Mathématiques

Chapitre A7
Suites

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Généralités

Chapitre A7. Suites

I. Généralités

II. Suites classiques

Chapitre A7. Suites

Définition

Suite indexée par $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n = u(n) \end{aligned}$$

Définition

Suite indexée par $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto u_n = u(n) \end{aligned}$$

Notations

$$u \qquad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (u_0, u_1, u_2, \ldots) \qquad (u_n)$$

Notations

La suite (u_n)

Le réel u_n

Notation

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$
indexées par $\mathbb{N}$

Notation

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$
indexées par $\mathbb{N}$

Une suite peut être indexée

par $\mathbb{N}^*$ comme $\left(\dfrac{1}{n}\right)$

voire par $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ comme $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$

etc.

Modes de définition d'une suite :

- Définition explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3^n - 2$$

Modes de définition d'une suite :

- Définition explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3^n - 2$$

- Définition par récurrence :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{2}$$

Modes de définition d'une suite :

- Définition explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = 3^n - 2$$

- Définition par récurrence :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 1 - \frac{u_n^2}{2}$$

- Définition implicite :
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit u_n la solution positive de l'équation $x^n + x - 1$.

Définitions

$$u = (u_0, u_1, \ldots)$$

$$v = (v_0, v_1, \ldots)$$

- Addition :

$$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$$

Définitions

$$u = (u_0, u_1, \ldots)$$

$$v = (v_0, v_1, \ldots)$$

- Addition :

$$u + v = (u_0 + v_0, u_1 + v_1, \ldots)$$

$$\textit{i.e.,} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (u+v)_n = u_n + v_n$$

Définitions

$$u = (u_0, u_1, \ldots)$$

$$v = (v_0, v_1, \ldots)$$

- Multiplication :

$$uv = (u_0v_0, u_1v_1, \ldots)$$

i.e., $\forall n \in \mathbb{N} \quad (uv)_n = u_nv_n$

Définitions

$$u = (u_0, u_1, \ldots)$$

$$\lambda \in \mathbb{R}$$

- Multiplication par un scalaire :

$$\lambda u = (\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots)$$

i.e., $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\lambda u)_n = \lambda u_n$

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite
<u>constante</u> si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

constante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$

croissante si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

<u>constante</u> si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$

<u>croissante</u> si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

<u>décroissante</u> si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

constante	si	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_n = u_{n+1}$
croissante	si	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_n \leqslant u_{n+1}$
décroissante	si	$\forall n \in \mathbb{N}$	$u_n \geqslant u_{n+1}$
monotone	si		

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

<u>constante</u> si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$

<u>croissante</u> si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

<u>décroissante</u> si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$

<u>monotone</u> si elle est croissante
ou décroissante

<u>str^{t} croissante</u> si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

constante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$

croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$

décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$

monotone si elle est croissante ou décroissante

str^{t} croissante si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$

str^{t} décroissante si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

constante	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$
croissante	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
décroissante	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$
monotone	si	elle est croissante ou décroissante
str^{t} croissante	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$
str^{t} décroissante	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$
str^{t} monotone	si	

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

<u>constante</u>	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_{n+1}$
<u>croissante</u>	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$
<u>décroissante</u>	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_{n+1}$
<u>monotone</u>	si elle est croissante ou décroissante	
<u>str^{t} croissante</u>	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$
<u>str^{t} décroissante</u>	si	$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > u_{n+1}$
<u>str^{t} monotone</u>	si elle est strictement croissante ou strictement décroissante	

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite
majorée si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$

M est alors un majorant de (u_n)

minorée si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$

M est alors un majorant de (u_n)

minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$

m est alors un minorant de (u_n)

bornée si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

<u>majorée</u> si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$

M est alors un majorant de (u_n)

<u>minorée</u> si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$

m est alors un minorant de (u_n)

<u>bornée</u> si elle est majorée et minorée

<u>périodique</u> si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$

M est alors un majorant de (u_n)

minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$

m est alors un minorant de (u_n)

bornée si elle est majorée et minorée

périodique si $\exists T \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+T} = u_n$

stationnaire si

Définitions

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite

majorée si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$

M est alors un majorant de (u_n)

minorée si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$

m est alors un minorant de (u_n)

bornée si elle est majorée et minorée

périodique si $\exists T \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+T} = u_n$

stationnaire si elle est constante à partir d'un certain rang :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n = u_{n+1}$$

Remarques

(i) Suite constante :

$$(\lambda)_n = (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots)$$

(ii) (u_n) bornée $\iff$ $(|u_n|)$ majorée

Remarques

(iii) Une suite (u_n) vérifie une propriété $\mathcal{P}(u_n)$ à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $\mathcal{P}(u_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Remarques

(iii) Une suite (u_n) vérifie une propriété $\mathcal{P}(u_n)$ à partir d'un certain rang s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la propriété $\mathcal{P}(u_n)$ est vraie pour tout $n \geqslant N$.

Exemple

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang si :

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad u_n \geqslant 0)$$

▷ Exercice 1.

Étudier les variations de :

$$u_n = \frac{n^2 - 3}{n+1} \qquad v_n = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \qquad w_n = \frac{n^n}{n!}$$

II. Suites classiques

A. Suites arithmétiques

B. Suites géométriques

C. Suites arithmético-géométriques

D. Suites double-récurrentes linéaires

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

r est la raison.

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

r est la raison.

Proposition

Terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Rappel

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition - Somme des termes

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k \quad =$$

Rappel

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition - Somme des termes

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0+\frac{n(n+1)}{2}r$$

$$=$$

Rappel

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition - Somme des termes

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

II. Suites classiques

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

q est la raison.

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

q est la raison.

Proposition

Terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 q^n$$

Proposition

Si $|q| < 1$ alors (q^n) converge vers 0.
Si $|q| = 1$ alors (q^n) converge ssi $q = 1$.
Si $|q| > 1$ alors (q^n) diverge.

Proposition

Si $|q| < 1$ alors (q^n) converge vers 0.
Si $|q| = 1$ alors (q^n) converge ssi $q = 1$.
Si $|q| > 1$ alors (q^n) diverge.

Remarque

Cette propriété est valable et souvent utilisée dans le cas complexe.

Démonstration. Par composition de limites :

$$|q^n| = e^{n \ln |q|} \qquad \square$$

Proposition - Somme des termes

$$\sum_{k=m}^{M} u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_M$$

$$=$$

Proposition - Somme des termes

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{M} u_k &= u_m + u_{m+1} + \cdots + u_M \\ &= \begin{cases} \dfrac{u_m - u_{M+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (M-m+1)u_0 & \text{si } q = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

II. Suites classiques

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe a, b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

Définition

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique s'il existe a, b tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = au_n + b$$

Remarque

On suppose dans la suite que $a \neq 1$ (sinon la suite est arithmétique).

Méthode

- Introduire le réel γ tel que $\gamma = a\gamma + b$.
- Vérifier que la suite $(v_n) = (u_n - \gamma)$ est géométrique.
- En déduire le terme général de (v_n), puis celui de (u_n).

Exemple 1

Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 3u_n - 4$$

▷ Exercice 2.

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2 - \frac{1}{2} u_n$$

a. Calculer le terme général de la suite (u_n).
b. Démontrer qu'elle converge et donner sa limite.
c. Calculer la somme de ses 10 premiers termes.

II. Suites classiques

A. Suites arithmétiques

B. Suites géométriques

C. Suites arithmético-géométriques

D. Suites double-récurrentes linéaires

Définition

Suite double-récurrente linéaire :

$$u_0 \qquad u_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \mu u_n$$

où λ et μ sont deux scalaires.

Définition

Suite double-récurrente linéaire :

$$u_0 \qquad u_1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \lambda u_{n+1} + \mu u_n$$

où λ et μ sont deux scalaires.

Remarque

On se ramène à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

avec a non-nul.

Remarque

On se ramène à la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0$$

avec a non-nul.

Définition

Équation caractéristique :

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Théorème

- $\Delta \neq 0$: λ_1 et λ_2 solutions de (C)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha \lambda_1^n + \beta \lambda_2^n$$

où α et β sont deux constantes.

