

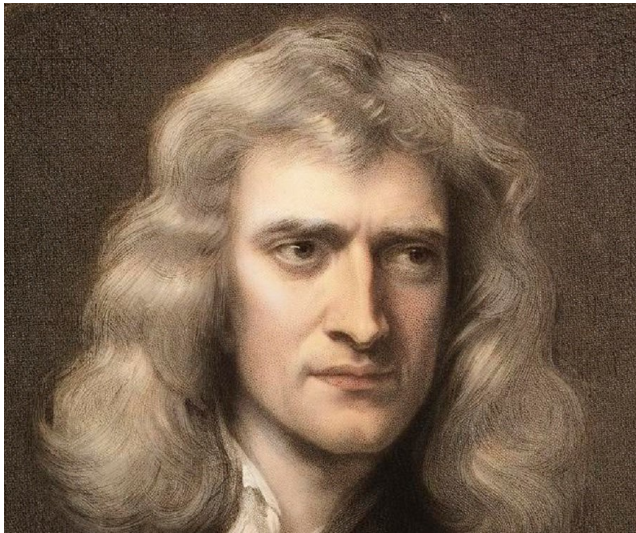
Mathématiques

Chapitre A5
Primitives

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Isaac Newton (GB) 1642 – 1727



Gottfried Leibniz (Allemagne) 1646 – 1716



Chapitre A5. Primitives

I. Intégrales et primitives

Chapitre A5. Primitives

I. Intégrales et primitives

II. Calculs de primitives

Chapitre A5. Primitives

I. Intégrales et primitives

- A. Intégrales
- B. Primitives
- C. Théorème fondamental

II. Calculs de primitives

I. Intégrales et primitives

A. Intégrales

B. Primitives

C. Théorème fondamental

Définition

I intervalle $[a, b] \subseteq I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

L'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ ou $\int_a^b f$

est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, et la courbe de f .

Définition

I intervalle $[a, b] \subseteq I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

L'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ ou $\int_a^b f$

est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, et la courbe de f .

Les parties situées en-dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

Définition

I intervalle $[a, b] \subseteq I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

L'intégrale $\int_a^b f(t) \, dt$ ou $\int_a^b f$

est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, et la courbe de f .

Les parties situées en-dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

Si $a > b$ alors on note $\int_a^b f(t) \, dt = -\int_b^a f(t) \, dt$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t) \, dt$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x) \, dx$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(u) \, du$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\xi) \, d\xi$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\omega) \, d\omega$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(T) \, dT$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\Lambda) \, d\Lambda$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\mathcal{A}) \, d\mathcal{A}$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\mathfrak{G}) \, \mathrm{d}\mathfrak{G}$$

Remarque

La variable t est muette.

$$\int_a^b f = \int_a^b f(\mathfrak{N}) \, d\mathfrak{N}$$

Proposition - Relation de Chasles

Pour tous réels a, b, c dans I :

$$\int_a^c f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_b^c f(t) \, dt$$

Proposition - Linéarité de l'intégrale

f, g continues sur $I = [a, b]$ λ réel

$$\int_a^b (f(t) + g(t)) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt + \int_a^b g(t) \, dt$$

et
$$\int_a^b \lambda f(t) \, dt = \lambda \int_a^b f(t) \, dt$$

Proposition - Croissance de l'intégrale

f, g continues sur I $[a, b] \subseteq I$

Si $\forall t \in [a, b] \quad f(t) \leq g(t)$

alors $\int_a^b f(t) \, dt \leq \int_a^b g(t) \, dt$

Proposition - Croissance de l'intégrale

f, g continues sur I $[a, b] \subseteq I$

$$f \leq g \quad \implies \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Proposition - Inégalité triangulaire

f continue sur $[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Proposition - Inégalité triangulaire

f continue sur $[a, b]$

$$\left| \int_a^b f(t) \, dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \, dt$$

Exemple 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^\pi \frac{t^n}{n!} \cos t \, dt$

Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq |I_n| \leq \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)!}$$

I. Intégrales et primitives

A. Intégrales

B. Primitives

C. Théorème fondamental

Définition

$$D \subseteq \mathbb{R} \quad f : D \rightarrow \mathbb{R}$$

Une **primitive** de f est une fonction $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- ▶ F est dérivable.
- ▶ $F' = f$

Exemple 2

$$f_1(x) = 4$$

$$F_1(x) =$$

$$f_2(x) = x$$

$$F_2(x) =$$

$$f_3(x) = \sin x$$

$$F_3(x) =$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$F_4(x) =$$

$$f_5(x) = \tan x$$

$$F_5(x) =$$

Exemple 2

$$f_1(x) = 4$$

$$F_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = x$$

$$F_2(x) =$$

$$f_3(x) = \sin x$$

$$F_3(x) =$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$F_4(x) =$$

$$f_5(x) = \tan x$$

$$F_5(x) =$$

Exemple 2

$$f_1(x) = 4$$

$$F_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = x$$

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f_3(x) = \sin x$$

$$F_3(x) =$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$F_4(x) =$$

$$f_5(x) = \tan x$$

$$F_5(x) =$$

Exemple 2

$$f_1(x) = 4$$

$$F_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = x$$

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f_3(x) = \sin x$$

$$F_3(x) = -\cos x$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$F_4(x) =$$

$$f_5(x) = \tan x$$

$$F_5(x) =$$

Exemple 2

$$f_1(x) = 4$$

$$F_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = x$$

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f_3(x) = \sin x$$

$$F_3(x) = -\cos x$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$F_4(x) = e^x$$

$$f_5(x) = \tan x$$

$$F_5(x) =$$

Exemple 2

$$f_1(x) = 4$$

$$F_1(x) = 4x$$

$$f_2(x) = x$$

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$f_3(x) = \sin x$$

$$F_3(x) = -\cos x$$

$$f_4(x) = e^x$$

$$F_4(x) = e^x$$

$$f_5(x) = \tan x$$

$$F_5(x) = -\ln |\cos x|$$

Proposition

I **intervalle** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f .

Proposition

I **intervalle** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f .

Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$F_2 = F_1 + C$$

Proposition

I **intervalle** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f .

Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I \quad F_2(x) = F_1(x) + C$$

Proposition

I **intervalle** $f : I \rightarrow \mathbb{R}$

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f .

Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in I \quad F_2(x) = F_1(x) + C$$

Corollaire

Soit F_0 **une** primitive de f sur l'intervalle I .

Alors **les** primitives de f sont les fonctions

$$F = F_0 + C$$

où C est une constante.

I. Intégrales et primitives

A. Intégrales

B. Primitives

C. Théorème fondamental

Théorème Fondamental (Newton - Leibniz)

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Théorème Fondamental (Newton - Leibniz)

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors la fonction

$$\begin{aligned}\Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt\end{aligned}$$

est une primitive de f .

Théorème Fondamental (Newton - Leibniz)

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors la fonction

$$\begin{aligned}\Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt\end{aligned}$$

est une primitive de f .

Remarque

Plus précisément :

Φ est l'unique primitive de f s'annulant en a .

Théorème Fondamental (Newton - Leibniz)

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors la fonction

$$\begin{aligned}\Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt\end{aligned}$$

est une primitive de f .

Démonstration. (Idée)

Théorème Fondamental (Newton - Leibniz)

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors la fonction

$$\begin{aligned}\Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt\end{aligned}$$

est une primitive de f .

Corollaire

Toute fonction continue admet une primitive.

Théorème Fondamental (Newton - Leibniz)

I intervalle $a \in I$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Alors la fonction

$$\begin{aligned}\Phi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t) \, dt\end{aligned}$$

est une primitive de f .

Exemple 3

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$$

Corollaire

I intervalle $(a, b) \in I^2$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = F(b) - F(a)$$

Corollaire

I intervalle $(a, b) \in I^2$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Corollaire

I intervalle $(a, b) \in I^2$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration.

