Mathématiques

Chapitre A6
Équations différentielles

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

A. Principe de superposition

B. Résolution de l'équation homogène

C. Recherche d'une solution particulière

D. Problème de Cauchy

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

- a, $b : D \to \mathbb{R}$ fonctions continues
- Inconnue $y : D \to \mathbb{R}$ **dérivable**

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

Exemples

- $y' - ty = t^3$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

Exemples

- $y' - ty = t^3$
- $y' + \sqrt{t}\, y = t$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

Exemples

- $y' - ty = t^3$
- $y' + \sqrt{t}\, y = t$ sur $\mathbb{R}_+$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

Exemples

- $y' - ty = t^3$
- $y' + \sqrt{t}\, y = t \qquad$ sur $\mathbb{R}_+$
- $(t^2+1)y' - 3ty = t^2 + 2$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

Exemples

- $y' - ty = t^3$
- $y' + \sqrt{t}\, y = t$ sur $\mathbb{R}_+$
- $(t^2+1)y' - 3ty = t^2 + 2$

$$\iff \quad y' - \frac{3t}{t^2+1}y = \frac{t^2+2}{t^2+1}$$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

Exemples

- $y' - ty = t^3$
- $y' + \sqrt{t}\, y = t \qquad$ sur $\mathbb{R}_+$
- $(t^2+1)y' - 3ty = t^2 + 2$