- $\Delta = 0$: λ_0 solution de (C)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\alpha n + \beta) \lambda_0^n$$

où α et β sont deux constantes.

Méthode

Les constantes α et β sont calculées grâce aux valeurs de u_0 et u_1.

Exemple 2

(i) $$u_0 = -2 \qquad u_1 = -1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$$

(ii) $$v_0 = -1 \qquad v_1 = 1$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$$

Méthode

Les constantes α et β sont calculées grâce aux valeurs de u_0 et u_1.

Exemple 2

(i) $u_0 = -2 \qquad u_1 = -1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$

(ii) $v_0 = -1 \qquad v_1 = 1$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} = v_{n+1} - \frac{1}{4}v_n$

Théorème de double récurrence

Soit $\mathcal{P}_n$ une propriété dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Si

Initialisation	$\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies
Hérédité	$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\mathcal{P}_n \text{ et } \mathcal{P}_{n+1}\right) \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+2}$

Alors

Conclusion	$\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ Exercice 3.

Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n$$

▷ Exercice 4. Suite de Fibonacci

$$u_0 = u_1 = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

a. Déterminer le terme général de cette suite.
b. Calculer la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

III. Limites

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Propriété de la borne inférieure

Toute partie non-vide minorée de $\mathbb{R}$ admet un plus grand minorant.

Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée

Borne supérieure de A : $\mathrm{Sup}(A)$

Le plus petit de ses majorants.

Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée

Borne supérieure de A : $\quad \mathrm{Sup}(A)$

Le plus petit de ses majorants.

Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide minorée

Borne inférieure de A : $\quad \mathrm{Inf}(A)$

Le plus grand de ses minorants.

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Remarque

La propriété de la borne supérieure n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$.

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Remarque

La propriété de la borne supérieure n'est pas vérifiée par $\mathbb{Q}$.

$$A = \left\{ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \;\middle|\; p^2 \leqslant 2q^2 \right\}$$

Proposition

$A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée $\qquad s \in \mathbb{R}$

$$s = \mathrm{Sup}(A) \quad \Longleftrightarrow$$

Proposition

$A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée $\qquad s \in \mathbb{R}$

$$s = \mathrm{Sup}(A) \iff$$

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant s$$

et $\quad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Big(t < s \ \Rightarrow\ (\exists x \in A \quad x > t) \Big)$

Remarques

(i) Un majorant La borne supérieure

Remarques

(i) Un majorant La borne supérieure

(ii) Si $s = \operatorname{Sup} A$

et M est un majorant de A

alors

Remarques

(i) Un majorant La borne supérieure

(ii) Si $s = \operatorname{Sup} A$

et M est un majorant de A

alors $s \leqslant M$.

▷ Exercice 5.

$A \subseteq \mathbb{R} \qquad s \in \mathbb{R}$

Écrire en termes logiques la proposition :

s n'est pas la borne supérieure de A.

▷ Exercice 6.

$A \subseteq \mathbb{R}_+^*$ non-vide.

Démontrer que A admet une borne inférieure et que celle-ci est positive ou nulle.

▷ Exercice 6.

$A \subseteq \mathbb{R}_+^*$ non-vide.

Démontrer que A admet une borne inférieure et que celle-ci est positive ou nulle.

▷ Exercice 7.

$A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ non-vides.

Démontrer que si B est minorée alors A est minorée et $\operatorname{Inf} B \leqslant \operatorname{Inf} A$.

Proposition - Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad$ b majorant de A

Si $b \in A$ alors b est la borne supérieure de A.

Proposition - Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad$ b majorant de A

Si $b \in A$ alors b est la borne supérieure de A.

b est le maximum de A : $\quad b = \mathrm{Max}(A)$

Proposition - Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad$ b majorant de A

Si $b \in A$ alors b est la borne supérieure de A.

b est le maximum de A : $\quad b = \mathrm{Max}(A)$

Proposition - Définition

$A \subseteq \mathbb{R}$ $\qquad$ a minorant de A

si $a \in A$ alors a est la borne inférieure de A.

a est le minimum de A : $\quad a = \mathrm{Min}(A)$

Exemple 3

L'intervalle $[-5, 4[$ admet un minimum mais pas de maximum.

Remarque

Si une partie A est finie et non-vide alors elle admet un minimum et un maximum.

Définition

Si une suite (u_n) est majorée, alors sa borne supérieure est le plus petit de ses majorants. C'est le réel s tel que :

Définition

Si une suite (u_n) est majorée, alors sa borne supérieure est le plus petit de ses majorants. C'est le réel s tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant s$$

$$\text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \left(t < s \implies (\exists n \in \mathbb{N} \quad t < u_n) \right)$$

Remarques

(i) $\displaystyle \operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}(u_n) = \operatorname{Sup} U$ où $U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(ii) On définit de même la borne inférieure, le maximum et le minimum d'une suite.

Remarques

(i) $$\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}}(u_n) = \operatorname{Sup} U \quad \text{où} \quad U = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(ii) On définit de même la borne inférieure, le maximum et le minimum d'une suite.

Notations

$$\operatorname*{Sup}_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad \operatorname*{Inf}_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad \operatorname*{Max}_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad \operatorname*{Min}_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

▷ Exercice 8.

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet-elle des bornes ?
des extrema ?

Résumé

- Un majorant de A est un réel plus grand que tous les éléments de A.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- Le maximum est la borne supérieure lorsqu'elle est dans A.

Résumé

- Un majorant de (u_n) est un réel plus grand que tous les u_n.
- La borne supérieure est le plus petit des majorants.
- Le maximum est la borne supérieure lorsqu'elle est atteinte. C'est alors l'un des u_n.

III. Limites

Définitions

Une suite (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors : $u_n \to \ell$

Définitions

Une suite (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors : $u_n \to \ell$

Une suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Définitions

Une suite (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors : $\quad u_n \to \ell$

Une suite (u_n) est convergente s'il existe un réel ℓ tel que (u_n) converge vers ℓ.

Une suite est divergente si elle n'est pas convergente.

Définitions

Une suite (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Exemple

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Définitions

Une suite (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Exemple

La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

$\triangleright$ Exercice 9.

Démontrer que la suite $(u_n) = (e^{-n})$ est convergente.

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Définition

Si (u_n) converge vers ℓ alors ℓ est la limite de (u_n).

On note :

$$\lim u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

<u>Démonstration dans le cas réel</u>.

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Démonstration dans le cas complexe. Si

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

alors :

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &= |(u_n - \ell) - (u_n - \ell')| \\ &\leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \qquad \leqslant 2\varepsilon = \tfrac{2}{3}|\ell - \ell'| \end{aligned}$$

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Démonstration dans le cas complexe. Si

$$|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_n - \ell'| \leqslant \varepsilon$$

alors :

$$\begin{aligned} |\ell' - \ell| &= |(u_n - \ell) - (u_n - \ell')| \\ &\leqslant |u_n - \ell| + |u_n - \ell'| \qquad \leqslant 2\varepsilon = \tfrac{2}{3}|\ell - \ell'| \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 4

Soit (u_n) une suite d'entiers.
Démontrer que si (u_n) est convergente alors elle est stationnaire.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 10.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$.
Démontrer que :

- Si $\ell > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $\ell < 0$ alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

III. Limites

Théorème

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors :

- *(i)* $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$
- *(ii)* (λu_n) converge vers $\lambda\ell$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$
- *(iii)* $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$
- *(iv)* $|u_n|$ converge vers $|\ell|$
- *(v)* $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ $\qquad$ si $\ell \neq 0$

Théorème

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors :

(i) $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$

(ii) (λu_n) converge vers $\lambda\ell$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

(iii) $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$

(iv) $|u_n|$ converge vers $|\ell|$

(v) $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ $\quad$ si $\ell \neq 0$

Corollaire

(vi) $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$

(vii) $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Théorème

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors :

(i) $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$

(ii) (λu_n) converge vers $\lambda\ell$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Corollaire

(vi) $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$

(vii) $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Démonstration du corollaire.

