

Mathématiques

Chapitre A4
Fonctions usuelles

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

Chapitre A4. Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

Chapitre A4. Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

II. Fonctions trigonométriques réciproques

Chapitre A4. Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

II. Fonctions trigonométriques réciproques

III. Autres fonctions classiques

Chapitre A4. Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

A. Cosinus et sinus hyperboliques

B. Tangente hyperbolique

II. Fonctions trigonométriques réciproques

III. Autres fonctions classiques

I. Fonctions hyperboliques

A. Cosinus et sinus hyperboliques

B. Tangente hyperbolique

Définitions

Sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\text{et} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Remarque

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

Définitions

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propositions

- (i) sh est impaire, ch est paire.
- (ii) Ces deux fonctions sont dérivables.

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$$

Démonstration.

Définitions

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propositions

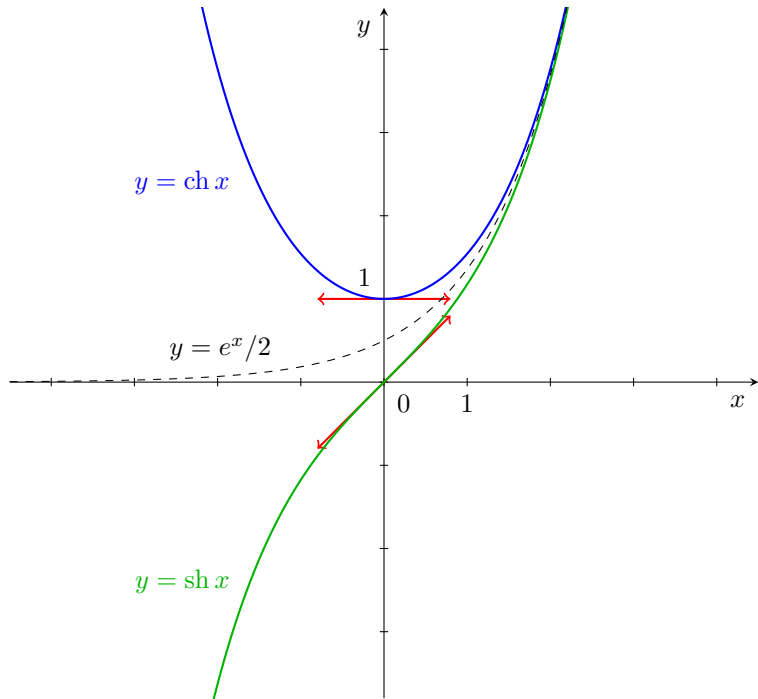
- (i) sh est impaire, ch est paire.
- (ii) Ces deux fonctions sont dérivables.

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch} \quad \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$$

Démonstration.



Tracé.



Remarques

$$\begin{array}{ll} (i) \quad \forall x \in \mathbb{R} & \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ & \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{array}$$

Remarques

$$\begin{array}{ll} (i) \quad \forall x \in \mathbb{R} & \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ & \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{array}$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x \geq 1$$

Remarques

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \\ \text{et} \quad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x} \end{array}$$

$$(ii) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x \geq 1$$

$$(iii) \quad \operatorname{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ est une bijection.}$$

Proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Démonstration.

Proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Démonstration.



Proposition

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

▷ Exercice 1.

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x$$

Donner une formule pour $\operatorname{th} 2x$.

Remarque

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{ch}(x - y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$$

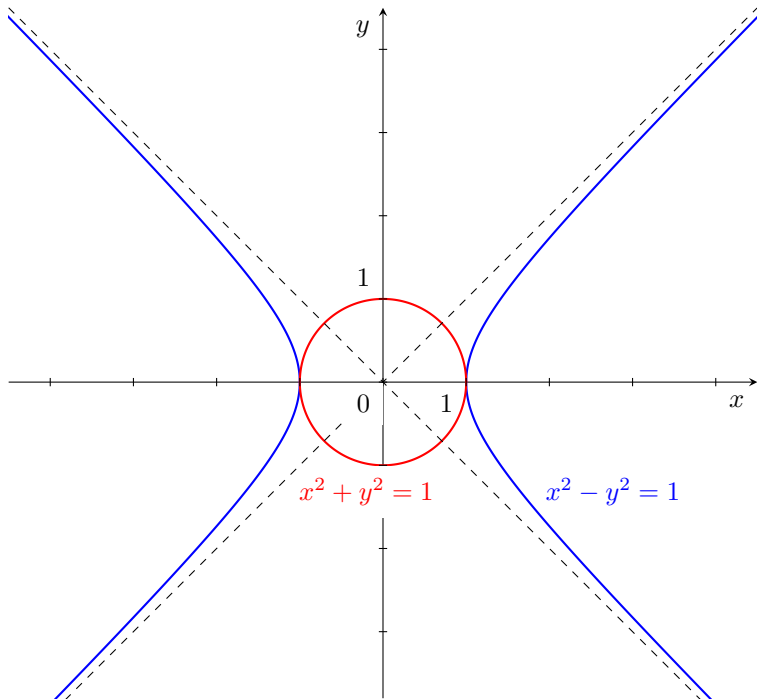
$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{sh}(x - y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$$

etc...

Remarque

Les points de coordonnées $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ pour t parcourant $\mathbb{R}$ sont sur l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.



I. Fonctions hyperboliques

A. Cosinus et sinus hyperboliques

B. Tangente hyperbolique

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Proposition

La fonction th est :

► définie sur $\mathbb{R}$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proposition

La fonction th est :

► impaire

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Proposition

La fonction th est :

► dérivable de dérivée :

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Proposition

La fonction th est :

► dérivable de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Proposition

La fonction th est :

- ▶ Ses limites sont :

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

Proposition

La fonction th est :

► Ses limites sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Proposition

La fonction th est :

► Ses limites sont :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{th} x = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1$$

Définition

Tangente hyperbolique :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Proposition

La fonction th est :

Démonstration. En exercice.

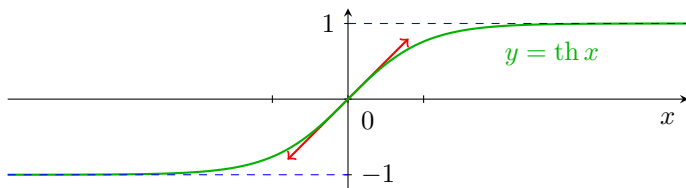


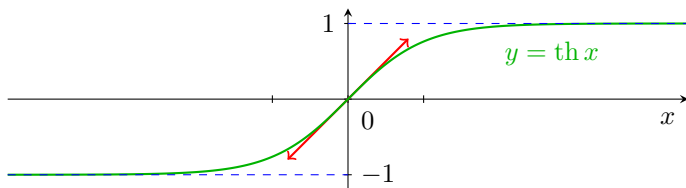
Tracé

► th est strictement croissante :

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2 x} > 0$$

► $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th } x = -1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th } x = 1$





Remarque

La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] -1, 1[$.
En particulier :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \text{th } x < 1$$

Chapitre A4. Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

II. Fonctions trigonométriques réciproques

A. Arc-sinus

B. Arc-cosinus

C. Arc-tangente

III. Autres fonctions classiques

Théorème de dérivabilité de la réciproque

Soit I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une bijection.