$$\iff \quad y' - \frac{3t}{t^2+1}y = \frac{t^2+2}{t^2+1}$$

- $4y' - 1 = 5y + 3t$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

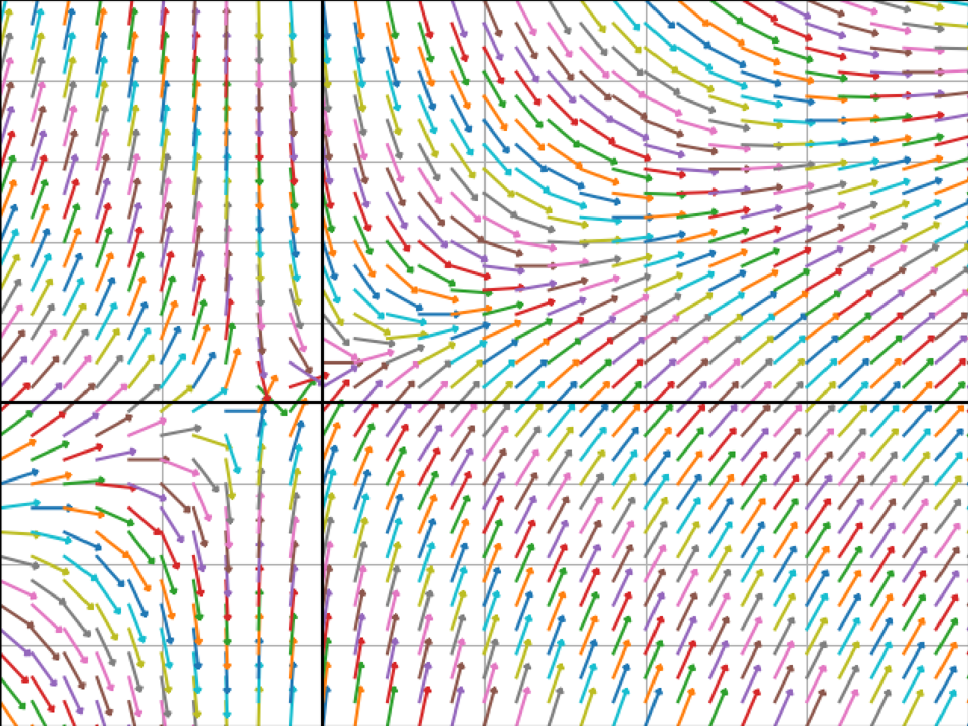
Exemples

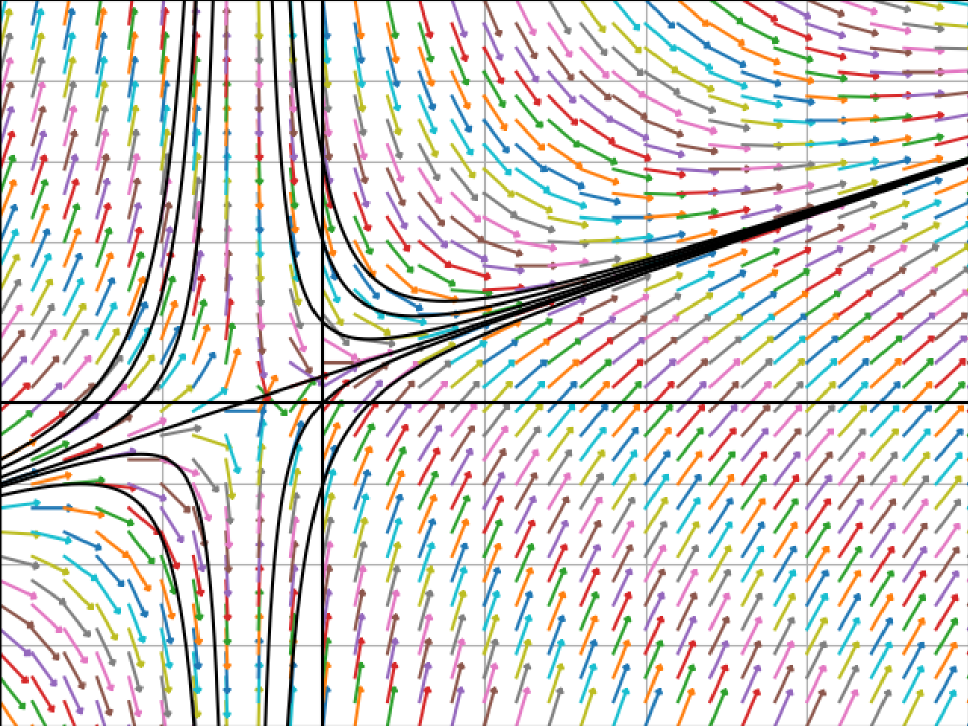
- $y' - ty = t^3$
- $y' + \sqrt{t}\, y = t \qquad$ sur $\mathbb{R}_+$
- $(t^2+1)y' - 3ty = t^2 + 2$
$$\iff \quad y' - \frac{3t}{t^2+1}y = \frac{t^2+2}{t^2+1}$$
- $4y' - 1 = 5y + 3t$
$$\iff \quad y' - \frac{5}{4}y = \frac{3t+1}{4}$$

$$(E) \qquad y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

$$y'(t) = F(t, y(t))$$

La tangente en $M(t_1, y_1)$ à la courbe solution admet $y'(t_1) = F(t_1, y_1)$ pour coefficient directeur.





I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

A. Principe de superposition

B. Résolution de l'équation homogène

C. Recherche d'une solution particulière

D. Problème de Cauchy

Proposition - Principe de superposition

$$
\begin{array}{lrcl}
(E_1) & y' - a(t)y & = & b_1(t) \\
(E_2) & y' - a(t)y & = & b_2(t) \\
(E) & y' - a(t)y & = & b_1(t) + b_2(t)
\end{array}
$$

Si	y_1	est une solution de (E_1)
et	y_2	est une solution de (E_2)
alors	$y = y_1 + y_2$	est solution de (E).

<u>Démonstration</u>. y_1 est solution de (E_1) :

$$y_1' - a(t)y_1 = b_1(t)$$

y_2 est une solution de (E_2) :

$$y_2' - a(t)y_2 = b_2(t)$$

Démonstration. y_1 est solution de (E_1) :

$$y_1' - a(t)y_1 = b_1(t)$$

y_2 est une solution de (E_2) :

$$y_2' - a(t)y_2 = b_2(t)$$

Par somme :

$$(y_1' + y_2') - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t)$$

Démonstration. y_1 est solution de (E_1) :

$$y_1' - a(t)y_1 = b_1(t)$$

y_2 est une solution de (E_2) :

$$y_2' - a(t)y_2 = b_2(t)$$

Par somme :

$$\begin{aligned} & (y_1' + y_2') - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t) \\ \iff \quad & (y_1 + y_2)' - a(t)(y_1 + y_2) = b_1(t) + b_2(t) \end{aligned}$$

Donc $y_1 + y_2$ est solution de (E). $\square$

Définition

Soit

$$(E) \qquad y' - a(t)y = b(t)$$

Alors

$$(H) \qquad y' - a(t)y = 0$$

est appelée équation homogène associée à (E).