Corollaire

I intervalle $(a, b) \in I^2$ $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Soit F une primitive de f . Alors :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \left[F(t) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration.



Exemple 2 (suite)

$$(i) \quad \int_6^9 4 \, dt$$

$$(ii) \quad \int_0^2 t \, dt$$

$$(iii) \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt$$

$$(iv) \quad \int_0^1 e^t \, dt$$

$$(v) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \, dt$$

Chapitre A5. Primitives

I. Intégrales et primitives

II. Calculs de primitives

- A. Primitives usuelles
- B. Linéarisation d'expressions trigonométriques
- C. Utilisation des complexes
- D. Fonctions rationnelles
- E. Intégration par parties
- F. Changement de variable

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

C. Utilisation des complexes

D. Fonctions rationnelles

E. Intégration par parties

F. Changement de variable

A. Primitives usuelles

La tableau suivant donne les primitives à connaître.

A. Primitives usuelles

La tableau suivant donne les primitives à connaître.

Aucune d'entre elles n'est unique : il est toujours possible de leur ajouter une constante C .

Fonction	Primitive	Ensemble
x^α $(\alpha \neq -1)$		$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$

Fonction	Primitive	Ensemble
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$		$\mathbb{R}^*$

Fonction	Primitive	Ensemble
x^α $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}$ si $\alpha \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}^*$ si $\alpha \in \mathbb{Z}_-$ $\mathbb{R}_+^*$ sinon
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
e^x		$\mathbb{R}$
$\cos x$		$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\mathcal{D}_{\tan}$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$		$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\mathcal{D}_{\tan}$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$		$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\mathcal{D}_{\tan}$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$		$\mathcal{D}_{\tan}$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \cos x $	$\mathcal{D}_{\tan}$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\operatorname{ch} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$] -1, 1[$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$		$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$] -1, 1[$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$] -1, 1[$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$		$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$] -1, 1[$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$] -1, 1[$

Fonction	Primitive	Ensemble
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{th} x$	$\ln \operatorname{ch} x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$ ou $-\arccos x$	$] -1, 1[$

Fonction	Primitive	Validité
$u'(ax + b)$		u dérivable $a \neq 0$
$u'u^\alpha$		u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$		u dérivable
$u'e^u$		u dérivable
$u' \cdot f \circ u$		u dérivable F primitive de f

Fonction	Primitive	Validité
$u'(ax + b)$	$\frac{1}{a}u(ax + b)$	u dérivable $a \neq 0$
$u'u^\alpha$		u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$		u dérivable
$u'e^u$		u dérivable
$u' \cdot f \circ u$		u dérivable F primitive de f

Fonction	Primitive	Validité
$u'(ax + b)$	$\frac{1}{a}u(ax + b)$	u dérivable $a \neq 0$
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$		u dérivable
$u'e^u$		u dérivable
$u' \cdot f \circ u$		u dérivable F primitive de f

Fonction	Primitive	Validité
$u'(ax + b)$	$\frac{1}{a}u(ax + b)$	u dérivable $a \neq 0$
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u dérivable
$u'e^u$		u dérivable
$u'.f \circ u$		u dérivable F primitive de f

Fonction	Primitive	Validité
$u'(ax + b)$	$\frac{1}{a}u(ax + b)$	u dérivable $a \neq 0$
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u dérivable
$u'e^u$	e^u	u dérivable
$u' \cdot f \circ u$		u dérivable F primitive de f

Fonction	Primitive	Validité
$u'(ax + b)$	$\frac{1}{a}u(ax + b)$	u dérivable $a \neq 0$
$u'u^\alpha$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$	u dérivable $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u $	u dérivable
$u'e^u$	e^u	u dérivable
$u'.f \circ u$	$F \circ u$	u dérivable F primitive de f