(vi) est conséquence de *(ii)* et *(i)*.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors :

(iii) $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$

(v) $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ si $\ell \neq 0$

Corollaire

(vi) $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$

(vii) $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Démonstration du corollaire.

(vii) est conséquence de *(v)* et *(iii)*. $\square$

Lemme 1

$$\begin{array}{rl} (u_n) & \text{converge vers } \ell \\ \iff (u_n - \ell) & \text{converge vers } 0 \end{array}$$

Lemme 1

$$\begin{aligned} & (u_n) && \text{converge vers } \ell \\ \iff & (u_n - \ell) && \text{converge vers } 0 \end{aligned}$$

Démonstration. Immédiat.

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

$\square$

Lemme 2

Si (u_n) converge vers 0
et (v_n) est bornée

alors (u_nv_n) converge vers 0.

Lemme 2

Si (u_n) converge vers 0
et (v_n) est bornée

alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration.

Lemme 2

Si (u_n) converge vers 0
et (v_n) est bornée

alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

Démonstration.

$\square$

Démonstration du théorème.

(i) $(u_n + v_n)$ **converge vers** $\ell + \ell'$

D'après le lemme 1 on peut se ramener à des suites convergeant vers 0 :

$$\begin{aligned}
& u_n \to \ell \quad \text{et} \quad v_n \to \ell' \\
\iff \quad & (u_n - \ell) \to 0 \quad \text{et} \quad (v_n - \ell') \to 0 \\
\implies \quad & ((u_n - \ell) + (v_n - \ell')) \to 0 \\
\iff \quad & ((u_n + v_n) - (\ell + \ell')) \to 0 \\
\iff \quad & (u_n + v_n) \to (\ell + \ell')
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration du théorème.

(ii) (λu_n) **converge vers** $\lambda\ell$

$$u_n \to \ell$$

$$\iff (u_n - \ell) \to 0 \qquad \text{d'après le lemme 1}$$

Suite de la démonstration du théorème.

(ii) (λu_n) **converge vers** $\lambda\ell$

$$
\begin{array}{lll}
 & u_n \to \ell & \\
\iff & (u_n - \ell) \to 0 & \text{d'après le lemme 1} \\
\implies & \lambda(u_n - \ell) \to 0 & \text{d'après le lemme 2} \\
 & & \text{car } (\lambda)_n \text{ est bornée}
\end{array}
$$

Suite de la démonstration du théorème.

(ii) (λu_n) **converge vers** $\lambda\ell$

$$u_n \to \ell$$

$$\iff (u_n - \ell) \to 0 \qquad \text{d'après le lemme 1}$$

$$\implies \lambda(u_n - \ell) \to 0 \qquad \text{d'après le lemme 2 car } (\lambda)_n \text{ est bornée}$$

$$\iff (\lambda u_n - \lambda\ell) \to 0$$

$$\iff \lambda u_n \to \lambda\ell \qquad \text{d'après le lemme 1}$$

Suite de la démonstration du théorème.

(iii) $(u_n v_n)$ **converge vers** $\ell\ell'$

$$u_n v_n - \ell\ell'$$

Suite de la démonstration du théorème.

(iii) $(u_n v_n)$ **converge vers** $\ell\ell'$

$$u_n v_n - \ell\ell' = u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell'$$

Suite de la démonstration du théorème.

(iii) $(u_n v_n)$ **converge vers** $\ell\ell'$

$$\begin{aligned} u_n v_n - \ell\ell' &= u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell' \\ &= v_n \underbrace{(u_n - \ell)}_{\text{tend vers } 0} + \ell \underbrace{(v_n - \ell')}_{\text{tend vers } 0} \end{aligned}$$

Suite de la démonstration du théorème.

(iii) $(u_n v_n)$ **converge vers** $\ell\ell'$

$$\begin{aligned} u_n v_n - \ell\ell' &= u_n v_n - \ell v_n + \ell v_n - \ell\ell' \\ &= v_n \underbrace{(u_n - \ell)}_{\text{tend vers } 0} + \ell \underbrace{(v_n - \ell')}_{\text{tend vers } 0} \end{aligned}$$

(v_n) est bornée car convergente

donc $\quad u_n v_n - \ell\ell' \to 0$

puis $\quad u_n v_n \to \ell\ell' \qquad$ d'après le lemme 1

Suite de la démonstration du théorème.

(iv) $|u_n|$ **converge vers** $|\ell|$

Inégalité triangulaire :

$$||u_n| - |\ell|| \leqslant |u_n - \ell|$$

Suite de la démonstration du théorème.

(v) $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = -\frac{u_n - \ell}{\ell u_n}$$

Suite de la démonstration du théorème.

(v) $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ **converge vers** $\frac{1}{\ell}$

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} = -\frac{u_n - \ell}{\ell u_n} \to 0$$

En effet
$$\begin{aligned} u_n \to \ell \quad &\Longrightarrow \quad \text{apcr} \quad |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2} \\ &\Longrightarrow \quad \text{apcr} \quad 0 < \left|\frac{1}{\ell u_n}\right| \leqslant \frac{2}{\ell^2} \\ &\Longrightarrow \quad \left(\frac{1}{\ell u_n}\right) \text{ bornée} \end{aligned}$$

$\square$

III. Limites

Lemme

Soit (w_n) une suite **convergente**.

- Si apcr $w_n \geqslant 0$ alors $\lim w_n \geqslant 0$
- Si apcr $w_n \leqslant 0$ alors $\lim w_n \leqslant 0$

Lemme

Soit (w_n) une suite **convergente**.

- Si apcr $w_n \geqslant 0$ alors $\lim w_n \geqslant 0$
- Si apcr $w_n \leqslant 0$ alors $\lim w_n \leqslant 0$

Démonstration.

Lemme

Soit (w_n) une suite **convergente**.

- Si apcr $w_n \geqslant 0$ alors $\lim w_n \geqslant 0$
- Si apcr $w_n \leqslant 0$ alors $\lim w_n \leqslant 0$

<u>Démonstration</u>.

$\square$

Théorème de comparaison

(u_n) et (v_n) convergentes.

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

(ii) Si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

Théorème : Stabilité des inégalités larges

(u_n) et (v_n) convergentes.

(i) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad u_n < v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

(ii) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

Théorème : Stabilité des inégalités larges

(u_n) et (v_n) convergentes.

(i) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n < v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

(ii) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

<u>Démonstration</u>. Le est conséquence du donc il suffit de démontrer celui-ci.

Théorème : Stabilité des inégalités larges

(u_n) et (v_n) convergentes.

(i) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad u_n < v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

(ii) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

<u>Démonstration</u>. Le *(i)* est conséquence du *(ii)* donc il suffit de démontrer celui-ci.

Théorème : Stabilité des inégalités larges

(u_n) et (v_n) convergentes.

(ii) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

<u>Démonstration</u>. On pose : $w_n = v_n - u_n$

Alors (w_n) converge vers : $\lim v_n - \lim u_n$

Théorème : Stabilité des inégalités larges

(u_n) et (v_n) convergentes.

(ii) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

<u>Démonstration</u>. On pose : $w_n = v_n - u_n$

Alors (w_n) converge vers : $\lim v_n - \lim u_n$

Apcr $w_n \geqslant 0$

Théorème : Stabilité des inégalités larges

(u_n) et (v_n) convergentes.