Proposition

- $\mathcal{E}$: ensemble des solutions de (E)
- $\mathcal{H}$: ensemble des solutions de (H)
- y_1 : **une** solution de (E)

Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Remarque

On détermine toutes les solutions de (H)
et une solution de (E),
on en déduit toutes les solutions de (E).

Remarque

On détermine toutes les solutions de (H)
et une solution de (E),
on en déduit toutes les solutions de (E).

La solution y_1 est dite solution particulière de (E).

Démonstration. Principe de superposition :

y_0 solution de (H) : $\qquad y_0' - a(t)y_0 = 0$

y_1 solution de (E) : $\qquad y_1' - a(t)y_1 = b(t)$

Démonstration. Principe de superposition :

y_0 solution de (H) : $\quad y_0' - a(t)y_0 = 0$

y_1 solution de (E) : $\quad y_1' - a(t)y_1 = b(t)$

$\Longrightarrow$ $y_0 + y_1$ solution de (E) :

$$(y_0 + y_1)' - a(t)(y_0 + y_1) = b(t)$$

Démonstration. Principe de superposition :

$$y_0 \text{ solution de } (H) : \qquad y_0' - a(t)y_0 = 0$$

$$y_1 \text{ solution de } (E) : \qquad y_1' - a(t)y_1 = b(t)$$

$$\Longrightarrow \quad y_0 + y_1 \text{ solution de } (E) :$$

$$(y_0 + y_1)' - a(t)(y_0 + y_1) = b(t)$$

Ceci démontre l'inclusion :

$$\mathcal{E} \supseteq \{ y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H} \}$$

Démonstration. Principe de superposition :

$$y \text{ solution de } (E) : \qquad y' - a(t)y = b(t)$$

$$y_1 \text{ solution de } (E) : \qquad y_1' - a(t)y_1 = b(t)$$

Démonstration. Principe de superposition :

y solution de (E) : $\quad y' - a(t)y = b(t)$

y_1 solution de (E) : $\quad y_1' - a(t)y_1 = b(t)$

$\Longrightarrow$ $y - y_1$ solution de (H) :

$$(y - y_1)' - a(t)(y - y_1) = 0$$

Démonstration. Principe de superposition :

$$y \text{ solution de } (E) : \qquad y' - a(t)y = b(t)$$

$$y_1 \text{ solution de } (E) : \qquad y_1' - a(t)y_1 = b(t)$$

$$\Longrightarrow \quad y - y_1 \text{ solution de } (H) :$$

$$(y - y_1)' - a(t)(y - y_1) = 0$$

Or $y = (y - y_1) + y_1$ donc ceci démontre l'inclusion :

$$\mathcal{E} \subseteq \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Par double inclusion l'égalité est démontrée. $\square$

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Théorème

$$(H) \qquad y' - a(t)y = 0$$

- I est un intervalle
- A est une primitive de a

Alors les solutions de (H) sont

$$\begin{aligned} y_0 : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \lambda e^{A(t)} \end{aligned}$$

où λ est une constante réelle.

Remarque

En d'autres termes l'ensemble des solutions de (H) est

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Exemple 1

Si a est une constante, alors les solutions de l'équation

$$y' - ay = 0$$

sont les fonctions $y_0 : t \mapsto \lambda e^{at}$

Car $A(t) = at$ est une primitive de la constante a.

Démonstration.

$$(H) \qquad y' - a(t)y = 0$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Démonstration</u>.

$$(H) \qquad y' - a(t)y = 0$$

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda e^{A(t)} \end{array} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$\square$

▷ Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes.

$$(E_1) \qquad y' + \tan t \, y = 0 \qquad \text{sur} \quad \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$(E_2) \qquad t^2 y' - (t-1)y = 0 \qquad \text{sur} \quad \mathbb{R}_+^*$$