Si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur :

$$J' = \{y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}$$

Sa dérivée est :

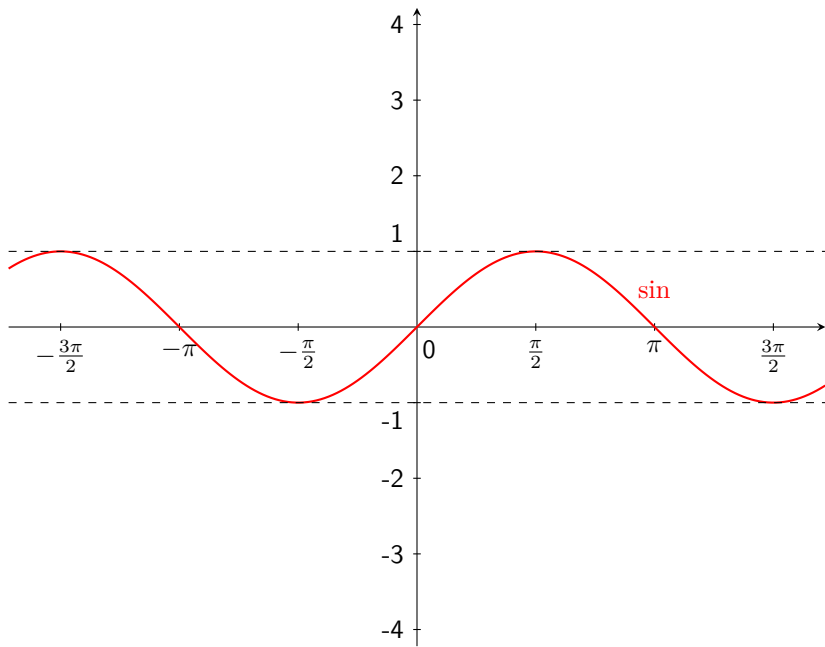
$$\forall y \in J' \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

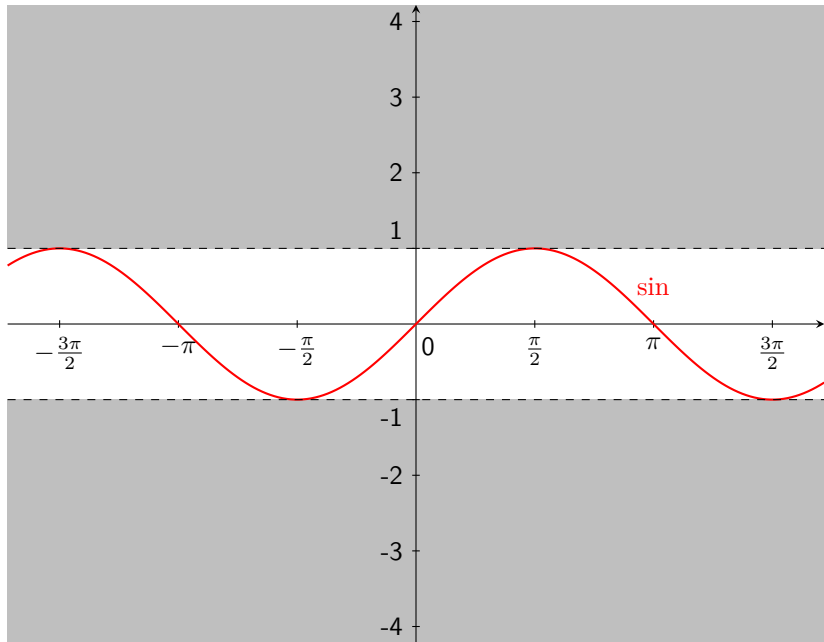
II. Fonctions trigonométriques réciproques

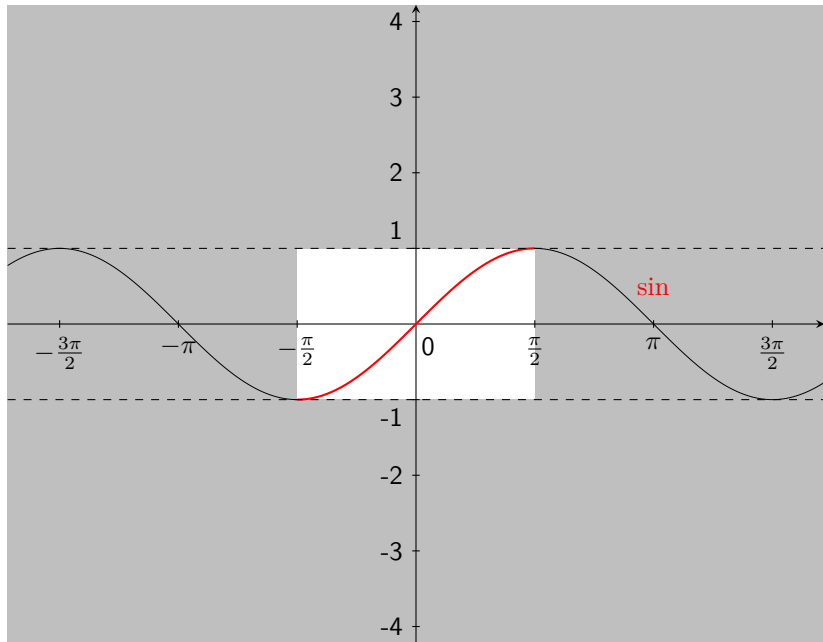
A. Arc-sinus

B. Arc-cosinus

C. Arc-tangente







Définition

On appelle **arc-sinus** la fonction réciproque de :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow [-1, 1]$$

Définition

On appelle **arc-sinus** la fonction réciproque de :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{i.e.,} \quad \arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x \longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \sin \theta = x$$

Remarques

(i) Effectivement la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.

