

f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists B \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I$$

$$x \geqslant B \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A$$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

(iii) Soit a une borne de I, non infinie.

f admet $+\infty$ pour limite en a si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall x \in I$$

$$|x - a| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geqslant A$$

Notation

Dans ces trois situations on note respectivement :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

ou :

$$\lim_{+\infty} f = \ell \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty \qquad \lim_{a} f = +\infty$$

On définit de même les limites en $-\infty$ et les limites égales à $-\infty$.

▷ Exercice 1.

Interpréter en termes de quantificateurs les égalités suivantes :

$$\lim_{-\infty} f = \ell \qquad \lim_{+\infty} f = -\infty \qquad \lim_{a} f = -\infty$$

Définition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I} \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

f admet ℓ pour limite à gauche en a si la restriction de f à $I \cap \left]-\infty, a\right[$ admet ℓ pour limite en a.

On note alors : $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$

Définition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I} \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

f admet ℓ pour limite à droite en a si la restriction de f à $I \cap]a, +\infty[$ admet ℓ pour limite en a.

On note alors : $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$

Remarque

Soit a un réel.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = \ell \end{cases}$$

La réciproque est fausse, sauf si $f(a) = \ell$.

Définition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in I$

f est continue à gauche en a si sa restriction à $I \cap \left]-\infty, a\right]$ est continue en a.

f est continue à droite en a si sa restriction à $I \cap \left[a, +\infty\right[$ est continue en a.

Définition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in I$

f est continue à gauche en a si sa restriction à $I \cap]-\infty, a]$ est continue en a.

f est continue à droite en a si sa restriction à $I \cap [a, +\infty[$ est continue en a.

Remarque

f est continue en a

$\iff$ f est continue à gauche et à droite en a

Exemple

Fonction partie entière $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$

Définition

Soit V une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

(i) V est un voisinage de a $(a \in \mathbb{R})$ si

$$\exists \varepsilon > 0 \qquad]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq V$$

(ii) V est un voisinage de $+\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R} \qquad]A, +\infty[\subseteq V$$

(iii) V est un voisinage de $-\infty$ si

$$\exists A \in \mathbb{R} \qquad]-\infty, A[\subseteq V$$

Exemples

(i) $]0, 1[$

(ii) $\mathbb{R}$

(iii) $[2, 6]$

(iv) $]-1, 5[\cup [8, +\infty[$

(v) $\mathbb{Z} \quad \mathbb{Q}$

Remarque

On peut remplacer dans la définition $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ par $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$. En effet :

$$\begin{array}{lll} & \exists \varepsilon > 0 &]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\subseteq V \\ \iff & \exists \varepsilon > 0 & [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \subseteq V \end{array}$$

Proposition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I} \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors f admet ℓ pour limite en a si et seulement si :

Pour tout voisinage V_ℓ de ℓ
il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$\forall x \in I \qquad (x \in V_a \implies f(x) \in V_\ell)$$

Cette dernière implication s'écrit aussi :

$$f(V_a \cap I) \subseteq V_\ell$$

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Un réel a est dit intérieur à D si D est voisinage de a.

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Un réel a est dit intérieur à D si D est voisinage de a.
L'ensemble des points intérieurs à D est appelé intérieur de D et noté $\mathring{D}$.

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Un réel a est dit intérieur à D si D est voisinage de a.
L'ensemble des points intérieurs à D est appelé intérieur de D et noté $\mathring{D}$.

(ii) Un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ est dit adhérent à D si tout voisinage de a rencontre D.

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Un réel a est dit intérieur à D si D est voisinage de a.
L'ensemble des points intérieurs à D est appelé intérieur de D et noté $\overset{\circ}{D}$.

(ii) Un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ est dit adhérent à D si tout voisinage de a rencontre D.
L'ensemble des points adhérents à D est appelé adhérence de D et noté $\overline{D}$.

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

(i) L'ensemble des points intérieurs à D est appelé intérieur de D et noté $\mathring{D}$.

(ii) L'ensemble des points adhérents à D est appelé adhérence de D et noté $\overline{D}$.

Exemple

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\overline{D} = \mathbb{R}$.

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbb{Q}} =$$

Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

(i) L'ensemble des points intérieurs à D est appelé intérieur de D et noté $\mathring{D}$.

(ii) L'ensemble des points adhérents à D est appelé adhérence de D et noté $\overline{D}$.

Exemple

Une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ ssi $\overline{D} = \mathbb{R}$.

$$\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

II. Propriétés

A. Opérations sur les limites

B. Théorèmes

C. Lien avec les suites

Théorème

$$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I} \qquad (\lambda, \ell, k) \in \mathbb{R}^3$$

$$\begin{cases} \lim\limits_a f = \ell \\ \lim\limits_a g = k \end{cases} \implies \begin{cases} \lim\limits_a (\lambda f) = \lambda \ell \\ \lim\limits_a (f+g) = \ell + k \\ \lim\limits_a (fg) = \ell k \\ \lim\limits_a \dfrac{f}{g} = \dfrac{\ell}{k} \quad \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

Démonstration. Comme pour les suites. $\square$

Remarque

Les autres opérations sur les limites sont aussi valables pour les fonctions. Par exemple :

$$\begin{cases} \lim\limits_{a} f = \ell \\ \lim\limits_{a} g = +\infty \end{cases} \implies \lim_{a} \frac{f}{g} = 0$$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R}$ $\quad g : J \to \mathbb{R}$ composables

$a \in \bar{I}$ $\quad b \in \bar{J}$ $\quad c \in \overline{\mathbb{R}}$

Si $\lim\limits_{a} f = b$ et $\lim\limits_{b} g = c$

alors $\lim\limits_{a}(g \circ f) = c$

<u>Démonstration</u>. Pour tout voisinage V_c de c il existe un voisinage V_b de b tel que :

$$g(V_b \cap J) \subseteq V_c$$

Démonstration. Pour tout voisinage V_c de c il existe un voisinage V_b de b tel que :

$$g(V_b \cap J) \subseteq V_c$$

Pour ce voisinage V_b de b il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$f(V_a \cap I) \subseteq V_b$$

Démonstration. Pour tout voisinage V_c de c il existe un voisinage V_b de b tel que :

$$g(V_b \cap J) \subseteq V_c$$

Pour ce voisinage V_b de b il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$f(V_a \cap I) \subseteq V_b$$

$$\Longrightarrow \qquad f(V_a \cap I) \subseteq V_b \cap J$$

Démonstration. Pour tout voisinage V_c de c il existe un voisinage V_b de b tel que :

$$g(V_b \cap J) \subseteq V_c$$

Pour ce voisinage V_b de b il existe un voisinage V_a de a tel que :

$$f(V_a \cap I) \subseteq V_b$$

$$\implies \quad f(V_a \cap I) \subseteq V_b \cap J$$

$$\implies \quad g(f(V_a \cap I)) \subseteq g(V_b \cap J) \subseteq V_c \qquad \square$$

Corollaire

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad a \in I$$

Si	f	est continue en a
et	g	est continue en $f(a)$
alors	$g \circ f$	est continue en a.