Exemple 4 : Primitive de x^α

► Une primitive de x^4 sur $\mathbb{R}$ est

► Une primitive de $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ est

► Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est

Exemple 4 : Primitive de x^α

► Une primitive de x^4 sur $\mathbb{R}$ est $\frac{x^5}{5}$

► Une primitive de $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ est

► Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est

Exemple 4 : Primitive de x^α

► Une primitive de x^4 sur $\mathbb{R}$ est $\frac{x^5}{5}$

► Une primitive de $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ est $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$

► Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est

Exemple 4 : Primitive de x^α

- ▶ Une primitive de x^4 sur $\mathbb{R}$ est $\frac{x^5}{5}$
- ▶ Une primitive de $\sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$ est $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
- ▶ Une primitive de $\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$ est $-\frac{1}{x}$

Remarque

Toutes les formules avec u sont des cas particuliers de la dernière formule.

Exemple 5

Donner une primitive des fonctions :

$$f_1(x) = 6x^2 - 5x\sqrt{x} + 4x$$

$$f_2(x) = e^{2x-1}$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(1-x)^5}$$

$$f_4(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$$

$$f_5(x) = x(3x^2 + 1)^2$$

$$f_6(x) = \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$$

$$f_7(x) = \frac{\sin 2x}{\cos 2x + 1}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}$$

$$f_9(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$$

▷ Exercice 1.

Donner une primitive des fonctions :

$$f_1(x) = 6x^4 - 4x^3 - 3x + 5$$

$$f_2(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

$$f_3(x) = e^{1-x}$$

$$f_4(x) = \frac{4x^3 - x^2 - 3x}{x^2}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$f_6(x) = \frac{1}{(2x - 3)^5}$$

$$f_7(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 1}$$

$$f_8(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x + 1}$$

$$f_9(x) = \frac{3x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$$

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

C. Utilisation des complexes

D. Fonctions rationnelles

E. Intégration par parties

F. Changement de variable

Exemple 6

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin 3x \, dx$$

Exemple 6

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \sin 3x \, dx$$

▷ Exercice 2.

Calculer de deux façons différentes :

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x \, dx$$

▷ Exercice 3.

Calculer une primitive de $f : x \mapsto \operatorname{sh}^4 x$

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

C. Utilisation des complexes

D. Fonctions rationnelles

E. Intégration par parties

F. Changement de variable

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

On définit :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

On définit :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Exemple 7

$$\int_0^x e^{it} \, dt =$$

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

On définit :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Exemple 7

$$\int_0^x e^{it} \, dt = \left[\frac{1}{i} e^{it} \right]_0^x$$

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

On définit :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Exemple 7

$$\int_0^x e^{it} \, dt = \left[\frac{1}{i} e^{it} \right]_0^x = i - ie^{ix}$$

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

On définit :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Une primitive de $f : t \mapsto e^{\lambda t}$
est $F : t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$.

Définition

Fonction complexe $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ où $D \subseteq \mathbb{R}$.

On définit :

$$\int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt$$

Remarque

$$\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right)$$

$$\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt = \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right)$$

Proposition

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}^*.$$

Une primitive de $f : t \mapsto e^{\lambda t}$ est $F : t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$.

Démonstration.
$$f(t) = \underbrace{e^{at} \cos(bt)}_{f_1(t)} + i \underbrace{e^{at} \sin(bt)}_{f_2(t)}$$

Proposition

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}^*.$$

Une primitive de $f : t \mapsto e^{\lambda t}$ est $F : t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$.

Démonstration. $f(t) = \underbrace{e^{at} \cos(bt)}_{f_1(t)} + i \underbrace{e^{at} \sin(bt)}_{f_2(t)}$

$$\begin{array}{ll} f'_1 = af_1 - bf_2 & \text{donc} \quad (af_1 + bf_2)' = (a^2 + b^2)f_1 \\ f'_2 = bf_1 + af_2 & (af_2 - bf_1)' = (a^2 + b^2)f_2 \end{array}$$

Proposition

$$\lambda = a + ib \in \mathbb{C}^*.$$

Une primitive de $f : t \mapsto e^{\lambda t}$ est $F : t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$.