(ii) On note

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Mais

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad x =$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{arcsin } y$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{arcsin } y$$

$$(ii) \quad \forall x \in \quad \text{arcsin } \sin x = x$$

$$\forall y \in \quad \sin \text{arcsin } y = y$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \sin x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{arcsin } y$$

$$(ii) \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{arcsin } \sin x = x$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \sin \text{arcsin } y = y$$

Exemple 1

Quelques valeurs remarquables.

$$\arcsin \frac{1}{2} =$$

$$\arcsin 1 =$$

$$\arcsin 0 =$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$\arcsin \sqrt{2} =$$

Exemple 1

Quelques valeurs remarquables.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 1 =$$

$$\arcsin 0 =$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$\arcsin \sqrt{2} =$$

Exemple 1

Quelques valeurs remarquables.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 0 =$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$\arcsin \sqrt{2} =$$

Exemple 1

Quelques valeurs remarquables.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) =$$

$$\arcsin \sqrt{2} =$$

Exemple 1

Quelques valeurs remarquables.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

$$\arcsin \sqrt{2} =$$

Exemple 1

Quelques valeurs remarquables.

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\pi}{3}$$

$\arcsin \sqrt{2}$ n'est pas défini.

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

Démonstration.

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

Démonstration.



Proposition

Arc-sinus est dérivable sur $] -1, 1[$.

Proposition

Arc-sinus est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Proposition

Arc-sinus est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Remarque

Arc-sinus n'est dérivable ni en 1 ni en -1 .

Théorème de dérivabilité de la réciproque

Soit I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une bijection.

Si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur

$$J' = \{y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}.$$

On a alors :

$$\forall y \in J' \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration. La fonction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arcsin$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in [-1, 1] \mid \sin'(\arcsin x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)}$$

Démonstration. La fonction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arcsin$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in [-1, 1] \mid \cos(\arcsin x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Démonstration. La fonction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque
arcsin est dérivable sur

$$J' = \left\{ x \in [-1, 1] \mid \sqrt{1 - x^2} \neq 0 \right\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Démonstration. La fonction

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque
 $\arcsin$ est dérivable sur

$$J' = \left\{ x \in [-1, 1] \mid \sqrt{1 - x^2} \neq 0 \right\} =]-1, 1[$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \square$$

Proposition

$\arcsin$ est strictement croissante et impaire.

Proposition

$\arcsin$ est strictement croissante et impaire.

Démonstration.

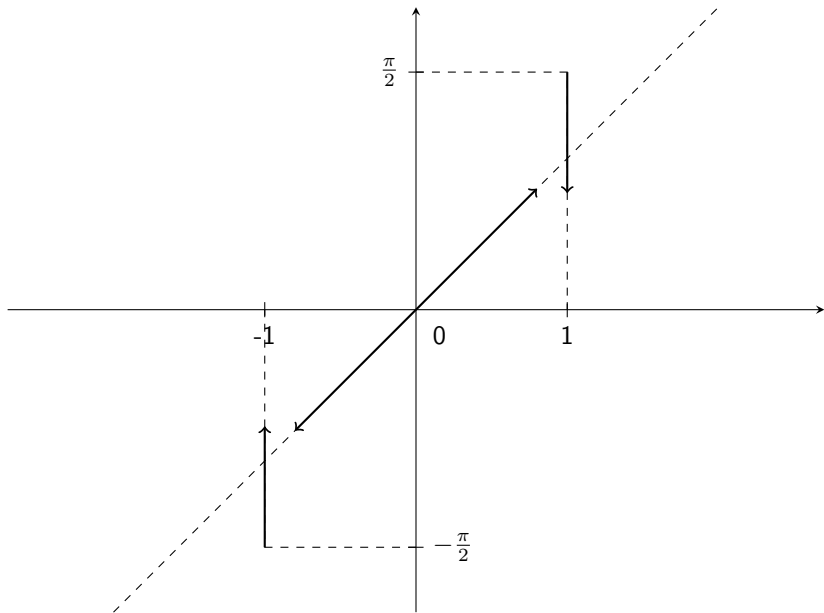
Proposition

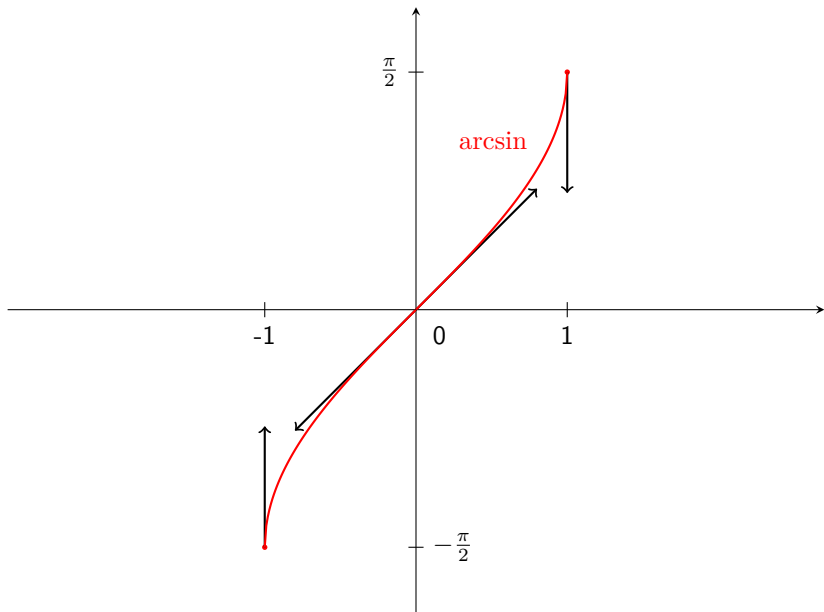
$\arcsin$ est strictement croissante et impaire.

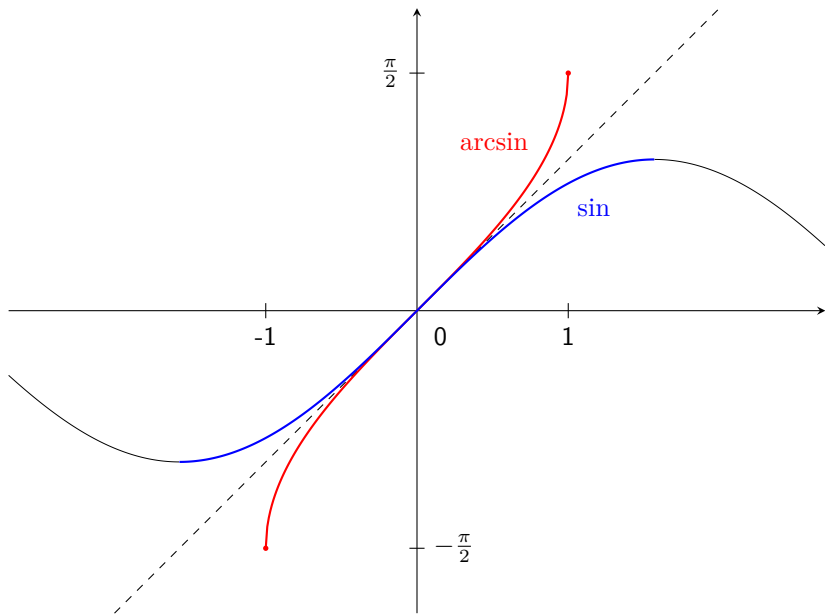
Démonstration.