(ii) Si $\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \qquad u_n \leqslant v_n$

alors $\lim u_n \leqslant \lim v_n$

Démonstration. On pose : $w_n = v_n - u_n$

Alors (w_n) converge vers : $\lim v_n - \lim u_n$

Apcr $w_n \geqslant 0$

Lemme précédent : $\lim w_n \geqslant 0$

Donc : $\lim u_n \leqslant \lim v_n$ $\square$

Remarque

$$(\forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant v_n) \quad \Longrightarrow \quad \lim u_n \leqslant \lim v_n$$

$$(\forall n \geqslant N \quad u_n < v_n) \quad \Longrightarrow \quad \lim u_n \leqslant \lim v_n$$

$$(\forall n \geqslant N \quad u_n < v_n) \quad \not\Longrightarrow \quad \lim u_n < \lim v_n$$

Exemple

$$u_n = 1 - \frac{1}{n} \qquad\qquad v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

III. Limites

Définition

(u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A$$

On note alors : $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

Définition

(u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A$$

On note alors : $\lim u_n = +\infty$ ou $u_n \to +\infty$

(u_n) tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant A$$

On note alors : $\lim u_n = -\infty$ ou $u_n \to -\infty$

Définition

(u_n) tend vers $+\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \geqslant A$$

(u_n) tend vers $-\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R} \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant A$$

Remarque

Si (u_n) tend vers $+\infty$ alors $(-u_n)$ tend vers $-\infty$.
Si (u_n) tend vers $-\infty$ alors $(-u_n)$ tend vers $+\infty$.

Théorème

(i) Si $(u_n) \to \pm\infty$

alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to 0$

(ii) Si $(u_n) \to 0$ et $u_n > 0$

alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$

Si $(u_n) \to 0$ et $u_n < 0$

alors $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to -\infty$

Démonstration.

(i) **Si** $(u_n) \to \pm\infty$ **alors** $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to 0$

Suite de la démonstration.

(ii) $(u_n) \to 0$ **et** $u_n > 0 \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$

Supposons $u_n \to 0$ et (u_n) strictement positive.

Suite de la démonstration.

(ii) $\quad (u_n) \to 0$ **et** $u_n > 0 \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$

Supposons $u_n \to 0$ et (u_n) strictement positive.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\varepsilon = \frac{1}{A} > 0$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |u_n| \leqslant \frac{1}{A}$$

Suite de la démonstration.

(ii) $(u_n) \to 0$ **et** $u_n > 0 \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$

Supposons $u_n \to 0$ et (u_n) strictement positive.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $\varepsilon = \frac{1}{A} > 0$ donc

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n| \leqslant \frac{1}{A}$$

$$\exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow \left|\frac{1}{u_n}\right| \geqslant A$$

Ceci est vrai pour tout $A > 0$, mais aussi $A \leqslant 0$ donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers $+\infty$.

Suite de la démonstration.

(ii) $(u_n) \to 0$ **et** $u_n < 0 \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \to -\infty$

Supposons $u_n \to 0$ et (u_n) strictement négative.

Suite de la démonstration.

(ii) $(u_n) \to 0$ **et** $u_n < 0 \implies \left(\frac{1}{u_n}\right) \to -\infty$

Supposons $u_n \to 0$ et (u_n) strictement négative.

Alors $-u_n \to 0$ et $(-u_n)$ strictement positive

D'après ce qui précède $\left(-\frac{1}{u_n}\right) \to +\infty$

Donc $\left(\frac{1}{u_n}\right) \to -\infty$ $\square$

Définitions

Une suite admet une limite si elle converge ou tend vers $\pm\infty$.

Dans ce cas sa limite est élément de :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Droite numérique achevée

Rappel - Calculs de limites

(i) Si $(u_n) \to +\infty$

et (v_n) est minorée

alors $(u_n + v_n) \to +\infty$

(ii) Si $(u_n) \to +\infty$

et (v_n) est minorée par $m > 0$ apcr

alors $(u_n v_n) \to +\infty$

Rappel - Calculs de limites

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Rappel - Calculs de limites

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Exemple 5

Dans ces cas toutes les limites sont possibles.

Rappel - Calculs de limites

Formes indéterminées :

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Remarque

Également indéterminées :

$$0^0 \qquad (+\infty)^0 \qquad 1^\infty$$

▷ Exercice 11.

Les suites suivantes convergent-elles ?

$$u_n = \sqrt{n^2 - 4n + 5} - n$$

$$v_n = (2n)^{\frac{1}{\ln n}}$$

$$w_n = \frac{3^n - 4^n}{3^n + 4^n}$$

IV. Théorèmes d'existence de limite

Théorème de divergence par comparaison

Supposons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n$$

(i) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$

(ii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$

Théorème de divergence par comparaison

Supposons que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n < v_n$$

(i) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$

(ii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$

Théorème de divergence par comparaison

Supposons que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n < v_n$$

(i) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$

(ii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$

Démonstration.

Théorème de divergence par comparaison

Supposons que :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n < v_n$$

(i) Si $u_n \to +\infty$ alors $v_n \to +\infty$

(ii) Si $v_n \to -\infty$ alors $u_n \to -\infty$

Démonstration.

$\square$

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Remarque

Ce théorème est un théorème d'existence de limite.
Il prouve que :

- (v_n) est convergente,
- sa limite est ℓ.

Exemple 6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \leqslant v_n$$

Si (v_n) converge vers 0 alors (u_n) converge vers 0.

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Démonstration.

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ, alors (v_n) converge vers ℓ.

Démonstration.

$\square$

Exemple 7

Convergence de la suite : $$(u_n) = \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$$

Exemple 7

Convergence de la suite : $(u_n) = \left(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}\right)$

▷ Exercice 12.

Convergence des suites :

$$u_n = \frac{\left\lfloor \frac{n}{4} + \frac{4}{n} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{n}{7} + \frac{7}{n} \right\rfloor} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lfloor k\pi \rfloor}{n^2}$$

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ admet un plus petit majorant.

Définition

La borne supérieure d'une partie non-vide majorée de $\mathbb{R}$ est son plus petit majorant. Elle est notée $\operatorname{Sup} A$.

Rappel

$$s = \mathrm{Sup}(A) \quad \Longleftrightarrow$$

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant s$$

et $\forall t \in \mathbb{R} \qquad \Big(t < s \;\Rightarrow\; (\exists x \in A \quad x > t)\Big)$

Rappel

$$s = \mathrm{Sup}(A) \iff$$

$$\forall x \in A \qquad x \leqslant s$$

$$\text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \Big(t < s \;\Rightarrow\; (\exists x \in A \quad x > t)\Big)$$

Corollaire

Si $s = \mathrm{Sup}\, A$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists a \in A \qquad s - \varepsilon < a \leqslant s$$

Théorème

Toute suite monotone admet une limite.

Théorème

Toute suite monotone admet une limite.

Soit (u_n) une suite croissante.

(i) Si (u_n) est majorée alors elle est convergente.

(ii) Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Théorème

Toute suite monotone admet une limite.

Soit (u_n) une suite décroissante.

(i) Si (u_n) est minorée alors elle est convergente.

(ii) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Théorème

Toute suite monotone admet une limite.

Soit (u_n) une suite croissante.

(i) Si (u_n) est majorée alors elle est convergente.

(ii) Si (u_n) n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.

Démonstration.

Supposons que la suite (u_n) est croissante.

Théorème

Toute suite monotone admet une limite.

Soit (u_n) une suite décroissante.

(i) Si (u_n) est minorée alors elle est convergente.

(ii) Si (u_n) n'est pas minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration.
On démontre le théorème dans le cas où la suite (u_n) est décroissante de la même façon, ou en appliquant le théorème pour la suite $(-u_n)$. $\square$

Théorème (complément)

Si (u_n) est croissante majorée alors elle converge vers sa borne supérieure.
Si (u_n) est décroissante minorée alors elle converge vers sa borne inférieure.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée.
Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers $\operatorname{Sup} A$.

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée.
Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers $\operatorname{Sup} A$.

Démonstration. Soit $s = \operatorname{Sup} A$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists a_n \in A \qquad s - \frac{1}{n} < a_n \leqslant s$$

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée.
Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers $\operatorname{Sup} A$.

Démonstration. Soit $s = \operatorname{Sup} A$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists a_n \in A \qquad s - \frac{1}{n} < a_n \leqslant s$$

D'après le théorème d'encadrement la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers s. $\square$

Proposition

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide majorée.
Alors il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers $\operatorname{Sup} A$.

Remarque

Si $\operatorname{Sup} A$ est le maximum de A alors il suffit de poser :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n = \operatorname{Sup} A$$

IV. Théorèmes d'existence de limite

1. Lien avec la densité

Proposition
Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

1. Lien avec la densité

Proposition
Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Rappel

A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point contient un élément de A.

