Mathématiques

Chapitre A3
Fonctions d'une variable réelle

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Généralités sur les réels

I. Généralités sur les réels

A. La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

B. Intervalles

C. Majorant, minorant

Définition

L'ensemble des réels est muni d'une relation d'ordre notée $\leqslant$.

Définition

Une relation sur un ensemble E est une application

$$E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

Définition

Une relation sur un ensemble E est une application

$$E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

Une relation d'ordre est une relation :

Définition

Une relation sur un ensemble E est une application

$$E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

Une relation d'ordre est une relation :

- réflexive : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant x$

Définition

Une relation sur un ensemble E est une application

$$E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

Une relation d'ordre est une relation :

- réflexive : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant x$
- antisymétrique :
  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \implies x = y$

Définition

Une relation sur un ensemble E est une application

$$E \times E \to \{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$$

Une relation d'ordre est une relation :

- réflexive : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant x$
- antisymétrique :
  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \implies x = y$
- transitive :
  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \implies x \leqslant z$

Proposition

Pour tous réels a, b, c, d :

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$$

$$0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d \implies 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

Proposition

Pour tous réels a, b, c, d :

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad c \leqslant d \implies a + c \leqslant b + d$$

$$0 \leqslant a \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant c \leqslant d \implies 0 \leqslant ac \leqslant bd$$

En conséquence :

$$a \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b \leqslant c \implies ab \geqslant ac$$

$$0 < a \leqslant b \implies 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$$

$$a \leqslant b < 0 \implies \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a} < 0$$

Proposition

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels **positifs**.

Si $$\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$$ alors

Proposition

Soit $a_1, \dots, a_n$ des réels **positifs**.

Si $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ alors $a_1 = \cdots = a_n = 0$

Proposition

Soit $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$.

Si $\quad n > m \quad$ alors

Proposition

Soit $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

Si $n > m$ alors $n \geqslant m + 1$

Définition

On appelle intervalle une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant :

Définition

On appelle intervalle une partie I de $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in I^2 \quad \forall z \in \mathbb{R} \qquad x \leqslant z \leqslant y \Longrightarrow z \in I$$

Exemples

Sont des intervalles : $(a < b)$

$$[a, b] \qquad]a, b] \qquad]-\infty, b[$$

Exemples

Sont des intervalles : $(a < b)$

$$[a, b] \qquad]a, b] \qquad]-\infty, b[$$

$$\mathbb{R} \qquad \{a\} \qquad \varnothing$$

Exemples

Sont des intervalles : $(a < b)$

$$[a, b] \qquad]a, b] \qquad]-\infty, b[$$

$$\mathbb{R} \qquad \{a\} \qquad \varnothing$$

Ne sont pas des intervalles :

$\{a, b\}$ avec $a \neq b$ $\qquad \mathbb{R}^*$

Remarques

(i) L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

Remarques

(i) L'intersection de deux intervalles est un intervalle.
L'union ne l'est pas en général.

Remarques

(i) L'intersection de deux intervalles est un intervalle.
L'union ne l'est pas en général.
Le complémentaire non plus.

Remarques

(i) L'intersection de deux intervalles est un intervalle.
L'union ne l'est pas en général.
Le complémentaire non plus.

(ii) Soit $r \in \mathbb{R}_+$ et $a \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leqslant r$ est l'intervalle $[a - r, a + r]$.

Proposition

$I \subseteq \mathbb{R}$

$$\begin{array}{ll} & I \text{ est un intervalle} \\ \iff & \forall (a,b) \in I^2 \quad a < b \quad \implies \quad [a,b] \subseteq I \end{array}$$

Définitions

(i) Une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in A \qquad x \leqslant M$$

Le réel M est alors appelé un majorant de A.

Définitions

(i) Une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in A \qquad x \leqslant M$$

Le réel M est alors appelé un majorant de A.

(ii) Une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in A \qquad m \leqslant x$$

Le réel m est alors appelé un minorant de A.

Définitions

(i) Une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée si

$$\exists M \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in A \qquad x \leqslant M$$

Le réel M est alors appelé un majorant de A.

(ii) Une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée si

$$\exists m \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in A \qquad m \leqslant x$$

Le réel m est alors appelé un minorant de A.

(iii) Une partie est bornée si elle est majorée et minorée.

Définitions

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Un maximum de A est un majorant de A *appartenant à* A. On le note $\mathrm{Max}(A)$.

(ii) Un minimum de A est un minorant de A *appartenant à* A. On le note $\mathrm{Min}(A)$.

Exemple 1

(i) L'intervalle $[-6, 4[$ est borné, il admet un minimum mais pas de maximum.

Exemple 1

(i) L'intervalle $[-6, 4[$ est borné, il admet un minimum mais pas de maximum.