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_1) \quad y' + y = 3$$

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_1) \quad y' + y = 3 \qquad\qquad y(t) = 3$$

$$y' + y = t + 1$$

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_1) \quad y' + y = 3 \qquad y(t) = 3$$

$$y' + y = t + 1 \qquad y(t) = t$$

$$y' + y = e^t$$

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_1) \quad y' + y = 3 \qquad y(t) = 3$$

$$y' + y = t + 1 \qquad y(t) = t$$

$$y' + y = e^t \qquad y(t) = \frac{1}{2}e^t$$

$$y' + y = 3 + e^t$$

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

$$
\begin{array}{lll}
(E_1) & y' + y = 3 & y(t) = 3 \\
 & y' + y = t + 1 & y(t) = t \\
 & y' + y = e^t & y(t) = \frac{1}{2}e^t \\
 & y' + y = 3 + e^t & y(t) = 3 + \frac{1}{2}e^t \\
(E_2) & 2t\,y' + y = \sqrt{t} &
\end{array}
$$

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

(E_1)	$y' + y = 3$	$y(t) = 3$
	$y' + y = t + 1$	$y(t) = t$
	$y' + y = e^t$	$y(t) = \frac{1}{2}e^t$
	$y' + y = 3 + e^t$	$y(t) = 3 + \frac{1}{2}e^t$
(E_2)	$2t\,y' + y = \sqrt{t}$	$y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t}$
	$2t\,y' + y = t^2$	

Exemple 2

Donner une solution particulière des équations :

$$
\begin{array}{lll}
(E_1) & y' + y = 3 & y(t) = 3 \\
 & y' + y = t + 1 & y(t) = t \\
 & y' + y = e^t & y(t) = \frac{1}{2}e^t \\
 & y' + y = 3 + e^t & y(t) = 3 + \frac{1}{2}e^t \\
(E_2) & 2t\,y' + y = \sqrt{t} & y(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t} \\
 & 2t\,y' + y = t^2 & y(t) = \frac{1}{5}t^2
\end{array}
$$

Exemple 2 (suite)

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_3) \quad (\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 1$$

Exemple 2 (suite)

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_3) \quad (\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 1 \qquad y(t) = \sin t$$

$$(\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 0$$

Exemple 2 (suite)

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_3) \quad (\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 1 \qquad y(t) = \sin t$$

$$(\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 0 \qquad y(t) = \cos t$$

$$(E_4) \quad (2-t)y' + 3y = t^2 + 2t - 8$$

Exemple 2 (suite)

Donner une solution particulière des équations :

$$(E_3) \quad (\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 1 \qquad y(t) = \sin t$$

$$(\cos t)\, y' + (\sin t)\, y = 0 \qquad y(t) = \cos t$$

$$(E_4) \quad (2-t)y' + 3y = t^2 + 2t - 8$$

$$y(t) = t^2 - t - 2$$

▷ Exercice 2.

On considère les équations

$$(E_1) \quad (1 - 2t - t^2)y' + 3ty = t^3 + t + 2$$

$$(E_2) \quad y' + 6y = 10\cos 2t$$

Déterminer une solution polynomiale de (E_1) et une solution de (E_2) de la forme :

$$y(t) = \alpha\cos 2t + \beta\sin 2t$$

Méthode : Variation de la constante

Les solutions de l'équation homogène sont :

$$y(t) = \lambda e^{A(t)} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

On pose

$$y(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$$

où λ est une fonction dérivable.
On résout ensuite l'équation (E).

Exemple 3

Résoudre l'équation

$$y' - \frac{1}{t}y = 1$$

sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

Cette méthode n'aboutit pas toujours.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$y' - 2ty = 2t^3$$

Remarque

Cette méthode n'aboutit pas toujours.

Exemple

Résoudre l'équation :

$$y' - 2ty = 2t^3$$

Solutions : $y(t) = \lambda e^{t^2} - 1 - t^2$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

I. Équations différentielles linéaires du premier ordre

Théorème

Soit I est un intervalle, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.
Alors l'équation différentielle

$$y'(t) - a(t)y(t) = b(t)$$

munie de la condition initiale

$$y(t_0) = y_0$$

admet une et une seule solution.

Démonstration. Solutions de (H) :

$$y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

Variation de la constante :

$$y(t) = \lambda(t)e^{A(t)}$$

y est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$\lambda'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

Démonstration. Solutions de (H) :

$$y(t) = \lambda e^{A(t)}$$

Variation de la constante :

$$y(t) = \lambda(t) e^{A(t)}$$

y est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$\lambda'(t) = b(t) e^{-A(t)}$$

Soit F une primitive de : $\quad t \mapsto b(t) e^{-A(t)}$

<u>Suite de la démonstration</u>.