Corollaire

$$I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} \mathbb{R} \qquad a \in I$$

Si	f	est continue en a
et	g	est continue en $f(a)$
alors	$g \circ f$	est continue en a.

▷ Exercice 2.

Démontrer ce corollaire sans utiliser de voisinage.

Théorème

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Théorème

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Remarque

Ceci signifie : il existe un voisinage V_a de a sur lequel f est bornée.

Cas où a est réel : $\exists \eta > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I \qquad x \in]a-\eta, a+\eta[\quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \leqslant M$$

Théorème

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Remarque

Ceci signifie : il existe un voisinage V_a de a sur lequel f est bornée.

Cas où $a = +\infty$: $\quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I \qquad x \in \,]A, +\infty[\quad \Longrightarrow \quad |f(x)| \leqslant M$$

Théorème

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Pour $\varepsilon = 1$, comme $\lim_a f = \ell$ alors il existe alors un voisinage V_a de a tel que :

$$\forall x \in I \qquad x \in V_a \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant 1$$

Théorème

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Pour $\varepsilon = 1$, comme $\lim_a f = \ell$ alors il existe alors un voisinage V_a de a tel que :

$$\begin{aligned} \forall x \in I \qquad x \in V_a \quad &\Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| \leqslant 1 \\ &\Longrightarrow \quad f(x) \in [\ell - 1, \ell + 1] \end{aligned}$$

Donc f est bornée (par $\ell - 1$ et $\ell + 1$) sur V_a. $\square$

Théorème

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.

Exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Proposition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que f admet une limite strictement positive en a.

Alors f est strictement positive au voisinage de a.

Proposition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que f admet une limite strictement positive en a.

Alors f est strictement positive au voisinage de a.

▷ Exercice 3.

Exprimer cette proposition à l'aide des quantificateurs, selon que a soit fini ou non, et la démontrer.

Proposition

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que f admet une limite strictement positive en a.

Alors f est strictement positive au voisinage de a.

Corollaire

Soit f continue en a telle que $f(a) > 0$.
Alors f est strictement positive au voisinage de a, *i.e.*, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall x \in \,]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I \qquad f(x) > 0$$

Remarque

La locution «au voisinage de» pour les fonctions remplace la locution «à partir d'un certain rang» pour les suites.

Théorème de comparaison

$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que $f \leqslant g$ au voisinage de a.

(i) Si f et g admettent des limites finies en a alors

$$\lim_a f \leqslant \lim_a g$$

(ii) Si $\lim_a f = +\infty$ alors $\lim_a g = +\infty$

(iii) Si $\lim_a g = -\infty$ alors $\lim_a f = -\infty$

Remarque

Les inégalités strictes deviennent larges par passage à la limite :

$$(\forall x \in I \quad f(x) < g(x)) \quad \Longrightarrow \quad \lim_a f \leqslant \lim_a g$$

Théorème d'encadrement

$f, g, h : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.

Si $\quad \lim\limits_a f = \lim\limits_a h = \ell \quad$ alors $\quad \lim\limits_a g = \ell$

▷ Exercice 4.

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \end{array}$$

a. Cette fonction admet-elle une limite en 0 ?

b. Expliciter $f(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ et pour $x \in [1, +\infty[$.
La fonction f est-elle continue en 1 ?

Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ où a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est monotone alors elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ où a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est monotone alors elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

(i) Si f est croissante et majorée, alors elle admet une limite finie à gauche en b.
Cette limite est sa borne supérieure :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in I}(f(x))$$

(ii) Si f est croissante non majorée alors elle tend vers $+\infty$ en b.

Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ où a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

Si $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est monotone alors elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

(iii) Si f est croissante et minorée, alors elle admet une limite finie à droite en a.
Cette limite est sa borne inférieure :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \operatorname*{Inf}_{x \in I}(f(x))$$

(iv) Si f est croissante non minorée alors elle tend vers $-\infty$ en a.

▷ Exercice.

Compléter le théorème en ajoutant les cas où f est décroissante.

Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ où a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(i) Si f est décroissante et majorée, alors elle admet une limite finie à droite en a.
Cette limite est sa borne supérieure :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \operatorname*{Sup}_{x \in I}(f(x))$$

(ii) Si f est décroissante non majorée alors elle tend vers $+\infty$ en a.

Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ où a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

(iii) Si f est décroissante et minorée, alors elle admet une limite finie à gauche en b.
Cette limite est sa borne inférieure :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \operatorname{Inf}_{x \in I}(f(x))$$

(iv) Si f est décroissante non minorée alors elle tend vers $-\infty$ en b.

Remarque

On note sous réserve d'existence :

$$\operatorname*{Sup}_I f = \operatorname*{Sup}_{x\in I}(f(x))$$

$$\text{et} \quad \operatorname*{Inf}_I f = \operatorname*{Inf}_{x\in I}(f(x))$$

La borne supérieure d'une fonction f sur une partie D de $\mathbb{R}$ est la borne supérieure de la partie $f(D)$, de même pour la borne inférieure.

Remarque

On note sous réserve d'existence :

$$\operatorname*{Sup}_I f = \operatorname{Sup}\{\, f(x) \mid x \in I\}$$

$$\text{et} \quad \operatorname*{Inf}_I f = \operatorname{Inf}\{\, f(x) \mid x \in I\}$$

La borne supérieure d'une fonction f sur une partie D de $\mathbb{R}$ est la borne supérieure de la partie $f(D)$, de même pour la borne inférieure.

Remarque

On note sous réserve d'existence :

$$\operatorname*{Sup}_I f = \operatorname{Sup} f(I)$$

$$\text{et} \quad \operatorname*{Inf}_I f = \operatorname{Inf} f(I)$$

La borne supérieure d'une fonction f sur une partie D de $\mathbb{R}$ est la borne supérieure de la partie $f(D)$, de même pour la borne inférieure.

Théorème de la limite monotone

Soit $I =]a, b[$ où a et b deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
Si f est monotone alors elle admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

Démonstration. Voir démonstrations pour les suites.

$\square$

II. Propriétés

A. Opérations sur les limites

B. Théorèmes

C. Lien avec les suites

Remarque

Si $(u_n) \subseteq I$ et $u_n \to \ell$ alors $\ell \in \bar{I}$.

En effet, si $\forall n \in \mathbb{N} \quad a < u_n < b$

alors : $$a \leqslant \lim u_n \leqslant b$$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a} f(x) = \ell \right)$$

$$\Longrightarrow \qquad \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell \right) \implies \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$$

Corollaire

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in I \qquad f$ continue en a

$$\lim u_n = a \implies \lim f(u_n) = f(a)$$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell \right) \implies \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$$

Corollaire

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in I \qquad f$ continue en a

$$\lim u_n = a \implies \lim f(u_n) = f(a)$$

ou $$u_n \to a \implies f(u_n) \to f(a)$$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \ell\right) \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$$

Remarque

Si f est continue et (u_n) est convergente alors :

$$\lim f(u_n) = f(\lim u_n)$$

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n = a \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a} f(x) = \ell \right) \implies \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$$

<u>Démonstration</u>.