Tracé





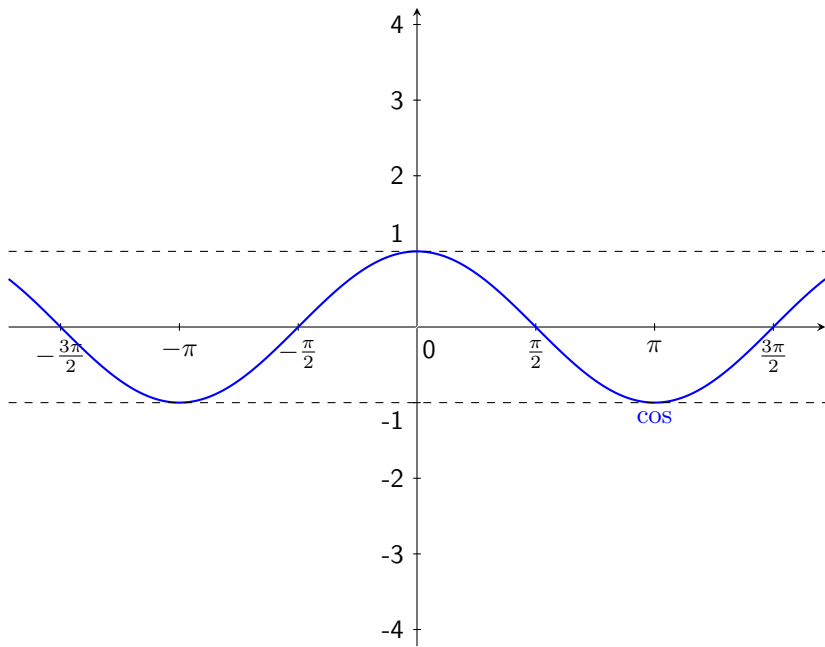


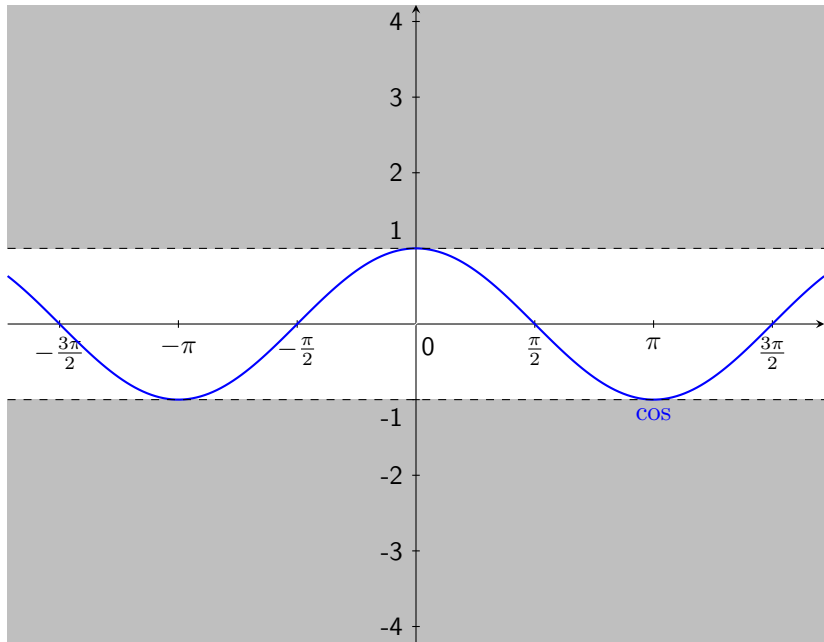
II. Fonctions trigonométriques réciproques

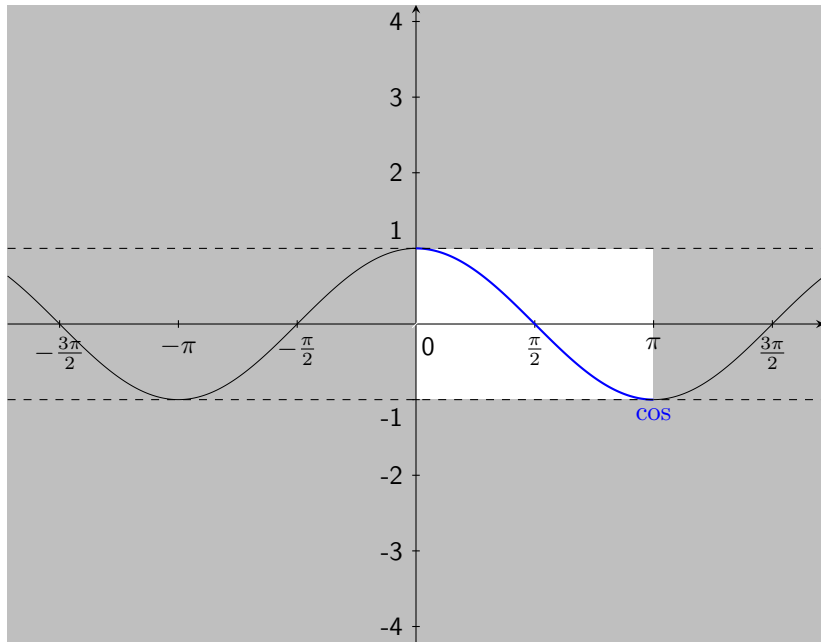
A. Arc-sinus

B. Arc-cosinus

C. Arc-tangente







Définition

On appelle **arc-cosinus** la fonction réciproque de :

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

Définition

On appelle **arc-cosinus** la fonction réciproque de :

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

$$\text{i.e.,} \quad \arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$x \longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \cos \theta = x$$

Remarques

(i) Effectivement la fonction cosinus réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.