1. Lien avec la densité

Proposition
Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Rappel

A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point rencontre A.

1. Lien avec la densité

Proposition
Caractérisation séquentielle de la densité

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$. Alors on a équivalence entre :

(i) A est dense dans $\mathbb{R}$.

(ii) Pour $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers x.

Rappel

A est dense dans $\mathbb{R}$ si tout intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert non-vide rencontre A.

Démonstration. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*

Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists a_n \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] \cap A$$

<u>Démonstration</u>. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*

Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists a_n \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] \cap A$$

La suite (a_n) ainsi construite vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

Démonstration. *(i)* $\implies$ *(ii)*

Supposons que A est dense dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \exists a_n \in \left[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right] \cap A$$

La suite (a_n) ainsi construite vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n - x| \leqslant \frac{1}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement elle converge vers x.

Démonstration. *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*

Soit I un intervalle, $[a, b] \subseteq I$, $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

<u>Démonstration</u>. *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*

Soit I un intervalle, $[a,b] \subseteq I$, $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

D'après le point *(ii)* il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers c.

Démonstration. *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*

Soit I un intervalle, $[a, b] \subseteq I$, $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

D'après le point *(ii)* il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers c.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - c| \leqslant \varepsilon$$

Démonstration. *(ii)* $\Longrightarrow$ *(i)*

Soit I un intervalle, $[a,b] \subseteq I$, $c = \frac{a+b}{2}$, et $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$.

D'après le point *(ii)* il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de A convergeant vers c.

Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - c| \leqslant \varepsilon$$

Ceci donne :

$$c - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant c + \varepsilon \qquad \text{puis} \qquad a_n \in [a,b]$$

I contient a_n qui est un élément de A. $\square$

▷ Exercice 13.

Démontrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

2. Suites récurrentes

Définition

Une suite récurrente est une suite définie par son premier terme et une relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction.

Cette fonction est appelée l'itératrice de la suite.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Si la fonction f n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors l'existence de la suite doit être justifiée.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

Soit $I \subseteq D$. On dit que I est stable par f si :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \in I$$

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

Soit $I \subseteq D$. On dit que I est stable par f si :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \in I$$

Proposition

Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors (u_n) est bien définie et incluse dans I :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in I$$

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

Soit $I \subseteq D$. On dit que I est stable par f si :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \in I$$

Proposition

Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors (u_n) est bien définie et incluse dans I :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in I \qquad \text{ou} \qquad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$$

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

Soit $I \subseteq D$. On dit que I est stable par f si :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \in I$$

Proposition

Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors (u_n) est bien définie et incluse dans I :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in I \qquad \text{ou} \qquad (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$$

Démonstration. Par récurrence. □

Proposition

Si I est stable par f et $u_0 \in I$ alors (u_n) est bien définie et incluse dans I :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in I \qquad \text{ou} \qquad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq I$$

Exemple 8

$$u_0 = 5 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{6}{1 + u_n}$$

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- L'étude de f permet de prévoir le comportement de (u_n).

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- L'étude de f permet de prévoir le comportement de (u_n).
- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Démonstration.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Démonstration. $\square$

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Si la fonction f est croissante alors la suite (u_n) est monotone. Son sens de variation est déterminé par ses deux premiers termes.

Remarque

Si f est décroissante alors (u_n) n'est ni croissante ni décroissante.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Les théorèmes d'existence de limite peuvent permettre de démontrer que la suite est convergente.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Les théorèmes d'existence de limite peuvent permettre de démontrer que la suite est convergente.
- Supposons que la suite (u_n) est convergente. Si f est continue alors sa limite ℓ est un point fixe de f : $\quad f(\ell) = \ell$

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Supposons que la suite (u_n) est convergente. Si f est continue alors sa limite ℓ est un point fixe de f : $\quad f(\ell) = \ell$

Démonstration.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Supposons que la suite (u_n) est convergente. Si f est continue alors sa limite ℓ est un point fixe de f : $\quad f(\ell) = \ell$

Démonstration. $\square$

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Autre fonction utile :

$$h(x) = f(x) - x$$

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Autre fonction utile :

$$h(x) = f(x) - x$$

- Si h est positive alors (u_n) est croissante.
- Si h est négative alors (u_n) est décroissante.

Méthodes

Soit f une fonction, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

- Autre fonction utile :

$$h(x) = f(x) - x$$

- Si h est positive alors (u_n) est croissante.
- Si h est négative alors (u_n) est décroissante.
- Si f est continue et (u_n) converge vers ℓ alors $h(\ell) = 0$.

▷ Exercice 14.

Soit $u_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$$

a. Démontrer que (u_n) est majorée et croissante.
b. Démontrer que (u_n) et convergente et donner sa limite.
c. On suppose maintenant que $u_0 = 3$. Démontrer que la suite (u_n) admet une limite et donner cette limite.

IV. Théorèmes d'existence de limite

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

(i) L'une est croissante et l'autre est décroissante.

(ii) La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

(i) L'une est croissante et l'autre est décroissante.

(ii) La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite.

Démonstration. Quitte à inverser les deux suites, on suppose (u_n) croissante et (v_n) décroissante.

On démontre le théorème en trois étapes.

1. $(u_n) \leqslant (v_n)$

2. (u_n) et (v_n) convergent.

3. (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Suite de la démonstration.

1. $(u_n) \leqslant (v_n)$:

(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} \geqslant u_n \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} \leqslant v_n$$

Donc $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant v_n - u_n$

La suite $(v_n - u_n)$ est décroissante et elle converge vers 0 donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad v_n - u_n \geqslant 0 \qquad \text{puis} \qquad u_n \leqslant v_n$$

Suite de la démonstration.

2. (u_n) et (v_n) convergent :

La suite (u_n) est croissante, donc minorée par u_0.

La suite (v_n) est décroissante, donc majorée par v_0.

Le point précédent donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

Suite de la démonstration.

2. (u_n) et (v_n) convergent :

La suite (u_n) est croissante, donc minorée par u_0.

La suite (v_n) est décroissante, donc majorée par v_0.

Le point précédent donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0, par théorème elle converge.

La suite (v_n) est décroissante et minorée par u_0, par théorème elle converge.

Suite de la démonstration.

3. $\lim u_n = \lim v_n$:

Comme $\lim(v_n - u_n) = 0$

alors $\lim v_n - \lim u_n = 0$

donc $\lim v_n = \lim u_n$

(u_n) est (v_n) convergent vers la même limite. $\square$

▷ Exercice 15.

Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Démontrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que (u_n) est convergente.

V. Suites extraites

Définition

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. La suite

$$(u_{\varphi(n)}) = (u_{\varphi(0)}, u_{\varphi(1)}, u_{\varphi(2)}, \ldots)$$

est dite extraite de la suite (u_n).

Exemples

$$\begin{aligned}
(u_{2n}) &= (u_0, u_2, u_4, \ldots) \\
(u_{2n+1}) &= (u_1, u_3, u_5, \ldots) \\
(u_{n^3}) &= (u_0, u_1, u_8, u_{27}, \ldots)
\end{aligned}$$

Théorème

Si (u_n) admet une limite alors toutes ses suites extraites admettent la même limite.

Lemme

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \varphi(n) \geqslant n$$

Démonstration.

Initialisation. $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geqslant 0$.

Hérédité. $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$

donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$

Conclusion. Par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geqslant n$ $\square$

Démonstration.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Si $n \geqslant N$ alors $\varphi(n) \geqslant N$ car $\varphi(n) \geqslant n$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \implies \left|u_{\varphi(n)} - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

La suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ. $\square$

▷ Exercice 16.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $u_n = \cos \frac{n\pi}{3}$

a. Décrire les suites (u_{6n}) et (u_{6n+3}).

b. Démontrer que la suite (u_n) n'est pas convergente.

c. Que dire de la suite $v_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{3}$?

Remarque : décalage

Soit (u_n) une suite admettant une limite et $p \in \mathbb{N}$. La suite

$$(u_{n+p}) = (u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \dots)$$

admet la même limite.