Démonstration. $f(t) = \underbrace{e^{at} \cos(bt)}_{f_1(t)} + i \underbrace{e^{at} \sin(bt)}_{f_2(t)}$

$$\begin{aligned} f_1' &= af_1 - bf_2 & \text{donc} & & (af_1 + bf_2)' &= (a^2 + b^2)f_1 \\ f_2' &= bf_1 + af_2 & & & (af_2 - bf_1)' &= (a^2 + b^2)f_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} f &= \frac{a-ib}{a^2+b^2} (f_1 + if_2) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2} ((af_1 + bf_2) + i(af_2 - bf_1)) \end{aligned}$$

Donc $\left(\frac{1}{\lambda} f\right)' = f_1 + if_2 = f$



Remarque

$$\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right)$$

$$\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt = \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right)$$

Exemple 8

Primitive de $x \mapsto e^x \cos 2x$

Remarque

$$\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) \, dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right)$$

$$\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) \, dt = \operatorname{Im} \left(\int_a^b f(t) \, dt \right)$$

Exemple 8

Primitive de $x \mapsto e^x \cos 2x$

▷ Exercice 4.

Calculer : $I_2 = \int_0^{2\pi} e^{3t} \sin t \, dt$

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

C. Utilisation des complexes

D. Fonctions rationnelles

E. Intégration par parties

F. Changement de variable

Définitions

Une fraction rationnelle

est un quotient de deux polynômes.

Exemples

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X + 1}{X^2 - 3X + 6}$$

Définitions

Une **fraction rationnelle**

est un quotient de deux polynômes.

Une **fonction rationnelle**

est un quotient de deux fonctions polynomiales.

Exemples

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{X + 1}{X^2 - 3X + 6}$$

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 6}$$

Exemple 9

$$I = \int_0^3 \frac{x+2}{x+1} dx$$

$$J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+3}{x^2+1} dx$$

Exemple 9

$$I = \int_0^3 \frac{x+2}{x+1} dx \qquad J = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x+3}{x^2+1} dx$$

▷ Exercice 5.

Calculer : $I_3 = \int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2} dx$

▷ Exercice 6.

Calculer la primitive qui s'annule en 0 de :

$$\begin{aligned} f :]-1, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 1} \end{aligned}$$

Méthode

Intégrales de la forme : $\int \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} dx$

Méthode

Intégrales de la forme : $\int \frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} dx$

- ▶ Calculer le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$
- ▶ Selon qu'il soit strictement positif, nul ou strictement négatif, appliquer une des trois méthodes de l'exemple ci-dessous.

Exemple 10

$$(i) \quad (\Delta > 0) \quad I = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x - 3}$$

$$(ii) \quad (\Delta = 0) \quad J_1 = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}$$

$$\text{Puis} \quad J_2 = \int_0^3 \frac{4x + 1}{x^2 + 4x + 4} dx$$

$$(iii) \quad (\Delta < 0) \quad K_1 = \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 12}$$

$$\text{Puis} \quad K_2 = \int_0^3 \frac{x + 6}{x^2 - 6x + 12} dx$$

▷ Exercice 7.

Donner une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x^2}$

▷ Exercice 8.