Théorème - Composition de limites

$f : I \to \mathbb{R} \qquad (u_n) \subseteq I$

$$\left(\lim_{n \to +\infty} u_n = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to a} f(x) = \ell \right) \implies \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = \ell$$

Démonstration.

$\square$

Exemple 1

$$u_n = \frac{n}{n+1} \qquad f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Justifier que la suite $(f(u_n))$ converge et donner sa limite.

Exemple 1

$$u_n = \frac{n}{n+1} \qquad f(x) = \lfloor x \rfloor$$

Justifier que la suite $(f(u_n))$ converge et donner sa limite.

Exemple 2

Démontrer que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exemple 3 : suites récurrentes

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue $\qquad u_0 \in \mathbb{R} \qquad$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

On suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors ℓ est un point fixe de f : $\quad f(\ell) = \ell$

Théorème
(Caractérisation séquentielle de la limite)

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \overline{I} \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Équivalence entre :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

(ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I :

$$u_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_n) \to \ell$$

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite)

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \overline{I} \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Équivalence entre :

(i) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

(ii) Pour toute suite (u_n) d'éléments de I :

$$u_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_n) \to \ell$$

Démonstration.

(i)$\Longrightarrow$*(ii)* par composition de limites.

Théorème (Caractérisation séquentielle de la limite)

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \overline{I} \qquad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Équivalence entre :

(i) f n'admet pas ℓ pour limite en a

(ii) Il existe $(u_n) \subseteq I$

$$u_n \to a \qquad \text{et} \qquad f(u_n) \not\to \ell$$

Démonstration.

non *(i)* $\Longrightarrow$ non *(ii)* :

non *(i)* : f n'admet pas ℓ pour limite en a donc :

$$\exists V_\ell \qquad \forall V_a \qquad f(V_a \cap I) \not\subset V_\ell$$

non *(i)* : f n'admet pas ℓ pour limite en a donc :

$$\exists V_\ell \qquad \forall V_a \qquad f(V_a \cap I) \not\subseteq V_\ell$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_a = \begin{cases} \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[& \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Soit $u_n \in V_a \cap I$ tel que $f(u_n) \notin V_\ell$.

non *(i)* : f n'admet pas ℓ pour limite en a donc :

$$\exists V_\ell \qquad \forall V_a \qquad f(V_a \cap I) \not\subset V_\ell$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_a = \begin{cases} \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[& \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Soit $u_n \in V_a \cap I$ tel que $f(u_n) \notin V_\ell$.
Alors $u_n \to a$ et $f(u_n) \not\to \ell$: non *(ii)*

non *(i)* : f n'admet pas ℓ pour limite en a donc :

$$\exists V_\ell \qquad \forall V_a \qquad f(V_a \cap I) \not\subset V_\ell$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$V_a = \begin{cases} \left[a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}\right] & \text{si } a \in \mathbb{R} \\ [n, +\infty[& \text{si } a = +\infty \\ ]-\infty, -n] & \text{si } a = -\infty \end{cases}$$

Soit $u_n \in V_a \cap I$ tel que $f(u_n) \notin V_\ell$.
Alors $u_n \to a$ et $f(u_n) \not\to \ell$: non *(ii)*
Les propositions *(i)* et *(ii)* sont équivalentes. $\square$

Corollaire (Caractérisation séquentielle de la continuité)

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in I$

Équivalence entre :

(i) f est continue en a

(ii) Pour toute suite $(u_n) \subseteq I$:

$$u_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_n) \to f(a)$$

Corollaire (Caractérisation séquentielle de la continuité)

$f : I \to \mathbb{R} \qquad a \in I$

Équivalence entre :

(i) f est continue en a

(ii) Pour toute suite $(u_n) \subseteq I$:

$$u_n \to a \qquad \Longrightarrow \qquad f(u_n) \to f(a)$$

<u>Démonstration</u>. Conséquence du théorème précédent, avec $a \in I$ et $\ell = f(a)$. $\square$

Définition

$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que g est non-nulle au voisinage de a.

- f est négligeable devant g en a si
- f est équivalente à g en a si
- f est dominée par g en a si

Définition

$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que g est non-nulle au voisinage de a.

- f est négligeable devant g en a si $\displaystyle \lim_a \frac{f}{g} = 0$
- f est équivalente à g en a si
- f est dominée par g en a si

Définition

$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que g est non-nulle au voisinage de a.

- f est négligeable devant g en a si $\displaystyle \lim_a \frac{f}{g} = 0$
- f est équivalente à g en a si $\displaystyle \lim_a \frac{f}{g} = 1$
- f est dominée par g en a si

Définition

$f, g : I \to \mathbb{R} \qquad a \in \bar{I}$

On suppose que g est non-nulle au voisinage de a.

- f est négligeable devant g en a si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 0$
- f est équivalente à g en a si $\lim\limits_{a} \dfrac{f}{g} = 1$
- f est dominée par g en a si $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a

Notations

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} o(g(x))$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} O(g(x))$$

Notations

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} o(g(x)) \qquad f \underset{(a)}{=} o(g)$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} O(g(x)) \qquad f \underset{(a)}{=} O(g)$$

Notations

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} o(g(x)) \qquad f \underset{(a)}{=} o(g) \qquad f = o_a(g)$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad f \underset{a}{\sim} g \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} O(g(x)) \qquad f \underset{(a)}{=} O(g) \qquad f = O_a(g)$$

Notations

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} o(g(x)) \qquad f \underset{(a)}{=} o(g) \qquad f = o_a(g)$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \qquad f \underset{a}{\sim} g \qquad f \underset{a}{\sim} g$$

$$f(x) \underset{(x\to a)}{=} O(g(x)) \qquad f \underset{(a)}{=} O(g) \qquad f = O_a(g)$$

On peut aussi préciser le point a après :

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{au voisinage de } a$$

Remarque

- $f \underset{(a)}{=} o(g) \iff f(x) = g(x)\varepsilon(x)$ où $\lim\limits_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$
- $f \underset{a}{\sim} g \iff f(x) = g(x)h(x)$ où $\lim\limits_{x\to a} h(x) = 1$
- $f \underset{(a)}{=} O(g) \iff f(x) = g(x)M(x)$ où $x \mapsto M(x)$ est bornée au voisinage de a.