Soit F une primitive de : $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$

Les solutions de (E) sont les fonctions

$$y(t) = (\lambda + F(t))e^{A(t)} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

Condition initiale :

$$y(t_0) = y_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = y_0\, e^{-A(t_0)} - F(t_0)$$

Ce réel existe et il est unique, donc (E) admet une et une seule solution vérifiant $y(t_0) = y_0$. $\square$

Remarque

La solution est :

$$y(t) = y_0 e^{A(t)-A(t_0)} + (F(t) - F(t_0))e^{A(t)}$$

Les formes explicites de A et F ne sont pas forcément connues.

▷ Exercice 3.

Résoudre les équations suivantes.

a. $y' + 2y = 2e^{2t}$ avec $y(0) = 1$

b. $(1 + t^2)y' - 2ty = 1 + t^2$ avec $y(0) = 0$

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(t)$$

- a, b, c constantes
- $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonction

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = d(t)$$

- a, b, c constantes
- $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonction

Équation homogène associée à (E) :

$$(H) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

A. Principe de superposition

B. Résolution de l'équation homogène

C. Résolution avec second membre

D. Problème de Cauchy

Proposition - Principe de superposition

$$\begin{array}{lrcl} (E_1) & ay'' + by' + cy & = & d_1(t) \\ (E_2) & ay'' + by' + cy & = & d_2(t) \\ (E) & ay'' + by' + cy & = & d_1(t) + d_2(t) \end{array}$$

Si	y_1	est une solution de (E_1)
et	y_2	est une solution de (E_2)
alors	$y = y_1 + y_2$	est solution de (E).

Démonstration.

y_1 est solution de (E_1) :

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = d_1(t)$$

y_2 est solution de (E_2) :

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = d_2(t)$$

Par somme :

$$a(y_1'' + y_2'') + b(y_1' + y_2') + c(y_1 + y_2) = d_1(t) + d_2(t)$$

donc :

$$a(y_1 + y_2)'' + b(y_1 + y_2)' + c(y_1 + y_2) = d_1(t) + d_2(t)$$

Ainsi $y_1 + y_2$ est solution de (E). $\square$

Proposition

- $\mathcal{E}$: ensemble des solutions de (E)
- $\mathcal{H}$: ensemble des solutions de (H)
- y_1 : une solution de (E).

Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Proposition

- $\mathcal{E}$: ensemble des solutions de (E)
- $\mathcal{H}$: ensemble des solutions de (H)
- y_1 : une solution de (E).

Alors :

$$\mathcal{E} = \{y_0 + y_1 \mid y_0 \in \mathcal{H}\}$$

Démonstration. Identique à celle pour le premier ordre. $\square$

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

Définition

$$(H) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

Équation caractéristique de (H) :

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$.

Définition

$$(H) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

Équation caractéristique de (H) :

$$(C) \qquad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque

On suppose dans toute la suite que :

$$a \neq 0$$

Théorème

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta \neq 0$: soit λ_1 et λ_2 les solutions de (C)
  Alors les solutions de (H) sont

$$y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

Théorème

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Si $\Delta \neq 0$: soit λ_1 et λ_2 les solutions de (C)
  Alors les solutions de (H) sont

$$y(t) = \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

- Si $\Delta = 0$: soit λ_0 la solution de (C)
  Alors les solutions de (H) sont

$$y(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda_0 t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$$

Remarques

(i) Ce théorème unifie les cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

Remarques

(i) Ce théorème unifie les cas $\Delta > 0$ et $\Delta < 0$.

(ii) Si $\Delta < 0$ alors λ_1 et λ_2 sont complexes.

Démonstration. Soit

- λ_1 et λ_2 les solutions de (C) ($\lambda_1 = \lambda_2$ si $\Delta = 0$)
- y une fonction quelconque
- $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$

Démonstration. Soit

- λ_1 et λ_2 les solutions de (C) ($\lambda_1 = \lambda_2$ si $\Delta = 0$)
- y une fonction quelconque
- $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$

On calcule

$$y(t) =$$

puis $$y'(t) =$$

et $$y''(t) =$$

Démonstration. Soit

- λ_1 et λ_2 les solutions de (C) ($\lambda_1 = \lambda_2$ si $\Delta = 0$)
- y une fonction quelconque
- $z(t) = y(t)e^{-\lambda_1 t}$

On calcule

$$y(t) = z(t)e^{\lambda_1 t}$$

puis $$y'(t) = e^{\lambda_1 t}(z'(t) + \lambda_1 z(t))$$

et $$y''(t) = e^{\lambda_1 t}(z''(t) + 2\lambda_1 z'(t) + \lambda_1^2 z(t))$$

Suite de la démonstration.