(ii) On note

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

Mais

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arccos x \in [0, \pi]$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \cos x \quad \Longleftrightarrow \quad x =$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \cos x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arccos y$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \cos x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arccos y$$

$$(ii) \quad \forall x \in \quad \arccos \cos x = x$$

$$\forall y \in \quad \cos \arccos y = y$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \forall y \in [-1, 1]$$

$$y = \cos x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arccos y$$

$$(ii) \quad \forall x \in [0, \pi] \quad \arccos \cos x = x$$

$$\forall y \in [-1, 1] \quad \cos \arccos y = y$$

Exemple 2

Quelques valeurs remarquables.

$$\arccos \frac{1}{2} =$$

$$\arccos 1 =$$

$$\arccos 0 =$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

Exemple 2

Quelques valeurs remarquables.

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos 1 =$$

$$\arccos 0 =$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) =$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

Exemple 2

Quelques valeurs remarquables.

$$\begin{array}{ll} \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} & \arccos 1 = 0 \\ \arccos 0 = & \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \\ \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = & \end{array}$$

Exemple 2

Quelques valeurs remarquables.

$$\begin{aligned}\arccos \frac{1}{2} &= \frac{\pi}{3} & \arccos 1 &= 0 \\ \arccos 0 &= \frac{\pi}{2} & \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) &= \\ \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= \end{aligned}$$

Exemple 2

Quelques valeurs remarquables.

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos 1 = 0$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$$

Exemple 2

Quelques valeurs remarquables.

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} \qquad \arccos 1 = 0$$

$$\arccos 0 = \frac{\pi}{2} \qquad \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

Rappel

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

Démonstration.

Proposition

Pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$

Démonstration.



Proposition

Arc-cosinus est dérivable sur $] -1, 1[$.

Proposition

Arc-cosinus est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Proposition

Arc-cosinus est dérivable sur $] -1, 1[$.

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Remarque

Arc-cosinus n'est dérivable ni en 1 ni en -1 .

Théorème de dérivabilité de la réciproque

Soit I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une bijection.

Si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur

$$J' = \{y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}.$$

On a alors :

$$\forall y \in J' \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration. La fonction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arccos$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in [-1, 1] \mid \cos'(\arccos x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arccos'(x) = \frac{1}{\cos'(\arccos x)}$$

Démonstration. La fonction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arccos$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in [-1, 1] \mid -\sin(\arccos x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)}$$

Démonstration. La fonction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arccos$ est dérivable sur

$$J' = \left\{ x \in [-1, 1] \mid -\sqrt{1-x^2} \neq 0 \right\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration. La fonction

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arccos$ est dérivable sur

$$J' = \left\{ x \in [-1, 1] \mid -\sqrt{1-x^2} \neq 0 \right\} =]-1, 1[$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \square$$

Proposition

$\arccos$ est strictement décroissante.

Proposition

$\arccos$ est strictement décroissante.

Démonstration.

Proposition

$\arccos$ est strictement décroissante.

Démonstration.



Proposition

$\arccos$ est strictement décroissante.

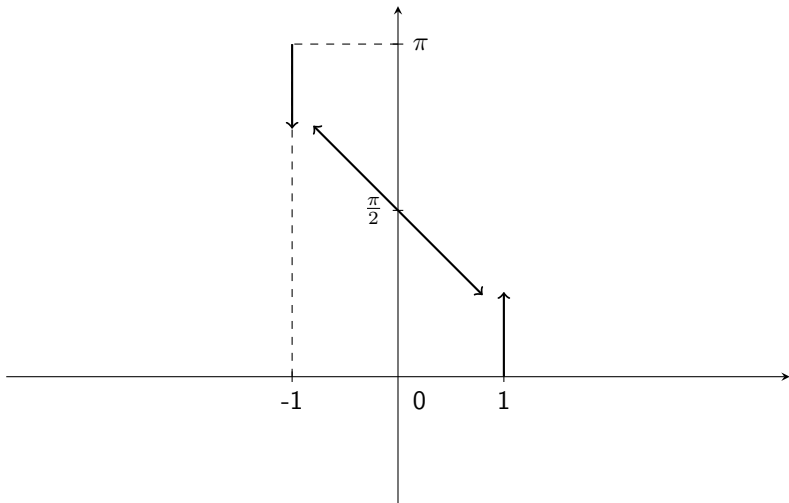
Démonstration.

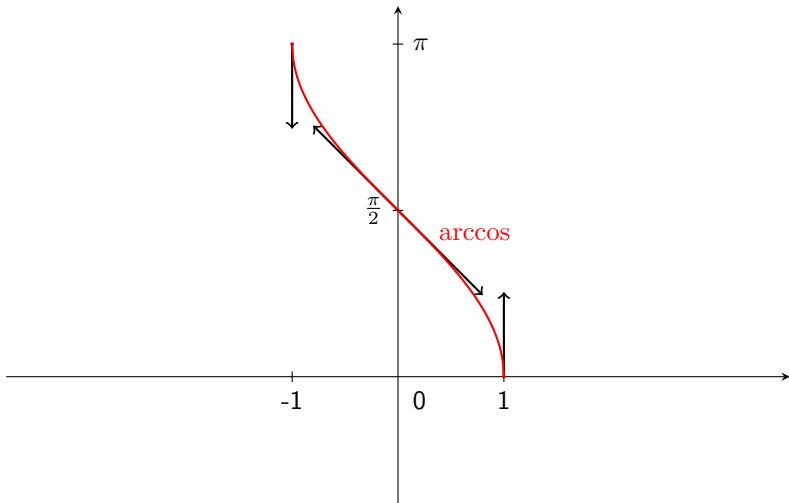


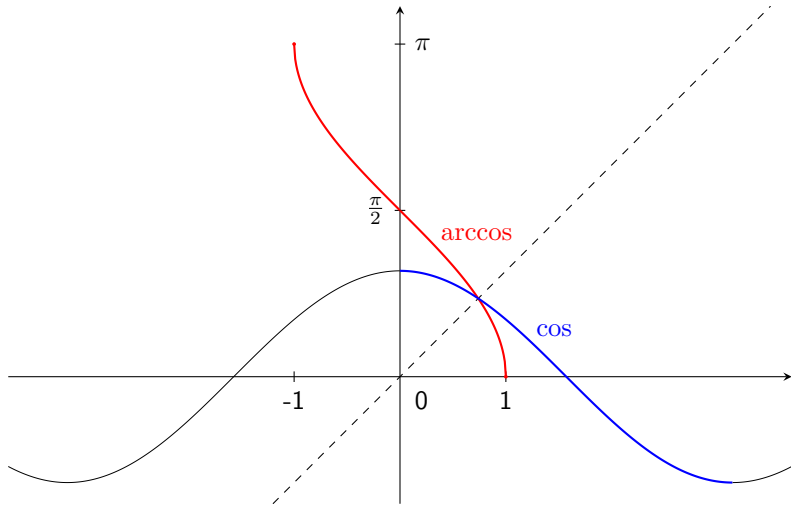
Remarque

$\arccos$ n'est **ni paire ni impaire**.