On a noté : $\varepsilon = \frac{f}{g}$ $\quad h = \frac{f}{g}$ $\quad M = \frac{f}{g}$

Exemples

(i) $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $x^5 \underset{(0)}{=} o(x^2)$

Exemples

(i) $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $x^5 \underset{(0)}{=} o(x^2)$

(ii) $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $\ln x \underset{(0)}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

Exemples

(i) $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $x^5 \underset{(0)}{=} o(x^2)$

(ii) $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $\ln x \underset{(0)}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{+\infty}{=} O(1)$

Exemples

(i) $x^2 \underset{+\infty}{=} o(x^5)$ et $x^5 \underset{(0)}{=} o(x^2)$

(ii) $\ln x \underset{+\infty}{=} o(x)$ et $\ln x \underset{(0)}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$

(iii) $\sin x \underset{0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{+\infty}{=} O(1)$

(iv) Si $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$

alors $f(x) \underset{+\infty}{=} O(x^n)$

Remarque

Les propriétés des relations de comparaison pour les suites restent vraies pour les fonctions.

Proposition

$$\text{Si} \quad f \underset{(a)}{=} o(g) \quad \text{et} \quad g \underset{(a)}{=} o(h) \quad \text{alors} \quad f \underset{(a)}{=} o(h)$$

Remarque

Les propriétés des relations de comparaison pour les suites restent vraies pour les fonctions.

Proposition

La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence, elle est compatible au produit et au quotient mais pas à la somme.

Remarque

Les propriétés des relations de comparaison pour les suites restent vraies pour les fonctions.

Proposition

Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim\limits_{a} g = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $\lim\limits_{a} f = \ell$

Remarque

Les propriétés des relations de comparaison pour les suites restent vraies pour les fonctions.

Proposition

Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors f et g sont de même signe au voisinage de a.

Remarque

Les propriétés des relations de comparaison pour les suites restent vraies pour les fonctions.

Proposition

$$f \underset{(a)}{=} o(g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f + g \underset{a}{\sim} g$$

Exemple

Un développement limité à l'ordre 1 :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x \underset{(0)}{=} x + o(x)$$

Proposition

Si f est dérivable en $a \in I$ alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a(x-a)$$

Théorème (Croissances comparées)

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \quad x^\alpha = o(a^x)$ en $+\infty$

(ii) $\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \ln^\beta x = o(x^\alpha)$ en $+\infty$

(iii) $\forall a > 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z} \quad a^x = o(x^\alpha)$ en $-\infty$

(iv) $\forall \alpha > 0 \quad \forall \beta \in \mathbb{Z} \quad \ln^\beta x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en 0

(v) $\forall |a| < 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad a^x = o(x^\alpha)$ en $+\infty$

Démonstration.

(i) $x^\alpha = o(a^x)$ en $+\infty$

Démonstration.

(ii) $\ln^\beta x = o(x^\alpha)$ en $+\infty$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad y^\alpha = o(a^y) \qquad \text{en } +\infty$$

Pour $y = \ln x$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad \ln^\alpha x = o(x^{\ln a}) \qquad \text{en } +\infty$$

On remplace α par β et $\ln a$ par α :

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0 \qquad \ln^\beta x = o(x^\alpha) \qquad \text{en } +\infty$$

Démonstration.

(iii) $a^x = o(x^\alpha)$ en $-\infty$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad x^\alpha = o(a^x) \qquad$ en $+\infty$

On remplace x par $-x$:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad (-x)^\alpha = o(a^{-x}) \qquad$ en $-\infty$

On remplace α par $-\alpha$:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad (-x)^{-\alpha} = o(a^{-x}) \qquad$ en $-\infty$

Ce qui donne :

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad a^x = o(x^\alpha) \qquad$ en $-\infty$

Démonstration.

(iv) $\ln^\beta x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ en 0

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha > 0 \qquad \ln^\beta x = o(x^\alpha) \qquad \text{en } +\infty$$

On remplace x par $\frac{1}{x}$:

$$\forall \beta \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha > 0 \qquad \ln^\beta \frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad \text{en } 0$$

Ce qui donne :

$$\forall \beta \in \mathbb{Z} \quad \forall \alpha > 0 \qquad \ln^\beta x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \qquad \text{en } 0$$

Démonstration.

(v) $a^x = o(x^\alpha)$ en $+\infty$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall a > 1 \qquad x^\alpha = o(a^x) \qquad \text{en } +\infty$$

On remplace a par $\frac{1}{a}$ et α par $-\alpha$:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall |a| < 1 \qquad \frac{1}{x^\alpha} = o\left(\frac{1}{a^x}\right) \qquad \text{en } +\infty$$

Ce qui donne :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall |a| < 1 \qquad a^x = o(x^\alpha) \qquad \text{en } +\infty$$

$\square$

Démonstration.

(i) $x^\alpha = o(a^x)$ en $+\infty$

Théorème (Équivalences usuelles)

$$\sin u \underset{0}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u \qquad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$

Théorème (Équivalences usuelles)

$$\sin u \underset{0}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u \qquad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$

Corollaire

$$1 - \cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2} \qquad \tan u \underset{0}{\sim} u \qquad \ln x \underset{1}{\sim} x - 1$$

Théorème (Équivalences usuelles)

$$\sin u \underset{0}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u \qquad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$

Corollaire

$$1 - \cos u \underset{0}{\sim} \frac{u^2}{2} \qquad \tan u \underset{0}{\sim} u \qquad \ln x \underset{1}{\sim} x - 1$$

▷ Exercice 5.

Démontrer l'équivalence : $\quad 1 - \cos u \underset{0}{\sim} \dfrac{u^2}{2}$

Théorème (Équivalences usuelles)

$$\sin u \underset{0}{\sim} u \qquad e^u - 1 \underset{0}{\sim} u \qquad \ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$$

▷ Exercice 6.

Démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x) \quad \text{au voisinage de } 0$$

Exemple 4

Calculer les limites suivantes.

(i) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x^2)}{x^3 + 3x^2}$ *(ii)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x - 3}{2x^2 + 5}$

(iii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2}{\ln x - e^x}$ *(iv)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 7x}{\tan 5x}$

(v) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 + e^x}{x^3 - e^{-x}}$ *(vi)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sqrt{1 + x^2}}{\ln \sqrt[3]{1 + x^3}}$

(vii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{2}{x}\right)^x$ *(viii)* $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin 4x}{\cos 6x}$

Remarques

(i) Pour étudier une limite en un réel a non-nul on peut se ramener à 0 en posant $h = x - a$.

(ii) Pour étudier une limite en $\pm\infty$ on peut se ramener à 0 en posant $h = \frac{1}{x}$.

▷ Exercice 7.