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t)e^{\lambda_1 t} \\ y'(t) &= e^{\lambda_1 t}(z'(t) + \lambda_1 z(t)) \\ y''(t) &= e^{\lambda_1 t}(z''(t) + 2\lambda_1 z'(t) + \lambda_1^2 z(t)) \end{aligned}$$

y est solution de l'équation (H) ssi

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

$\Longleftrightarrow$

Suite de la démonstration.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= z(t)e^{\lambda_1 t} \\
y'(t) &= e^{\lambda_1 t}(z'(t) + \lambda_1 z(t)) \\
y''(t) &= e^{\lambda_1 t}(z''(t) + 2\lambda_1 z'(t) + \lambda_1^2 z(t))
\end{aligned}
$$

y est solution de l'équation (H) ssi

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

$$\iff \quad e^{\lambda_1 t}[az''(t) + (2a\lambda_1 + b)z'(t)$$

$$+(a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z(t)] = 0$$

Suite de la démonstration.

$$e^{\lambda_1 t}\left[az''(t) + (2a\lambda_1 + b)z'(t) \right.$$
$$\left. + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z(t)\right] = 0$$

λ_1 est solution de (C) : $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c =$

Suite de la démonstration.

$$e^{\lambda_1 t}\left[az''(t) + (2a\lambda_1 + b)z'(t) + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z(t)\right] = 0$$

λ_1 est solution de (C) : $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ donc : $\quad 2a\lambda_1 + b =$

Suite de la démonstration.

$$e^{\lambda_1 t}\left[az''(t) + (2a\lambda_1 + b)z'(t) + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)z(t)\right] = 0$$

λ_1 est solution de (C) : $a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c = 0$

$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{b}{a}$ donc : $\quad 2a\lambda_1 + b = a(\lambda_1 - \lambda_2)$

y est solution de (H) ssi z est solution de

$$(H') \qquad z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

Suite de la démonstration.

$$(H') \qquad z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

Solutions :

$$z'(t) = \mu e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{C}$$

Suite de la démonstration.

$$z'(t) = \mu e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{C}$$

Si $\Delta \neq 0$:

$$z(t) = \mu \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + \alpha \quad \text{avec} \quad (\mu, \alpha) \in \mathbb{C}^2$$

Suite de la démonstration.

$$z'(t) = \mu e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{C}$$

Si $\Delta \neq 0$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \mu \tfrac{1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \alpha && \text{avec} \quad (\mu, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \\ &= \alpha + \beta e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} && \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

$$z'(t) = \mu e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} \quad \text{avec} \quad \mu \in \mathbb{C}$$

Si $\Delta \neq 0$:

$$\begin{aligned} z(t) &= \mu \frac{1}{\lambda_2-\lambda_1} e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \alpha && \text{avec} \quad (\mu, \alpha) \in \mathbb{C}^2 \\ &= \alpha + \beta e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} && \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= z(t) e^{\lambda_1 t} \\ &= \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} && \text{avec} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\Delta = 0$:

$$(H') \qquad z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0$$

Suite de la démonstration.

Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} (H') \quad & z'' + (\lambda_1 - \lambda_2) z' = 0 \\ \iff \quad & z''(t) = 0 \end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned} (H') \quad & z'' + (\lambda_1 - \lambda_2) z' = 0 \\ \iff \quad & z''(t) = 0 \\ \iff \quad & z'(t) = \alpha \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\Delta = 0$:

$$\begin{aligned}
(H') \quad & z'' + (\lambda_1 - \lambda_2)z' = 0 \\
\iff \quad & z''(t) = 0 \\
\iff \quad & z'(t) = \alpha && \text{avec } \alpha \in \mathbb{C} \\
\iff \quad & z(t) = \alpha t + \beta && \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