Calculer

$$I_4 = \int_1^{\frac{5}{2}} \frac{3x-4}{2x^2+3x-2} dx$$

$$I_6 = \int_1^2 \frac{x dx}{x^2-4x+7}$$

$$I_5 = \int_1^2 \frac{dx}{x^2-4x+7}$$

$$I_7 = \int_0^3 \frac{4-5x}{x^2-8x+16} dx$$

Remarque

$a_1, \dots, a_n$ réels distincts

P fonction polynomiale avec $\deg P < n$

Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\frac{P(x)}{(x - a_1) \cdots (x - a_n)} = \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x - a_n}$$

Remarque

$a_1, \dots, a_n$ réels distincts

P fonction polynomiale avec $\deg P < n$

Alors il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\frac{P(x)}{(x - a_1) \cdots (x - a_n)} = \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{x - a_n}$$

Exemple 11

$$I = \int_3^7 \frac{x + 2}{(x^2 - 1)(x + 5)} dx$$

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

C. Utilisation des complexes

D. Fonctions rationnelles

E. Intégration par parties

F. Changement de variable

Définition

Une fonction est **de classe $\mathcal{C}^1$** si elle est dérivable de dérivée continue.

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'(t)v(t) \, dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt$$

ce qui se résume en :

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'(t)v(t) \, dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt$$

ce qui se résume en :

$$\int_a^b u'v = \left[uv \right]_a^b - \int_a^b uv'$$

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Démonstration.

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'(t)v(t) \, dt = \left[u(t)v(t) \right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \, dt$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t)v(t) \, dt + \int_a^b u(t)v'(t) \, dt \\ &= \int_a^b (u'(t)v(t) + u(t)v'(t)) \, dt \\ &= \int_a^b (uv)'(t) \, dt = [u(t)v(t)]_a^b \quad \square \end{aligned}$$

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Remarque

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$

$\implies u'$ et v' sont continues

$\implies u'v$ et uv' sont continues

$\implies \int u'v$ et $\int uv'$ sont définies.

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Exemple 12

$$I = \int_0^2 3te^{2t} dt$$

$$J = \int_1^4 \ln t dt$$

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Exemple 12

$$I = \int_0^2 3te^{2t} dt$$

$$J = \int_1^4 \ln t dt$$

Remarque

$$\int \ln x = x \ln x - x$$

Théorème

u, v fonctions **de classe $\mathcal{C}^1$** sur $[a, b]$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

▷ Exercice 9.

Calculer :

$$I_8 = \int_0^\pi x \cos x \, dx \qquad F(x) = \int_0^x \arctan t \, dt$$

II. Calculs de primitives

A. Primitives usuelles

B. Linéarisation d'expressions trigonométriques

C. Utilisation des complexes

D. Fonctions rationnelles

E. Intégration par parties

F. Changement de variable

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Démonstration. Comme f est continue alors elle admet une primitive.

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Démonstration. Comme f est continue alors elle admet une primitive. Soit F une primitive de f .

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Démonstration. Comme f est continue alors elle admet une primitive. Soit F une primitive de f . Alors $F \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $\varphi' \cdot f \circ \varphi$ et :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt =$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Démonstration. Comme f est continue alors elle admet une primitive. Soit F une primitive de f . Alors $F \circ \varphi$ est dérivable de dérivée $\varphi' \cdot f \circ \varphi$ et :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx \quad \square$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Exemple 13

$$I = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{t^3}{2t+1} dt \quad \text{en posant} \quad x = 2t + 1$$

$$J = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} \, dx \quad \text{en posant} \quad x = \cos t$$

Théorème

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$

Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx$$

Remarques

(i) Le changement de variable consiste à poser
 $x = \varphi(t)$. Alors :

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) \quad \text{puis} \quad dx = \varphi'(t)dt$$

▷ Exercice 10.

Calculer les intégrales :

$$I_9 = \int_0^{\frac{\ln 3}{2}} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$$

$$I_{10} = \int_1^2 \frac{3t^2 - 2}{3t - 2} dt$$

$$I_{11} = \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{t\sqrt{t^2 - 1}} dt$$

$$I_{12} = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin 2t}{1 + \cos t} dt$$

$$I_{13} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

grâce aux changements de variable $x = e^t$, $x = 3t - 2$,
 $x = \frac{1}{t}$, $x = \cos t$, $t = \tan \frac{x}{2}$ ou $x = \frac{\pi}{2} - 2t$

Prochain chapitre

Chapitre A6
Équations différentielles