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3-x^3}{4x^2-2x+1}$ *(ii)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\sqrt{x}+5}$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}-\ln x}{\sqrt{x}+\ln x}$ *(iv)* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

(v) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^5-1}$ *(vi)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{3x^5-1}$

(vii) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{4x-1}{3x+1}\right)^{(2x+3)}$ *(viii)* $\displaystyle\lim_{x\to1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{(x-1)}$

(ix) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x+\frac{\pi}{6})}{\sin(5x+\frac{\pi}{6})}$ *(x)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$

Dans cette partie I désigne une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Dans cette partie I désigne une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue ou continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Dans cette partie I désigne une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue ou continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Notation

Ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}(I) \qquad \mathcal{C}^0(I) \qquad \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$$

Dans cette partie I désigne une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

Définition

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite continue ou continue sur I si elle est continue en tout point de I.

Remarque

$I' \subseteq I$

$$f \text{ continue sur } I \implies f_{|I'} \text{ continue sur } I'$$

Proposition

f, g continues sur I $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

(i) $f+g \quad fg \quad \lambda f$ sont continues sur I.

(ii) Si g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

Proposition

$f : I \to \mathbb{R} \quad g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subseteq J$

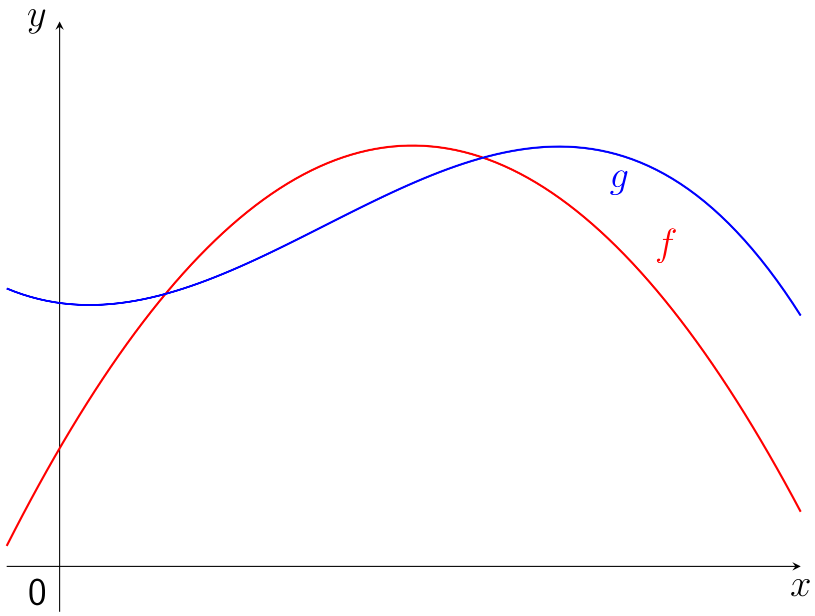
$$f, g \text{ continues} \quad \Longrightarrow \quad g \circ f \text{ continue}$$

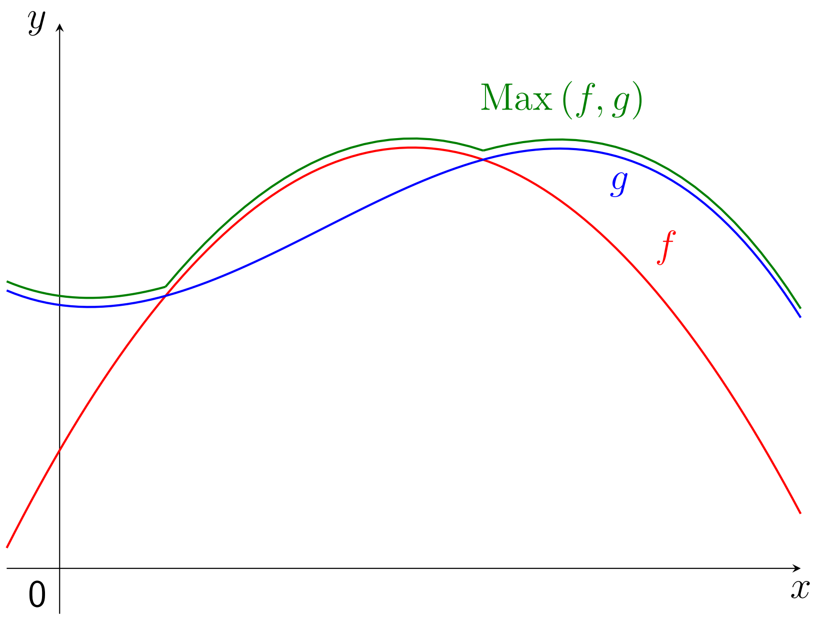
Exemple

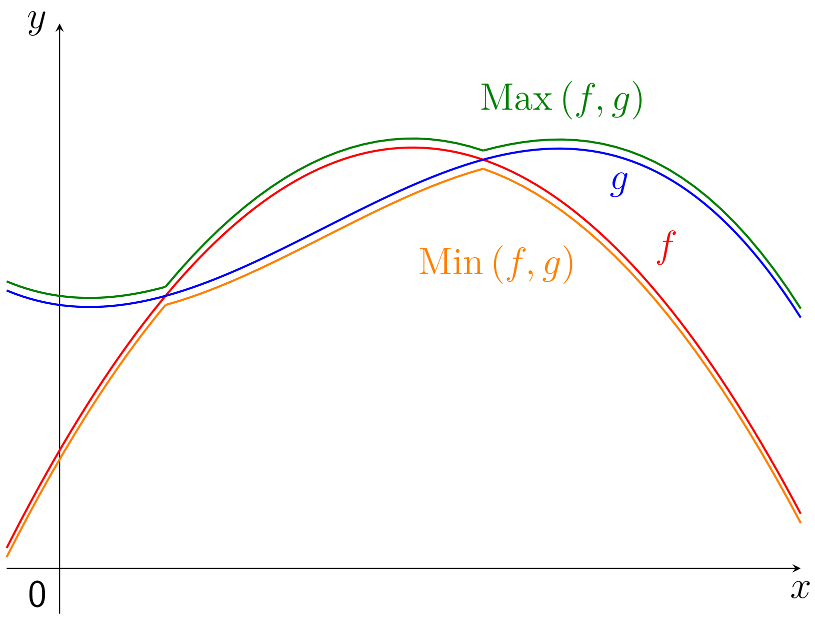
Si f et g sont continues sur I alors les fonctions

$$\mathrm{Max}\,(f,g) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Min}\,(f,g)$$

sont continues sur I.


y
g
f
0
x


y
$\mathrm{Max}\,(f,g)$
g
f
0
x



y
$\mathrm{Max}\,(f,g)$
g
f
$\mathrm{Min}\,(f,g)$
0
x

Démonstration. Si a et b sont deux réels alors :

$$\mathrm{Max}\,(a,b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$$

$$\mathrm{Min}\,(a,b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$$

Suite de la démonstration. Pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{Max}\,(f,g))(x) &= \mathrm{Max}\,(f(x),g(x)) \\
&= \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \\
(\mathrm{Min}\,(f,g))(x) &= \mathrm{Min}\,(f(x),g(x)) \\
&= \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration. Ainsi

$$\operatorname{Max}(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$$

$$\operatorname{Min}(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$$

Par sommes et composition, les fonctions $\operatorname{Max}(f,g)$ et $\operatorname{Min}(f,g)$ sont continues. $\square$

Théorème

Les fonctions polynomiales	$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
les fonctions exponentielles	$e^x \quad a^x$
logarithmes	$\ln x \quad \log x$
puissances	x^α
circulaires	$\cos \quad \sin \quad \tan$
circulaires inverses	$\arccos \quad \arcsin \quad \arctan$
hyperboliques	$\mathrm{ch} \quad \mathrm{sh} \quad \mathrm{th}$
valeur absolue	$\lvert x \rvert$

sont continues sur leurs ensembles de définition.