Si $\Delta = 0$:

$$\begin{array}{lll} (H') & z'' + (\lambda_1 - \lambda_2) z' = 0 & \\ \iff & z''(t) = 0 & \\ \iff & z'(t) = \alpha & \text{avec } \alpha \in \mathbb{C} \\ \iff & z(t) = \alpha t + \beta & \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{Or} & y(t) = z(t) e^{\lambda_0 t} & \\ \text{donc} & y(t) = (\alpha t + \beta) e^{\lambda_0 t} & \text{avec } (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \square \end{array}$$

Théorème

Si $\Delta \in \mathbb{R}^*_-$:

$$\lambda_1 = u + iv \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 = u - iv$$

Les solutions de (H) sont alors :

$$y(t) = e^{ut}(A\cos(vt) + B\sin(vt))$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \\
&= \alpha e^{ut+ivt} + \beta e^{ut-ivt} \\
&= e^{ut}\left(\alpha e^{ivt} + \beta e^{-ivt}\right) \\
&= e^{ut}[\alpha(\cos vt + i\sin vt) + \beta(\cos vt - i\sin vt)] \\
&= e^{ut}[(\alpha+\beta)\cos vt + i(\alpha-\beta)\sin vt] \\
&= e^{ut}(A\cos vt + B\sin vt)
\end{aligned}
$$

Suite de la démonstration.

$$y(t) = e^{ut}(A\cos vt + B\sin vt) \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2$$

Or la fonction y est réelle : $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathbb{R}$

Suite de la démonstration.

$$y(t) = e^{ut}(A\cos vt + B\sin vt) \quad \text{avec} \quad (A,B) \in \mathbb{C}^2$$

Or la fonction y est réelle : $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) \in \mathbb{R}$

$$t = 0 : \quad y(0) = A \in \mathbb{R}$$

$$t = \tfrac{\pi}{2v} : \quad y\left(\tfrac{\pi}{2v}\right) = e^{\frac{u\pi}{2v}} B \in \mathbb{R}$$

Donc A et B sont réels. $\square$

▷ Exercice 4.

Résoudre l'équation différentielle

$$(H) \qquad y'' - 4y' + 5y = 0$$

sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

A. Principe de superposition

B. Résolution de l'équation homogène

C. Résolution avec second membre

D. Problème de Cauchy

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

- $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$
- $(K, \mu) \in \mathbb{C}^2$

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

Méthode

On cherche une solution de la forme :

- $y(t) = Le^{\mu t}$
- $y(t) = Lte^{\mu t}$
- $y(t) = Lt^2e^{\mu t}$

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

Méthode

On cherche une solution de la forme :

- $y(t) = Le^{\mu t}$ si μ n'est pas solution de (C)
- $y(t) = Lte^{\mu t}$ si $\mu = \lambda_1$ ou $\mu = \lambda_2$
- $y(t) = Lt^2 e^{\mu t}$ si $\mu = \lambda_0$

$$(E): \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

En effet

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad y(t) &= z(t)e^{\mu t} \\ \text{alors} \quad y'(t) &= e^{\mu t}(z'(t) + \mu z(t)) \\ y''(t) &= e^{\mu t}(z''(t) + 2\mu z(t) + \mu^2 z(t)) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff ay''(t) + by'(t) + cy(t) = Ke^{\mu t} \\ &\iff e^{\mu t}[az''(t) + (2a\mu + b)z'(t) \\ &\qquad\qquad + (a\mu^2 + b\mu + c)z(t)] = Ke^{\mu t} \end{aligned}$$

$$(E) : \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

En effet

$$\begin{aligned} \text{Si} \quad y(t) &= z(t)e^{\mu t} \\ \text{alors} \quad y'(t) &= e^{\mu t}(z'(t) + \mu z(t)) \\ y''(t) &= e^{\mu t}(z''(t) + 2\mu z(t) + \mu^2 z(t)) \end{aligned}$$

donc

$$(E) \iff \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = Ke^{\mu t}$$

$$\iff$$

$$az''(t) + (2a\mu + b)z'(t) + (a\mu^2 + b\mu + c)z(t) = K$$

$$az''(t) + (2a\mu + b)z'(t) + (a\mu^2 + b\mu + c)z(t) = K$$

Si μ n'est pas solution de (C) :

$$az''(t) + (2a\mu + b)z'(t) + (a\mu^2 + b\mu + c)z(t) = K$$

Si μ est solution simple de (C) :

$$az''(t) + (2a\mu + b)z'(t) = K$$

Si μ est solution double de (C) :

$$az''(t) = K$$

Exemple 4

Résoudre les équations :

$$\begin{array}{lrcl}
(E_1) & y'' - y' - 2y & = & e^t \\
(E_2) & y'' - y' - 2y & = & 2\operatorname{ch} t \\
(E_3) & y'' - y' - 2y & = & 5 - 4t^3
\end{array}$$