Remarque : décalage

Soit (u_n) une suite admettant une limite et $p \in \mathbb{N}$. La suite

$$(u_{n+p}) = (u_p, u_{p+1}, u_{p+2}, \ldots)$$

admet la même limite.

On peut aussi décaler dans l'autre sens :

$$(u_{n-p}) = (0, \ldots, 0, u_0, u_1, \ldots)$$

Dans ce cas également la suite admet la même limite.

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

On traite le cas $\ell \in \mathbb{R}$, les cas $\ell = \pm\infty$ sont similaires.

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_0 et N_1 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{array}{lcl} n \geqslant N_0 & \Longrightarrow & |u_{2n} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ n \geqslant N_1 & \Longrightarrow & |u_{2n+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{array}$$

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_0 et N_1 tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} k \geqslant N_0 &\implies |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ k \geqslant N_1 &\implies |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_0 et N_1 tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} 2k \geqslant 2N_0 \qquad &\Longrightarrow \quad |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ 2k+1 \geqslant 2N_1 + 1 &\Longrightarrow \quad |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_0 et N_1 tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} 2k \geqslant 2N_0 &\implies |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ 2k+1 \geqslant 2N_1+1 &\implies |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Soit $\quad N = \mathrm{Max}\,\{2N_0, 2N_1+1\}$

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_0 et N_1 tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} 2k \geqslant 2N_0 &\implies |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ 2k+1 \geqslant 2N_1+1 &\implies |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Soit $N = \mathrm{Max}\,\{2N_0, 2N_1+1\}$

Pour tout $n \geqslant N$: n est pair ou impair

donc $n = 2k \geqslant 2N_0$ ou $n = 2k+1 \geqslant 2N_1+1$

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe N_0 et N_1 tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \begin{aligned} 2k \geqslant 2N_0 &\implies |u_{2k} - \ell| \leqslant \varepsilon \\ 2k+1 \geqslant 2N_1+1 &\implies |u_{2k+1} - \ell| \leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Soit $N = \operatorname{Max}\{2N_0, 2N_1+1\}$

Pour tout $n \geqslant N$: n est pair ou impair

donc $n = 2k \geqslant 2N_0$ ou $n = 2k+1 \geqslant 2N_1+1$

donc $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Proposition

Si $(u_{2n}) \to \ell$ et $(u_{2n+1}) \to \ell$ alors $(u_n) \to \ell$.

Démonstration.

On a donc démontré :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \geqslant \varepsilon$$

La suite (u_n) converge vers ℓ. $\square$

V. Suites extraites

A. Généralités

B. Théorème de Bolzano-Weierstrass

C. Valeurs d'adhérence

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Bernardo Bolzano (Tchéquie) 1781 – 1848

Karl Weierstrass (Allemagne) 1815 – 1897

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, m et M un minorant et un majorant de (u_n) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad m \leqslant u_n \leqslant M$$

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

2. Construction d'une suite extraite.

3. La suite extraite est convergente.

1. Construction d’une suite de segments emboîtés.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Initialisation.

$$[a_0, b_0] = [m, M]$$

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Initialisation.

$$[a_0, b_0] = [m, M]$$

Le segment $[a_0, b_0]$ contient une infinité de u_k.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Initialisation.

$$[a_0, b_0] = [m, M]$$

Le segment $[a_0, b_0]$ contient une infinité de u_k.

De plus : $\quad b_0 - a_0 = M - m$

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Hérédité.

Le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de u_k.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Hérédité.

Le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de u_k.

Soit : $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$

Alors $\quad [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n] \quad$ ou $\quad [c_n, b_n]$

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_k.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Hérédité.

Le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de u_k.

Soit : $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$

Alors $\quad [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n] \quad$ ou $\quad [c_n, b_n]$

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_k.

De plus : $\quad a_n \leqslant a_{n+1} \qquad b_{n+1} \leqslant b_n$

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Hérédité.

Le segment $[a_n, b_n]$ contient une infinité de u_k.

Soit : $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$

Alors $\quad [a_{n+1}, b_{n+1}] = [a_n, c_n] \quad$ ou $\quad [c_n, b_n]$

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_k.

De plus : $\quad a_n \leqslant a_{n+1} \qquad b_{n+1} \leqslant b_n$

et $\quad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Conclusion. La suite de segments $[a_n, b_n]$ est construite.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Conclusion. La suite de segments $[a_n, b_n]$ est construite.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant a_{n+1} \qquad b_{n+1} \leqslant b_n$$

Donc (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Conclusion. La suite de segments $[a_n, b_n]$ est construite.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$

Donc $\quad b_n - a_n = \dfrac{M - m}{2^n} \to 0$

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Conclusion. La suite de segments $[a_n, b_n]$ est construite.

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
- $(b_n - a_n) \to 0$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

1. Construction d'une suite de segments emboîtés.

Conclusion. La suite de segments $[a_n, b_n]$ est construite.

- (a_n) est croissante et (b_n) est décroissante.
- $(b_n - a_n) \to 0$

Les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

Par théorème elles convergent vers une limite ℓ.

2. Construction d'une suite extraite.

2. Construction d'une suite extraite.

Initialisation. On pose $\varphi(0) = 0$.

$$a_0 \leqslant u_{\varphi(0)} \leqslant b_0$$

2. Construction d'une suite extraite.

Hérédité. Supposons défini $u_{\varphi(n)}$ avec :

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_k.

2. Construction d'une suite extraite.

Hérédité. Supposons défini $u_{\varphi(n)}$ avec :

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_k.

Il contient donc un u_k pour $k > \varphi(n)$

2. Construction d'une suite extraite.

Hérédité. Supposons défini $u_{\varphi(n)}$ avec :

$$a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Le segment $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ contient une infinité de u_k.

Il contient donc un u_k pour $k > \varphi(n)$

On pose $\varphi(n+1) = k$. Donc $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et :

$$a_{n+1} \leqslant u_{\varphi(n+1)} \leqslant b_{n+1}$$

2. Construction d'une suite extraite.

Conclusion. $(u_{\varphi(n)})$ est construite par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

2. Construction d'une suite extraite.

Conclusion. $(u_{\varphi(n)})$ est construite par récurrence.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

Cette suite est bien extraite de la suite (u_n) car la fonction φ est strictement croissante.

3. La suite extraite est convergente.

3. La suite extraite est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

3. La suite extraite est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

(a_n) et (b_n) convergent vers le même réel ℓ.

Théorème d'encadrement : $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

3. La suite extraite est convergente.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$$

(a_n) et (b_n) convergent vers le même réel ℓ.

Théorème d'encadrement : $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

On a démontré que la suite (u_n) admet une suite extraite convergente. $\square$

Définition

$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \qquad a \in \mathbb{R}$

a est valeur d'adhérence de (u_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \text{et} \quad |u_n - a| \leqslant \varepsilon$$

Définition

$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \qquad a \in \mathbb{R}$

a est valeur d'adhérence de (u_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \text{et} \quad |u_n - a| \leqslant \varepsilon$$

Remarque

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi :
Pour tout $\varepsilon > 0$ l'intervalle $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ contient une infinité de termes de la suite.

Définition

$(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \qquad a \in \mathbb{R}$

a est **valeur d'adhérence** de (u_n) si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$
$$\exists n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \quad \text{et} \quad |u_n - a| \leqslant \varepsilon$$

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

<u>Démonstration</u>. Soit a valeur d'adhérence de (u_n).
Initialisation. $\varphi(0) = 0$.

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. Soit a valeur d'adhérence de (u_n).
Initialisation. $\varphi(0) = 0$.
Hérédité. Supposons $\varphi(k)$ défini. Alors :

$$\exists n \geqslant N = \varphi(k) + 1 \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{1}{k+1}$$

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. Soit a valeur d'adhérence de (u_n).

Initialisation. $\varphi(0) = 0$.