Remarque

En particulier les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et tangente sont continues.

Démonstration.

La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \to x$ est continue.

Par sommes et produits les fonctions polynomiales sont continues.

Démonstration.

La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \to x$ est continue.
Par sommes et produits les fonctions polynomiales sont continues.

La fonction logarithme népérien est continue car c'est une primitive (voir chapitre A9).

Démonstration.
La fonction $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} : x \to x$ est continue.
Par sommes et produits les fonctions polynomiales sont continues.

La fonction logarithme népérien est continue car c'est une primitive (voir chapitre A9).

La fonction exponentielle est sa réciproque, donc elle est continue (voir théorème de la bijection ci-dessous).

Suite de la démonstration.

On démontre ci-dessous que la fonction sinus est continue.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par opérations ces fonctions sont continues.

Suite de la démonstration.

On démontre ci-dessous que la fonction sinus est continue.

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Par opérations ces fonctions sont continues.

Par théorème de la bijection (voir ci-dessous) les fonctions trigonométriques réciproques sont continues.

Suite de la démonstration.

$$a^x = e^{x \ln a} \qquad x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Par opérations toutes ces fonctions sont continues.

Suite de la démonstration.

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Par composition la fonction valeur absolue est continue. $\square$

Démonstration de la continuité du sinus.

On admet que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin x \leqslant x$$

Démonstration de la continuité du sinus.

On admet que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin x \leqslant x$$

$\square$

IV. Continuité

A. Opérations

B. Théorèmes

1. Valeurs intermédiaires

Théorème

$f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I.

On suppose qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tels que

$$f(a) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) \geqslant 0$$

Alors il existe $c \in \left]a, b\right[$
ou $c \in \left]b, a\right[$ tel que $f(c) = 0$.

1. Valeurs intermédiaires

Théorème

$f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I.

On suppose qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tels que

$$f(a) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) \geqslant 0$$

Alors il existe $c \in \,]a, b[$
ou $c \in \,]b, a[$ tel que $f(c) = 0$.

<u>Démonstration</u>.

1. Valeurs intermédiaires

Théorème

$f : I \to \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I.

On suppose qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tels que

$$f(a) \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f(b) \geqslant 0$$

Alors il existe $c \in \,]a, b[$
ou $c \in \,]b, a[$ tel que $f(c) = 0$.

Démonstration.

$\square$

Théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur l'intervalle I

$(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$

Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur l'intervalle I

$(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$

Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration. Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$.

Théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur l'intervalle I

$(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$

Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration. Supposons que $f(a) \leqslant f(b)$.

Si $f(a) \geqslant f(b)$, alors on considère plutôt la fonction $g : x \mapsto d - f(x)$. $\square$

▷ Exercice 8.

$f : [0,1] \to [0,1]$ continue.

Démontrer qu'il existe $\alpha \in [0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Corollaire

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Démonstration.

$f : D \to \mathbb{R}$ continue $\quad I \subseteq D$ intervalle $\quad J = f(I)$

On souhaite démontrer que J est un intervalle.

Démonstration.

$f : D \to \mathbb{R}$ continue $\quad I \subseteq D$ intervalle $\quad J = f(I)$

Soit y_1, $y_2 \in J$ puis x_1, $x_2 \in I$ tels que :

$$f(x_1) = y_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = y_2$$

Soit y_0 entre y_1 et y_2.

D'après le TVI il existe x_0 entre x_1 et x_2 tel que $f(x_0) = y_0$.

Démonstration.

$f : D \to \mathbb{R}$ continue $\quad I \subseteq D$ intervalle $\quad J = f(I)$

Soit y_1, $y_2 \in J$ puis x_1, $x_2 \in I$ tels que :

$$f(x_1) = y_1 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = y_2$$

Soit y_0 entre y_1 et y_2.

D'après le TVI il existe x_0 entre x_1 et x_2 tel que $f(x_0) = y_0$.

I est un intervalle donc $x_0 \in I$

$y_0 = f(x_0)$ donc $y_0 \in f(I) = J$

Démonstration.

On a démontré que pour tous y_1, $y_2 \in J$ et tout réel y_0

$$y_1 \leqslant y_0 \leqslant y_2 \quad \Longrightarrow \quad y_0 \in J$$

Ceci signifie que J est un intervalle. $\square$

▷ Exercice 9.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{-\infty} f = -\infty \qquad \lim_{+\infty} f = +\infty$$

Démontrer que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

2. Image d'un segment

Définition

Un segment est un intervalle fermé borné, *i.e.*, de la forme $[a, b]$ où a et b sont des réels.

2. Image d'un segment

Définition

Un segment est un intervalle fermé borné, *i.e.*, de la forme $[a, b]$ où a et b sont des réels.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Lemme

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

et $(u_n) \subseteq [a, b]$ telle que : $(f(u_n)) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors : $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \ell$

Lemme

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

et $(u_n) \subseteq [a, b]$ telle que : $(f(u_n)) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors : $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \ell$

En particulier ℓ est finie.

Lemme

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

et $(u_n) \subseteq [a,b]$ telle que : $(f(u_n)) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors : $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = \ell$

En particulier ℓ est finie.

<u>Démonstration</u>.

Lemme

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

et $(u_n) \subseteq [a, b]$ telle que : $(f(u_n)) \to \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Alors : $\exists c \in [a, b] \quad f(c) = \ell$

En particulier ℓ est finie.

Démonstration.

$\square$

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. **f est bornée sur $[a, b]$.**

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. **f est bornée sur $[a, b]$.**

Si f n'est pas majorée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists u_n \in [a, b] \qquad f(u_n) \geqslant n$$

Alors $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}} \to +\infty$.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. **f est bornée sur $[a, b]$.**

Si f n'est pas majorée :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \exists u_n \in [a, b] \qquad f(u_n) \geqslant n$$

Alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}} \to +\infty$.

Contradiction : d'après le lemme précédent si $(f(u_n))$ tend vers ℓ alors ℓ est fini.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. **f est bornée sur $[a, b]$.**

Donc $f([a, b])$ est majorée.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. **f est bornée sur $[a, b]$.**

Donc $f([a, b])$ est majorée.

De même que $f([a, b])$ est minorée.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

1. **f est bornée sur $[a, b]$.**

Donc $f([a, b])$ est majorée.