Tracé



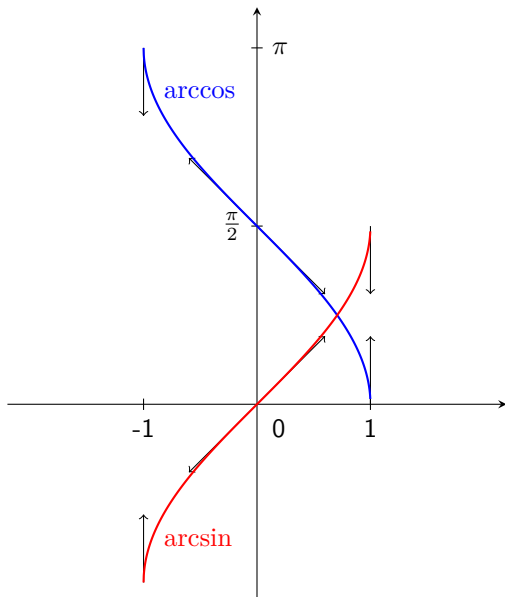


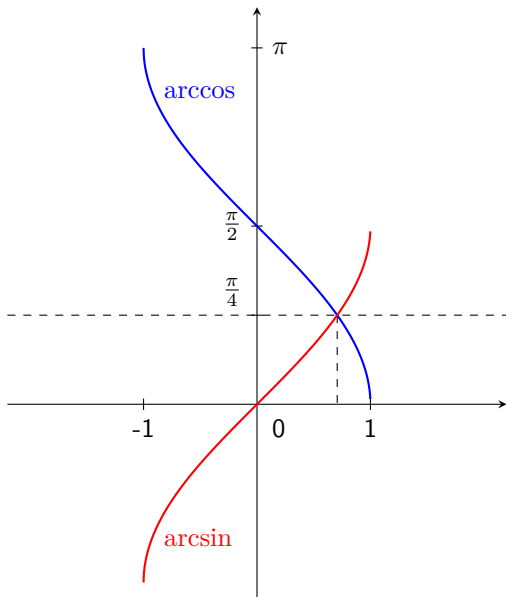


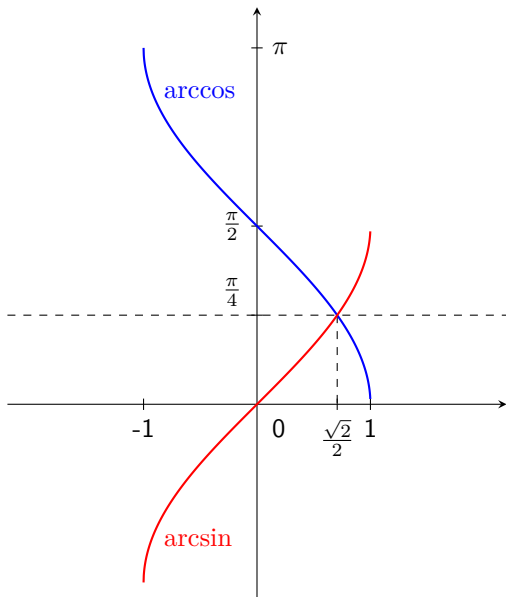
Proposition

$$\forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$







Proposition

$$\forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Deux méthodes.

Proposition

$$\forall x \in [-1, 1]$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration. Deux méthodes.



▷ Exercice 2.

Calculer

$$\arcsin \sin 2\pi$$

$$\arccos \cos -\frac{11\pi}{6}$$

$$\arccos \sin \frac{2\pi}{3}$$

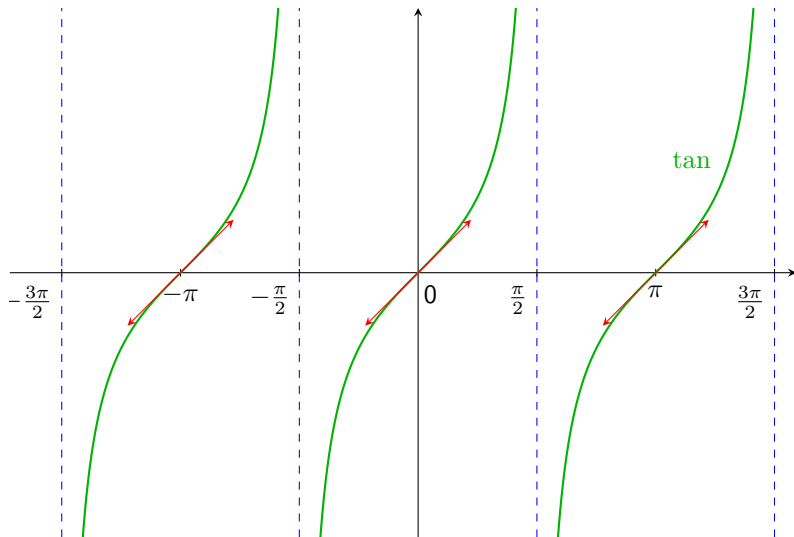
$$\arcsin \cos \frac{47\pi}{3}$$

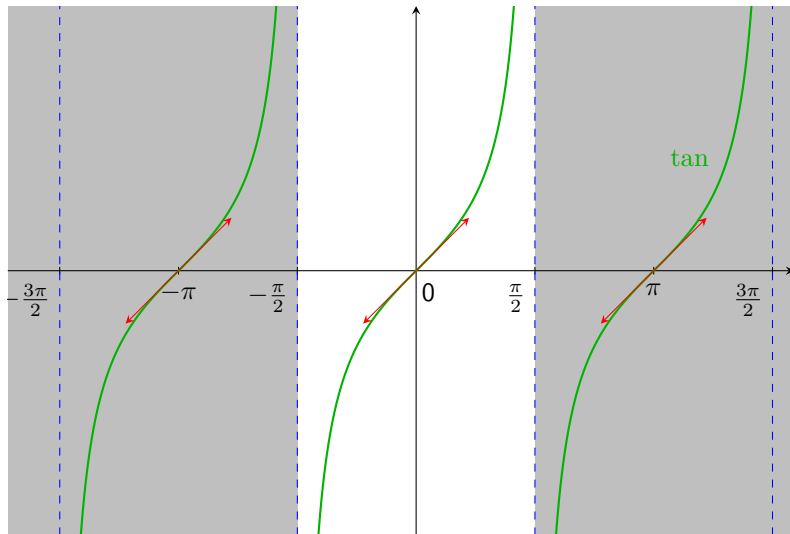
II. Fonctions trigonométriques réciproques