Hérédité. Supposons $\varphi(k)$ défini. Alors :

$$\exists n \geqslant N = \varphi(k) + 1 \qquad |u_n - a| \leqslant \frac{1}{k+1}$$

Soit $\varphi(k+1) = n$. Alors :

$$\varphi(k+1) > \varphi(k) \qquad \text{et} \qquad \left|u_{\varphi(k+1)} - a\right| \leqslant \frac{1}{k+1}$$

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. Soit a valeur d'adhérence de (u_n).

Initialisation. $\varphi(0) = 0$.

Hérédité. Supposons $\varphi(k)$ défini. Alors :

$$\exists \varphi(k+1) \geqslant \varphi(k) + 1 \qquad \left|u_{\varphi(k+1)} - a\right| \leqslant \frac{1}{k+1}$$

Conclusion. $(u_{\varphi(k)})$ extraite, converge vers a.

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi pour $n = \mathrm{Max}\{N, M\}$ on a :

$$n \geqslant N \qquad \text{et} \qquad \left|u_n - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Proposition

a est valeur d'adhérence de (u_n) ssi il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

Démonstration. $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Alors il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant M \quad \Longrightarrow \quad \left|u_{\varphi(n)} - a\right| \leqslant \varepsilon$$

Ainsi pour $n = \mathrm{Max}\,\{N, M\}$ on a :

$$n \geqslant N \qquad \text{et} \qquad |u_n - a| \leqslant \varepsilon$$

Donc a est valeur d'adhérence de (u_n). $\square$

Remarques

(i) Théorème de Bolzano-Weierstrass :
Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Remarques

(i) Théorème de Bolzano-Weierstrass :
Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

(ii) Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (u_n).

Remarques

(i) Théorème de Bolzano-Weierstrass :
Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

(ii) Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (u_n).

Exemple

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet valeurs d'adhérences :

Remarques

(i) Théorème de Bolzano-Weierstrass :
Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

(ii) Les valeurs d'adhérence de (u_n) sont les limites des suites extraites convergentes de (u_n).

Exemple

La suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet deux valeurs d'adhérences : 1 et -1.

Notation

$\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$: ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{C}$
indexées par $\mathbb{N}$

Définitions

Une suite complexe (u_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbb{N} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant N \Longrightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Proposition (Unicité de la limite)

Si (u_n) converge vers ℓ et vers ℓ', alors $\ell = \ell'$.

Théorème

Toute suite convergente est bornée.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' alors

(i) $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$

(ii) (λu_n) converge vers $\lambda\ell$ $\quad \lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$

(iv) $|u_n|$ converge vers $|\ell|$

(v) $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{\ell}$ $\quad \ell \neq 0$

Corollaire

(vi) $(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$

(vii) $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{\ell}{\ell'}$

Remarque

Ne sont pas définis :

- majorant, minorant, minimum, maximum
- suites croissantes, etc
- suites adjacentes
- limites infinies
- théorèmes de comparaison
- théorème d'encadrement.

On se ramène souvent au cas des suites réelles en étudiant la suite des modules $(|u_n|)$.

Remarque

Ne sont pas définis :

- majorant, minorant, minimum, maximum
- suites croissantes, etc
- suites adjacentes
- limites infinies
- théorèmes de comparaison
- théorème d'encadrement.

On peut aussi étudier les suites des parties réelles et imaginaires $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$.

▷ Exercice 17.

Soit (u_n) une suite complexe telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = \frac{1+i}{2} u_n - i$$

Démontrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Proposition

Soit (u_n) une suite complexe.

Si (u_n) converge vers ℓ

alors $(\overline{u_n})$ converge vers $\overline{\ell}$.

Démonstration.

$$\left|\overline{u_n} - \overline{\ell}\right| = \left|\overline{u_n - \ell}\right| = |u_n - \ell| \qquad \square$$

Théorème

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell = a + ib$$

$$\iff \begin{cases} (\mathrm{Re}(u_n)) \text{ converge vers } a \\ (\mathrm{Im}(u_n)) \text{ converge vers } b \end{cases}$$

Théorème

(u_n) converge vers ℓ

$$\Longrightarrow \begin{cases} (\mathrm{Re}(u_n)) \text{ converge vers } \mathrm{Re}\,\ell \\ (\mathrm{Im}(u_n)) \text{ converge vers } \mathrm{Im}\,\ell \end{cases}$$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
& u_n \to \ell \\
\iff \quad & \overline{u_n} \to \bar{\ell} \\
\implies \quad & (u_n + \overline{u_n}) \to \ell + \bar{\ell} \\
\iff \quad & \tfrac{u_n + \overline{u_n}}{2} \to \tfrac{\ell + \bar{\ell}}{2} \\
\iff \quad & \mathrm{Re}(u_n) \to \mathrm{Re}(\ell) = a
\end{aligned}
$$

<u>Démonstration</u>.

$$
\begin{aligned}
& u_n \to \ell \\
\iff \quad & \overline{u_n} \to \bar{\ell} \\
\implies \quad & (u_n - \overline{u_n}) \to \ell - \bar{\ell} \\
\iff \quad & \tfrac{u_n - \overline{u_n}}{2i} \to \tfrac{\ell - \bar{\ell}}{2i} \\
\iff \quad & \mathrm{Im}(u_n) \to \mathrm{Im}(\ell) = b
\end{aligned}
$$

Suite de la démonstration.

Réciproquement :

$$\operatorname{Re}(u_n) \to a \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(u_n) \to b$$

$$\Longrightarrow \qquad \operatorname{Re}(u_n) + i\operatorname{Im}(u_n) \to a + ib$$

$$\Longrightarrow \qquad u_n \to \ell \qquad \square$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite **complexe** bornée admet une suite extraite convergente.

Démonstration.

Soit (u_n) une suite complexe bornée.

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |\mathrm{Re}\, z| \leqslant |z| \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leqslant |z|$$

Démonstration.

Soit (u_n) une suite complexe bornée.

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |\mathrm{Re}\, u_n| \leqslant |u_n| \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}\, u_n| \leqslant |u_n|$$

Donc $(\mathrm{Re}(u_n))$ et $(\mathrm{Im}(u_n))$ sont bornées.

Démonstration.

$(\mathrm{Re}(u_n))$ est bornée.

Bolzano-Weierstrass réel :

Il existe $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ convergente.

Démonstration.

$(\mathrm{Re}(u_n))$ est bornée.

Bolzano-Weierstrass réel :

Il existe $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ convergente.

$(\mathrm{Im}(u_{\varphi(n)}))$ extraite de $(\mathrm{Im}(u_n))$ donc bornée.

Bolzano-Weierstrass réel :

Il existe $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ convergente.

Démonstration.

$(\mathrm{Re}(u_n))$ est bornée.

Bolzano-Weierstrass réel :

Il existe $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ convergente.

$(\mathrm{Im}(u_{\varphi(n)}))$ extraite de $(\mathrm{Im}(u_n))$ donc bornée.

Bolzano-Weierstrass réel :

Il existe $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ convergente.

$(\mathrm{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ extraite de $(\mathrm{Re}(u_{\varphi(n)}))$ donc convergente.

Démonstration.

$(\mathrm{Re}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ et $(\mathrm{Im}(u_{\varphi\circ\psi(n)}))$ convergent donc $(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ converge. $\square$

Remarque

Dans toute cette partie on suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
En d'autre termes, (v_n) ne s'annule qu'un nombre fini de fois.

VII. Relations de comparaison

Définition

u_n est **négligeable** devant v_n si

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$$

On note alors :

$$u_n = o(v_n) \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

Définition

u_n est négligeable devant v_n si

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$$

On note alors :

$$u_n = o(v_n) \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$$

Exemple 9

Comparaison de (n) et (n^2), puis de $\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\left(\frac{1}{n}\right)$.

Propositions

(i) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = o(w_n)$

Propositions

(i) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = o(w_n)$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $u_n = o(w_n)$

Propositions

(i) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = o(w_n)$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $u_n = o(w_n)$

(iii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$

alors $u_n \to 0$

Propositions

(i) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = o(w_n)$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $u_n = o(w_n)$

(iii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$

alors $u_n \to 0$

Démonstration.

Propositions

(i) Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = o(w_n)$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$

alors $u_n = o(w_n)$

(iii) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$

alors $u_n \to 0$

Démonstration.