De même que $f([a, b])$ est minorée.

Donc $f([a, b])$ est bornée.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. f **atteint ses bornes.**

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. **f atteint ses bornes.**

$f([a, b])$ admet une borne supérieure :

$$M = \operatorname{Sup} f([a, b]) = \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f$$

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. f **atteint ses bornes.**

$f([a, b])$ admet une borne supérieure :

$$M = \operatorname{Sup} f([a, b]) = \operatorname{Sup}_{[a,b]} f$$

Il existe $(u_n) \subseteq [a, b]$ telle que $(f(u_n)) \to M$.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. f **atteint ses bornes.**

$f([a,b])$ admet une borne supérieure :

$$M = \mathrm{Sup}\, f([a,b]) = \mathrm{Sup}_{[a,b]}\, f$$

Il existe $(u_n) \subseteq [a,b]$ telle que $(f(u_n)) \to M$.

Lemme précédent : $\exists c \in [a,b] \qquad f(c) = M$

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. f **atteint ses bornes.**

$f([a,b])$ admet une borne supérieure :

$$M = \operatorname{Sup} f([a,b]) = \operatorname*{Sup}_{[a,b]} f$$

Il existe $(u_n) \subseteq [a,b]$ telle que $(f(u_n)) \to M$.

Lemme précédent : $\quad \exists c \in [a,b] \qquad f(c) = M$

Donc f atteint sa borne supérieure.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. **f atteint ses bornes.**

Donc f atteint sa borne supérieure.

De même que f atteint sa borne inférieure.

Théorème des valeurs extrêmes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

2. f **atteint ses bornes.**

Donc f atteint sa borne supérieure.

De même que f atteint sa borne inférieure.

Finalement f est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes. $\square$

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque

Ce résultat ne s'étend pas aux intervalle ouverts ou semi-ouverts.

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque

Ce résultat ne s'étend pas aux intervalle ouverts ou semi-ouverts.

Exemple

$f : x \mapsto x^2$

$$f(]-1,1[) =$$

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Remarque

Ce résultat ne s'étend pas aux intervalle ouverts ou semi-ouverts.

Exemple

$f : x \mapsto x^2$

$$f(]-1, 1[) = [0, 1[$$

Cet intervalle n'est pas ouvert.

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

- Corollaire du TVI : $f([a, b])$ est un intervalle.

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

- Corollaire du TVI : $f([a, b])$ est un intervalle.
- TVE : $f([a, b])$ est borné.

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue

- Corollaire du TVI : $f([a, b])$ est un intervalle.
- TVE : $f([a, b])$ est borné.
- Soit $\quad m = \inf f([a, b]) \quad M = \operatorname{Sup} f([a, b])$
  f atteint ses bornes donc $m, M \in f([a, b])$.

Corollaire

L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Démonstration. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue

- Corollaire du TVI : $f([a,b])$ est un intervalle.
- TVE : $f([a,b])$ est borné.
- Soit $\quad m = \inf f([a,b]) \quad M = \operatorname{Sup} f([a,b])$
  f atteint ses bornes donc $m, M \in f([a,b])$.

Donc $f([a,b]) = [m,M]$.
Il s'agit bien d'un segment. $\square$

▷ Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$$

Démontrer que f est bornée.

3. Bijections

Proposition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
Alors f est strictement monotone.

3. Bijections

Proposition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
Alors f est strictement monotone.

▷ Exercice 11.

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.

a. Écrire en termes logiques la proposition :
f n'est pas strictement monotone.

3. Bijections

Proposition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
Alors f est strictement monotone.

▷ Exercice 11.

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.
Soit $(a, b, c, d) \in I^4$ tels que $a < b$, $c < d$, $f(a) \leqslant f(b)$ et $f(c) \geqslant f(d)$ et soit :

$$g(t) = f((1-t)a + tc) - f((1-t)b + td)$$

3. Bijections

Proposition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
Alors f est strictement monotone.

▷ Exercice 11.

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.

b. Démontrer que : $\exists \tau \in [0,1] \qquad g(\tau) = 0$

3. Bijections

Proposition

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective.
Alors f est strictement monotone.

▷ Exercice 11.

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective.

b. Démontrer que : $\exists \tau \in [0,1] \qquad g(\tau) = 0$

c. En déduire une contradiction et conclure.

Proposition

Si f est strictement monotone alors f est injective.

Proposition

Si f est strictement monotone alors f est injective.

Démonstration.

$$x \neq y \implies \begin{cases} & x < y \\ \text{ou} & x > y \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} & f(x) < f(y) \\ \text{ou} & f(x) > f(y) \end{cases} \implies f(x) \neq f(y)$$

Proposition

Si f est strictement monotone alors f est injective.

Démonstration.

$$x \neq y \implies \begin{cases} & x < y \\ \text{ou} & x > y \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} & f(x) < f(y) \\ \text{ou} & f(x) > f(y) \end{cases} \implies f(x) \neq f(y)$$

Contraposée :

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad f(x) = f(y) \implies x = y$$

Proposition

Si f est strictement monotone alors f est injective.

Démonstration.

$$x \neq y \implies \begin{cases} & x < y \\ \text{ou} & x > y \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} & f(x) < f(y) \\ \text{ou} & f(x) > f(y) \end{cases} \implies f(x) \neq f(y)$$

Contraposée :

$$\forall (x, y) \in I^2 \qquad f(x) = f(y) \implies x = y \qquad \square$$

Théorème de la bijection

I intervalle

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone

$J = f(I)$

(i) J est un intervalle.

Théorème de la bijection

I intervalle

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone

$J = f(I)$

(i) J est un intervalle.

(ii) f réalise une bijection de I dans J.

Théorème de la bijection

I intervalle

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone

$J = f(I)$

(i) J est un intervalle.

(ii) f réalise une bijection de I dans J.

(iii) f^{-1} est strictement monotone de même sens que f.

Théorème de la bijection

I intervalle

$f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone

$J = f(I)$

(i) J est un intervalle.

(ii) f réalise une bijection de I dans J.

(iii) f^{-1} est strictement monotone de même sens que f.

(iv) f^{-1} est continue.

Démonstration.

(i) Le fait que J est un intervalle est conséquence du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

(ii) Comme $J = f(I)$ alors $f : I \to J$ est surjective. Comme f est strictement monotone alors f est injective.

Suite de la démonstration.

On suppose dans la suite que f **est croissante**.

(iii) Soit y, $y' \in J$ tels que $y < y'$. Alors :

$$f(f^{-1}(y)) < f(f^{-1}(y'))$$

Comme f est strictement croissante :

$$f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$$

Ainsi : f^{-1} est strictement croissante.

Suite de la démonstration.