A. Arc-sinus

B. Arc-cosinus

C. Arc-tangente





Définition

On appelle **arc-tangente** la fonction réciproque de :

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

Définition

On appelle **arc-tangente** la fonction réciproque de :

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{i.e.,} \quad \arctan : \mathbb{R} &\longrightarrow \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x &\longmapsto \theta \quad \text{tel que} \quad \tan \theta = x \end{aligned}$$

Remarques

- (i) Effectivement la fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.
- (ii) On note

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Mais

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y = \tan x \quad \Longleftrightarrow \quad x =$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y = \tan x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \arctan y$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y = \tan x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{arctan } y$$

$$(ii) \quad \forall x \in \quad \text{arctan } \tan x = x$$

$$\forall y \in \quad \tan \text{arctan } y = y$$

Propositions

$$(i) \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$y = \tan x \quad \Longleftrightarrow \quad x = \text{arctan } y$$

$$(ii) \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{arctan } \tan x = x$$

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \tan \text{arctan } y = y$$

Exemple 3

Quelques valeurs remarquables.

$$\arctan 1 =$$

$$\arctan \sqrt{3} =$$

$$\arctan 0 =$$

$$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

Exemple 3

Quelques valeurs remarquables.

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \sqrt{3} =$$

$$\arctan 0 =$$

$$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

Exemple 3

Quelques valeurs remarquables.

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan 0 =$$

$$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

Exemple 3

Quelques valeurs remarquables.

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan 0 = 0$$

$$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) =$$

Exemple 3

Quelques valeurs remarquables.

$$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

$$\arctan \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$\arctan 0 = 0$$

$$\arctan \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{6}$$

Proposition

Arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Arc-tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Théorème de dérivabilité de la réciproque

Soit I et J deux intervalles et $f : I \rightarrow J$ une bijection.

Si f est dérivable sur I alors f^{-1} est dérivable sur

$$J' = \{y \in J \mid f'(f^{-1}(y)) \neq 0\}.$$

On a alors :

$$\forall y \in J' \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Démonstration. La fonction

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arctan$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in \mathbb{R} \mid \tan'(\arctan x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan x)}$$

Démonstration. La fonction

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arctan$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \tan^2(\arctan x) \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

Démonstration. La fonction

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arctan$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x^2 \neq 0\}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Démonstration. La fonction

$$\tan : \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\rightarrow \mathbb{R}$$

est bijective dérivable. Par théorème sa réciproque $\arctan$ est dérivable sur

$$J' = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + x^2 \neq 0\} = \mathbb{R}$$

et sa dérivée est :

$$\forall x \in J' \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad \square$$

Proposition

$\arctan$ est strictement croissante et impaire.

Proposition

$\arctan$ est strictement croissante et impaire.

Démonstration. En effet, pour tout $x \in]-1, 1[$:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$$

donc la fonction $\arctan$ est strictement croissante.

Proposition

$\arctan$ est strictement croissante et impaire.

Démonstration. Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$.

Soit $\theta = \arctan x$. Alors $\tan \theta = x$ et

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta = -x$$

$$\text{donc} \quad -\theta = \arctan(-x)$$

Ceci donne bien :

$$-\arctan x = \arctan(-x)$$



Proposition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Proposition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ <}} \arctan \tan t$$

Proposition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ <}} \arctan \tan t$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ <}} t = \frac{\pi}{2}$$

Proposition

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = \lim_{\substack{t \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ >}} \arctan \tan t$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ >}} t = -\frac{\pi}{2}$$

Proposition

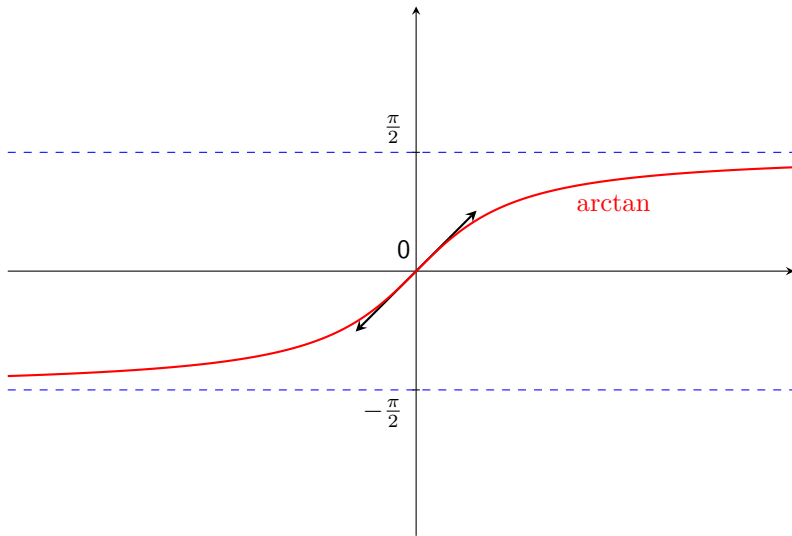
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$$

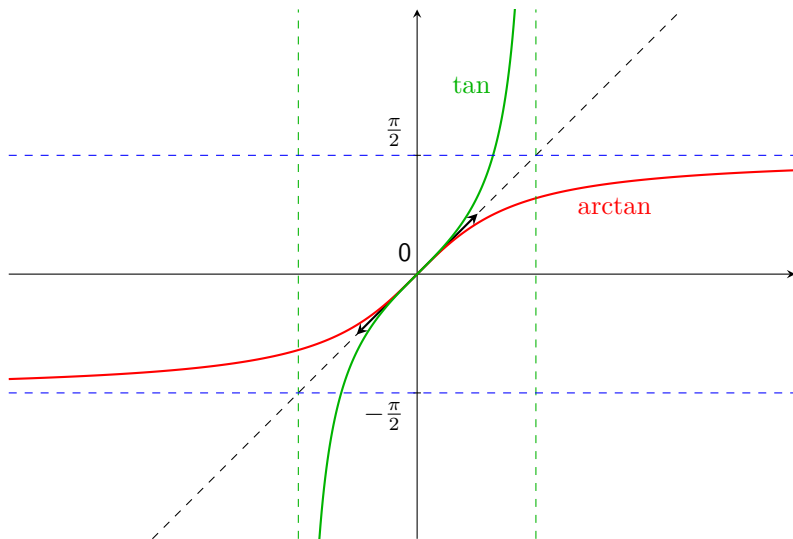
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

Démonstration alternative.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow b} f^{-1}(x) = a \quad \square$$

Tracé





Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Proposition $\forall x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Démonstration.