Exemple 4

Résoudre les équations :

$$
\begin{array}{llcl}
(E_1) & y'' - y' - 2y & = & e^t \\
(E_2) & y'' - y' - 2y & = & 2\,\mathrm{ch}\,t \\
(E_3) & y'' - y' - 2y & = & 5 - 4t^3
\end{array}
$$

Remarque

Lorsque le second membre est polynomial, on cherche une solution polynomiale.

Méthode : second membre trigonométrique

$$(E_1) \quad ay'' + by' + cy = K\cos\omega t$$

$$(E_2) \quad ay'' + by' + cy = K\sin\omega t$$

On résout l'équation

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = Ke^{i\omega t}$$

Si	y	est solution de (E)
alors	$\mathrm{Re}(y)$	est solution de (E_1)
et	$\mathrm{Im}(y)$	est solution de (E_2).

Exemple 5

Résolution de l'équation :

$$y'' - y' - 2y = 10\cos t$$

Exemple 5

Résolution de l'équation :

$$y'' - y' - 2y = 10\cos t$$

▷ Exercice 5.

Résoudre les équations :

$$\begin{array}{ll} (E_1) & y'' - 5y' + 6y = 4e^{4t} \\ (E_2) & y'' - 5y' + 6y = 4e^{3t} \\ (E_3) & y'' + 2y' + 5y = 10 + \sin(2t) \end{array}$$

II. Équations différentielles linéaires du second ordre

A. Principe de superposition

B. Résolution de l'équation homogène

C. Résolution avec second membre

D. Problème de Cauchy

Théorème

Soit t_0 un réel, y_0 et z_0 deux éléments de $\mathbb{C}$.
Alors l'équation

$$ay'' + by' + cy = Ke^{\mu t}$$

munie des conditions initiales

$$y(t_0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad y'(t_0) = z_0$$

admet une et une seule solution.

Démonstration. Cas où $\Delta \neq 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} + y_1(t) \\ y'(t) &= \alpha\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \beta\lambda_2 e^{\lambda_2 t} + y_1'(t) \end{aligned}$$

Conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t_0}\alpha + e^{\lambda_2 t_0}\beta = y_0 - y_1(t_0) \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0}\alpha + \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0}\beta = z_0 - y_1'(t_0) \end{cases}$$

Déterminant :

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t_0} & e^{\lambda_2 t_0} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t_0} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t_0} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t_0}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

Démonstration. Cas où $\Delta = 0$

$$\begin{aligned} y(t) &= (\alpha t + \beta)e^{\lambda_0 t} + y_1(t) \\ y'(t) &= (\lambda_0 \alpha t + \lambda_0 \beta + \alpha)e^{\lambda_0 t} + y_1'(t) \end{aligned}$$

Conditions initiales $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = z_0$:

$$\begin{cases} t_0 e^{\lambda_0 t_0} \alpha + e^{\lambda_0 t_0} \beta = y_0 - y_1(t_0) \\ (\lambda_0 t_0 + 1) e^{\lambda_0 t_0} \alpha + \lambda_0 e^{\lambda_0 t_0} \beta = z_0 - y_1'(t_0) \end{cases}$$

Déterminant :

$$\begin{vmatrix} t_0 e^{\lambda_0 t_0} & e^{\lambda_0 t_0} \\ (\lambda_0 t_0 + 1) e^{\lambda_0 t_0} & \lambda_0 e^{\lambda_0 t_0} \end{vmatrix} = -e^{2\lambda_0 t_0} \neq 0 \qquad \square$$

▷ Exercice 6.

Résoudre l'équation

$$y'' - 5y' + 6y = 4e^{4t}$$

avec $y(0) = 3$ et $y'(0) = 7$.

Prochain chapitre

Chapitre B5

Matrices