(iv) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$, *i.e.*, $f(x_0) = y_0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par croissance stricte de f :

$$\begin{aligned} x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \\ \iff \quad & f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) \\ \iff \quad & f(x_0 - \varepsilon) < \quad y_0 \quad < f(x_0 + \varepsilon) \end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

(iv) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$, *i.e.*, $f(x_0) = y_0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par croissance stricte de f :

$$
\begin{aligned}
& x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \\
& \qquad \iff \quad f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon) \\
& \qquad \iff \quad f(x_0 - \varepsilon) < \quad y_0 \quad < f(x_0 + \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$[y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq \left]f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)\right[\tag{2}$$

Suite de la démonstration.

(iv) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$, *i.e.*, $f(x_0) = y_0$.

$$[y_0 - \eta, y_0 + \eta] \subseteq \,]f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon)[\qquad (2)$$

Ainsi pour tout $y \in J$:

$$\begin{aligned}
|y - y_0| \leqslant \eta \quad &\iff \quad y_0 - \eta \leqslant y \leqslant y_0 + \eta \\
&\implies \quad f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon) \\
&\iff \quad x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon \\
&\implies \quad -\varepsilon \leqslant f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0) \leqslant \varepsilon \\
&\iff \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

(iv) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$, *i.e.*, $f(x_0) = y_0$.

On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall y \in J$$
$$|y - y_0| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi f^{-1} est continue en y_0.

Suite de la démonstration.

(iv) Soit $y_0 \in J$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$, *i.e.*, $f(x_0) = y_0$.

On a démontré :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall y \in J$$
$$|y - y_0| \leqslant \eta \quad \Longrightarrow \quad \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi f^{-1} est continue en y_0.

Ceci est valable pour tout $y_0 \in J$ donc f^{-1} est continue sur J. $\square$

Remarque

De plus les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes.

Remarque

De plus les courbes représentatives de f et de f^{-1} sont symétriques l'une de l'autre par rapport à la première bissectrice des axes.

Exemple

$\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante, ses limites sont $-\infty$ et $+\infty$.
Ainsi sa fonction réciproque, l'exponentielle, réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, et elle est continue.

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement croissante :

$$f([a,b]) =$$

$$f(]a,b[) =$$

$$f([a,b[) =$$

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement croissante :

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

$$f(]a,b[) =$$

$$f([a,b[) =$$

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement croissante :

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

$$f(]a,b[) =]\lim_a f, \lim_b f[$$

$$f([a,b[) =$$

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement croissante :

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

$$f(]a,b[) =]\lim_a f, \lim_b f[$$

$$f([a,b[) = [f(a), \lim_b f[$$

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement décroissante :

$$f([a,b]) =$$

$$f(]a,b]) =$$

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement décroissante :

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

$$f(]a,b]) =$$

Exemples de détermination de J

Si f est bijective continue strictement décroissante :

$$f([a,b]) = [f(b), f(a)]$$

$$f(]a,b]) = [f(b), \lim_a f[$$

etc.

$$f : I \to \mathbb{C} \qquad \text{avec} \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

$$f : I \to \mathbb{C} \qquad \text{avec} \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

Exemple

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$

$$f : I \to \mathbb{C} \qquad \text{avec} \quad I \subseteq \mathbb{R}$$

Exemple

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$$

Plus de fonctions croissante, décroissante, monotone, majorée, minorée.

Plus d'extrema.

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On définit les fonctions :

- Conjuguée de f $\quad \bar{f}(t) = \overline{f(t)}$
- Partie réelle de f $\quad (\mathrm{Re}\, f)(t) = \mathrm{Re}(f(t))$
- Partie imaginaire de f $\quad (\mathrm{Im}\, f)(t) = \mathrm{Im}(f(t))$
- Module de f $\quad |f|(t) = |f(t)|$

Définition

$f : I \to \mathbb{C}$ est **bornée** si $|f| : I \to \mathbb{R}$ est bornée.

Définition

Soit $a \in I$. Alors $f : I \to \mathbb{C}$ est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall t \in I$$
$$|t - a| \leqslant \eta \implies |f(t) - f(a)| \leqslant \varepsilon$$

Remarque

On conserve les notions de

- limites
- limites à gauche et à droite
- continuité à gauche et à droite
- négligeabilité
- équivalence
- domination.

Théorème

$f, g : I \to \mathbb{C} \qquad a \in I$

(i) Si f est continue en a alors f est bornée au voisinage de a.

(ii) Si f et g sont continues en a alors $f+g$ et fg le sont.
Si de plus $g(a) \neq 0$ alors f/g est continue en a.

Notation

Ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{C}(I,\mathbb{C}) \qquad \mathcal{C}^0(I,\mathbb{C})$$

Proposition

$f : I \to \mathbb{C} \qquad a \in \bar{I} \qquad \ell \in \mathbb{C}$

(i) Si f admet ℓ pour limite en a
alors $\bar{f}$ admet $\bar{\ell}$ pour limite en a.

(ii) Si f est continue en a
alors $\bar{f}$ est continue en a.

Démonstration.

(i) f admet ℓ pour limite en a ssi :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall t \in I \qquad |t - a| \leqslant \eta \implies |f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Comme

$$|\bar{f}(t) - \bar{\ell}| = |\overline{f(t) - \ell}| = |f(t) - \ell|$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists \eta > 0 \qquad \forall t \in I \qquad |t - a| \leqslant \eta \implies |\bar{f}(t) - \bar{\ell}| \leqslant \varepsilon$$

Ceci montre que $\bar{f}(t) \xrightarrow[t \to a]{} \bar{\ell}$

Suite de la démonstration.

(ii) D'après ce qui précède :

Si f admet $f(a)$ pour limite en a
alors $\bar{f}$ admet $\bar{f}(a)$ pour limite en a

donc $\bar{f}$ est continue en a. $\square$

Théorème

$f : I \to \mathbb{C} \qquad a \in I$

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue en } a \\ \iff \quad & \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont continues en } a \end{aligned}$$

Théorème

$f : I \to \mathbb{C} \qquad a \in I$

f est continue en a

$\iff$ $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont continues en a

Démonstration.

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

f continue $\implies$ $\bar{f}$ continue

$\implies$ $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ continues

Théorème

$f : I \to \mathbb{C} \qquad a \in I$

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue en } a \\ \iff \quad & \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont continues en } a \end{aligned}$$

Démonstration.

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ continues} \\ \implies \quad & \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f \text{ continue} \implies f \text{ continue } \square \end{aligned}$$

Théorème

$f : I \to \mathbb{C} \qquad a \in I$

$$\begin{aligned} & f \text{ est continue en } a \\ \iff \quad & \operatorname{Re} f \text{ et } \operatorname{Im} f \text{ sont continues en } a \end{aligned}$$

Exemple

La fonction $\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{it} \end{aligned}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

▷ Exercice 12.

Soit $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \frac{e^{it}-1}{t}$$

Démontrer que f est continue et prolongeable par continuité en 0.

Prochain chapitre

Chapitre B7

Polynômes