Exemple 4

Soit $z = x + iy$ avec $x \neq 0$.

$$\arg z = \left\{ \right.$$

Exemple 4

Soit $z = x + iy$ avec $x \neq 0$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 4

Soit $z = x + iy$ avec $x \neq 0$.

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x > 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

▷ Exercice 3.

Démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \tan \arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin \arctan x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Chapitre A4. Fonctions usuelles

I. Fonctions hyperboliques

II. Fonctions trigonométriques réciproques

III. Autres fonctions classiques

A. Valeur absolue

B. Partie entière

III. Autres fonctions classiques

A. Valeur absolue

B. Partie entière

Définition - Valeur absolue

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Propositions

(i) La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Propositions

- (i) La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- (ii) La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$,

Propositions

- (i) La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- (ii) La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propositions

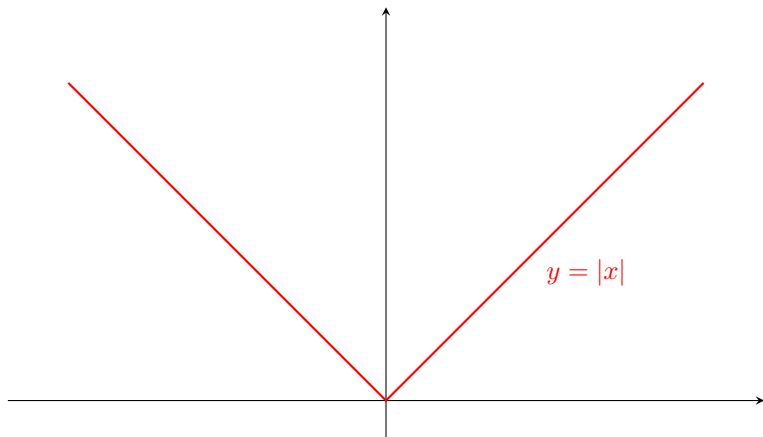
- (i) La fonction valeur absolue est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
- (ii) La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de dérivée :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{d|x|}{dx} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (iii) La fonction valeur absolue est paire.

Tracé

Tracé



III. Autres fonctions classiques

A. Valeur absolue

B. Partie entière

Définition

Pour tout x de $\mathbb{R}$ la **partie entière** de x est

$$\lfloor x \rfloor = \text{Max} (\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$$

Définition

Pour tout x de $\mathbb{R}$ la **partie entière** de x est

$$\lfloor x \rfloor = \text{Max} (\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$$

i.e., $\lfloor x \rfloor$ est l'entier n tel que :

$$n \leq x < n + 1$$

Définition

Pour tout x de $\mathbb{R}$ la **partie entière** de x est

$$\lfloor x \rfloor = \text{Max} (\mathbb{Z} \cap]-\infty, x])$$

i.e., $\lfloor x \rfloor$ est l'entier n tel que :

$$n \leq x < n + 1$$

On obtient une fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exemple 5

$$\lfloor \pi \rfloor =$$

$$\lfloor -\pi \rfloor =$$

Exemple 5

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 \qquad \lfloor -\pi \rfloor = -4$$

Exemple 5

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$

Si a et b sont entiers :

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor =$$

$$\frac{a}{b} =$$

Exemple 5

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$

Si a et b sont entiers :

$$\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor = a // b$$

$$\frac{a}{b} = a / b$$

Remarques

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x \in$$

Remarques

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x \in [n, n + 1[$$

Remarques

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x \in [n, n + 1[$$

(ii) Par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Cet encadrement donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor < x \leq \lfloor x \rfloor + 1$$

Remarques

(i) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$n = \lfloor x \rfloor \iff x \in [n, n + 1[$$

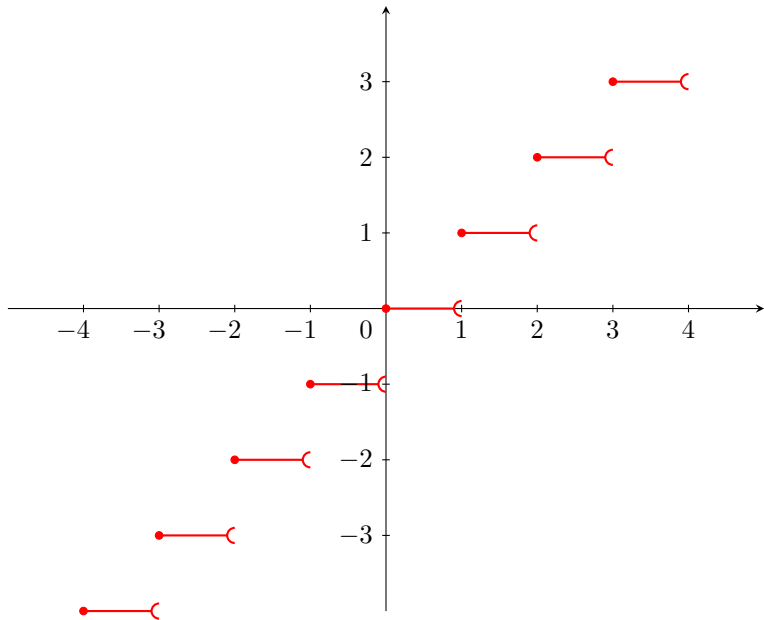
(ii) Par définition :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Cet encadrement donne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

Tracé



Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} \lfloor x \rfloor = 0$$

Remarque

La fonction partie entière n'est pas continue.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ <}} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor$$

Proposition

La fonction partie entière est croissante.

Proposition

La fonction partie entière est croissante.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$.

Proposition

La fonction partie entière est croissante.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. On sait que :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

Proposition

La fonction partie entière est croissante.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. On sait que :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

Donc :

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$$

Proposition

La fonction partie entière est croissante.

Démonstration. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leq y$. On sait que :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{et} \quad \lfloor y \rfloor \leq y < \lfloor y \rfloor + 1$$

Donc :

$$\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$$

Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$ sont entiers alors :

$$\lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor$$



Exemple 6

Le nombre de chiffres de l'écriture décimale d'un entier naturel N est $\lfloor \log N \rfloor + 1$.

▷ Exercice 4.

Les relations

$$\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$$

$$\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$$

$$\lfloor xy \rfloor = \lfloor x \rfloor \lfloor y \rfloor$$

sont-elles valables pour tous réels x et y ?**▷ Exercice 5.**Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Prochain chapitre

Chapitre B3
Logique