□

VII. Relations de comparaison

Définition

(u_n) est équivalente à (v_n) si

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$$

On note alors :

$$u_n \sim v_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Définition

(u_n) est équivalente à (v_n) si

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$$

On note alors :

$$u_n \sim v_n \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$$

Exemple 10

$$(n^2 + 3n - 1) \sim n^2$$

Remarque

$$u_n \sim v_n \quad \Longrightarrow \quad v_n \sim u_n$$

On peut donc dire que (u_n) et (v_n) sont équivalentes.
Au lieu de : (u_n) est équivalente à (v_n).

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \sim w_n \quad$ alors $\quad u_n \sim w_n$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \sim w_n \quad$ alors $\quad u_n \sim w_n$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) Deux suites équivalentes ont même limite.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \to \ell \quad$ alors $\quad u_n \to \ell$

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \sim w_n \quad$ alors $\quad u_n \sim w_n$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) Deux suites équivalentes ont même limite.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \to \ell \quad$ alors $\quad u_n \to \ell$

(iii) Deux suites équivalentes ont même signe apcr.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) Deux suites équivalentes ont même limite.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \to \ell$ alors $u_n \to \ell$

(iii) Deux suites équivalentes ont même signe apcr.

Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

(iv) Si $v_n = o(u_n)$ alors $(u_n + v_n) \sim u_n$

Proposition

(iv) Si $v_n = o(u_n)$ alors $(u_n + v_n) \sim u_n$

Exemple

$n^2 + 5n \sim n^2$ car

Proposition

(iv) Si $v_n = o(u_n)$ alors $(u_n + v_n) \sim u_n$

Exemple

$$n^2 + 5n \sim n^2 \qquad \text{car} \qquad 5n = o(n^2)$$

Proposition

(iv) Si $v_n = o(u_n)$ alors $(u_n + v_n) \sim u_n$

Exemple

$$n^2 + 5n \sim n^2 \qquad \text{car} \qquad 5n = o(n^2)$$

Remarque

De manière équivalente :

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \sim w_n \quad$ alors $\quad u_n \sim w_n$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) Deux suites équivalentes ont même limite.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ et $\quad v_n \to \ell \quad$ alors $\quad u_n \to \ell$

(iii) Deux suites équivalentes ont même signe apcr.

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

(iv) Si $\quad v_n = o(u_n) \quad$ alors $\quad (u_n + v_n) \sim u_n$

Démonstration.

Propositions

(i) La relation $\sim$ est transitive.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

(ii) Deux suites équivalentes ont même limite.

Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \to \ell$ alors $u_n \to \ell$

(iii) Deux suites équivalentes ont même signe apcr.

Si $u_n \sim v_n$ alors u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

(iv) Si $v_n = o(u_n)$ alors $(u_n + v_n) \sim u_n$

<u>Démonstration</u>. $\square$

Proposition

$$\text{Si} \quad u_n \sim u'_n \quad \text{et} \quad v_n \sim v'_n$$

$$\text{alors} \quad u_n v_n \sim u'_n v'_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$$

La relation d'équivalence est compatible avec le produit et le quotient.

Proposition

$$\text{Si} \quad u_n \sim u'_n \quad \text{et} \quad v_n \sim v'_n$$

$$\text{alors} \quad u_n v_n \sim u'_n v'_n \quad \text{et} \quad \frac{u_n}{v_n} \sim \frac{u'_n}{v'_n}$$

La relation d'équivalence est compatible avec le produit et le quotient.

Démonstration. En exercice. □

Exemple

$$\frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 + 5}$$

On ne peut pas ajouter d'équivalences

On ne peut pas ajouter d'équivalences

Exemple 11

$$n^2 + n \sim n^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad 1 - n^2 \sim -n^2$$

Proposition

$\alpha \in \mathbb{R}$

Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

Proposition

$\alpha \in \mathbb{R}$

Si $\quad u_n \sim v_n \quad$ alors $\quad u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$

<u>Démonstration</u>. En exercice. $\square$

VII. Relations de comparaison

Définition

(u_n) est dominée par (v_n) si :

$$\frac{u_n}{v_n} \text{ est bornée}$$

On note alors :

$$u_n = O(v_n) \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$$

Définition

(u_n) est dominée par (v_n) si :

$$\frac{u_n}{v_n} \text{ est bornée}$$

On note alors :

$$u_n = O(v_n) \qquad \text{ou} \qquad u_n \underset{+\infty}{=} O(v_n)$$

Exemple 12

$$((-2)^n) \text{ est dominée par } (2^n)$$

Propositions

(i) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = O(w_n)$

Propositions

(i) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = O(w_n)$

(ii) Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$

alors $u_n = O(w_n)$

Propositions

(i) Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$

alors $(u_n + v_n) = O(w_n)$

(ii) Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$

alors $u_n = O(w_n)$

Démonstration. En exercice. $\square$

Remarque

Si $\quad u_n = o(v_n) \quad$ ou $\quad u_n \sim v_n$

Alors : $\quad u_n = O(v_n)$

Résumé

$$u_n = o(v_n) \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

$$u_n = O(v_n) \iff \left(\frac{u_n}{v_n}\right) \text{ bornée}$$

VII. Relations de comparaison

Théorème - Croissances comparées

(i) $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha < \beta$

(ii) $n^\alpha = o(a^n)$ (en supposant que $a > 1$)

(iii) $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$ (en supposant que $\alpha > 0$)

(iv) $a^n = o(n!)$

Exemple

Si (u_n) est polynomiale :

$$u_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + \cdots + a_p n^p$$

Alors (u_n) est équivalente à son terme de plus haut degré.

$$u_n \sim a_p n^p$$

Démonstration.

(i) $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha < \beta$

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} \to 0$$

car $\alpha - \beta < 0$

(ii) $n^\alpha = o(a^n)$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{a^x} = 0$

(iii) $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0$

(iv) $a^n = o(n!)$

Démonstration.

(i) $n^\alpha = o(n^\beta)$ si $\alpha < \beta$

$$\frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta} \to 0$$

car $\alpha - \beta < 0$

(ii) $n^\alpha = o(a^n)$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$

(iii) $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$

car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0$

(iv) $a^n = o(n!)$

$\square$

▷ Exercice 18.

Comportement à l'infini de :

$$u_n = \frac{2n+1}{n^2-3} \qquad v_n = \frac{n}{\ln n + e^n} \qquad w_n = \frac{n}{\ln n + e^{-n}}$$

$$x_n = \frac{e^{-n}}{1+n^4} \qquad y_n = \frac{5^n - 6^n}{5^n - 4^n} \qquad z_n = 5^n - n^2 4^n$$

$$a_n = \frac{4^n}{n^3 - n!} \qquad b_n = \frac{n - 2^n}{e^n} \qquad c_n = \frac{n! \ln n}{\sqrt{n}\, e^n}$$

VII. Relations de comparaison

Proposition

Si u_n tend vers 0 alors :

$$\sin(u_n) \sim u_n$$

$$\ln(1+u_n) \sim u_n$$

$$e^{u_n} - 1 \sim u_n$$

Démonstration. Par composition de limites, en utilisant :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

□

Exemple 13

(i) Limite de : $u_n = 2^n \tan \frac{\pi}{2^n}$

(ii) Équivalent simple de : $v_n = \ln \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$

(iii) Limite de : $w_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$

Remarque

Ne pas appliquer une fonction à une équivalence :

$$u_n \sim v_n \qquad \not\Longrightarrow \qquad f(u_n) \sim f(v_n)$$

▷ Exercice 19.

Calculer les limites éventuelles des suites suivantes.

$$u_n = \left(\frac{3}{n}\right)^{\frac{2}{\ln n}} \qquad v_n = n(\ln(n+2) - \ln n)$$

$$w_n = (2n)^{\sin \frac{1}{n}} \qquad x_n = n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)$$

$$y_n = \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{n}}{\sin \frac{1}{n}} \qquad z_n = \sqrt[4]{n^4 + 6n^3 + 5n^2} - n$$

Prochain chapitre

Chapitre B6

Structures algébriques