(ii) $A = \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Remarque

Si A admet un maximum alors ce maximum est unique.

Le maximum de A

Un majorant de A

Remarque

Une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée si :

Remarque

Une partie A de $\mathbb{R}$ n'est pas majorée si :

$$\forall M \in \mathbb{R} \qquad \exists x \in A \qquad x > M$$

Remarques

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est finie alors elle admet un minimum et un maximum.

Remarques

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est finie alors elle admet un minimum et un maximum.

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

(ii) Si A est majorée alors elle est finie.

Remarques

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est finie alors elle admet un minimum et un maximum.

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

(ii) Si A est majorée alors elle est finie.

Si A est majorée non-vide alors elle admet un maximum.

Remarques

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

(i) Si A est finie alors elle admet un minimum et un maximum.

Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

(ii) Si A est majorée alors elle est finie.

Si A est majorée non-vide alors elle admet un maximum.

(iii) Si A est non-vide alors elle admet un minimum.

II. Généralités sur les fonctions

On note E et F deux parties non-vides de $\mathbb{R}$.

Définitions

Soit f une fonction de E dans F.

E est l'ensemble de départ (et non de définition)

F est l'ensemble d'arrivée.

Définitions

Soit f une fonction de E dans F.

E est l'ensemble de départ (et non de définition)

F est l'ensemble d'arrivée.

$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E\}$ est le graphe de f.

Définitions

Soit f une fonction de E dans F.

E est l'ensemble de départ (et non de définition)

F est l'ensemble d'arrivée.

$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in E\}$ est le graphe de f.

Si $\quad y = f(x) \qquad$ (avec $x \in E$ et $y \in F$) :

y est l'image de x par f.

x est un antécédent de y par f.

Notation

Ensemble des fonctions de E dans F :

$$\mathcal{F}(E, F) \qquad \text{ou} \qquad F^E$$

Remarques

Soit f une fonction de E dans F.

(i) Si x est élément de E alors x admet une et une seule image, il s'agit de $f(x)$.

(ii) Si y est un élément de F, alors y peut ne pas avoir d'antécédent, en avoir un seul, ou en avoir plusieurs.

Notation

$$\begin{array}{rrcl} f: & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Notation

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{rcl} E & \xrightarrow{f} & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Remarques

(i) Image de f :

$$f(E) = \{\, f(x) \mid x \in E \}$$

Remarques

(i) Image de f :

$$f(E) = \{ f(x) \mid x \in E \} \subseteq F$$

Remarques

(i) Image de f :

$$f(E) = \{f(x) \mid x \in E\} \subseteq F$$

(ii) La donnée des ensembles de départ et d'arrivée fait partie de la définition d'une fonction.

Exemple 2

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \neq \quad \begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Exemples et définitions

(i) Identité de E :

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Exemples et définitions

Soit $A \subseteq E$ et $f : E \to F$.

(ii) Restriction de f à A :

$$f_{|_A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Soit $A \subseteq E$ et $g : A \to F$.

(iii) Prolongement de g à E :

$$f : E \to F \quad \text{tel que} \quad f|_A = g$$

Exemples et définitions

Soit $A \subseteq E$.

(iv) Fonction indicatrice de A :

$$\mathbb{1}_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit D, E, F des parties de $\mathbb{R}$.

Remarque

L'ensemble $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ est muni d'une addition, d'une multiplication, etc.

Définition

Soit $f, g : D \to \mathbb{R}$ des fonctions et λ un réel.

$$\forall x \in D \qquad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda\, f(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Remarque

$$\begin{aligned} f+g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)+g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fg : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)g(x) \end{aligned}$$

etc.

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(D) \subseteq E$.

Composée de f et de g :

$$\begin{aligned} g \circ f : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

Remarque

La composée de f et de g est définie si et seulement si $f(D) \subseteq E$, *i.e.*,

$$\forall x \in D \qquad f(x) \in E$$

Exemple 3

Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Sur quel ensemble est définie $g \circ f$?

Exemple 3

Soit $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
Sur quel ensemble est définie $g \circ f$?

Exemple 4

Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$ où

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x+1 \end{array} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Exemple 5

Si $f : E \to F$ est une fonction alors

$$\mathrm{Id}_F \circ f = \qquad \text{et} \qquad f \circ \mathrm{Id}_E =$$

Exemple 5

Si $f : E \to F$ est une fonction alors

$$\mathrm{Id}_F \circ f = f \qquad \text{et} \qquad f \circ \mathrm{Id}_E = f$$

Exemple 6

Soit f la fonction exponentielle.

Tracer les graphes des fonctions :

$$f_1 : x \mapsto f(x) \qquad f_2 : x \mapsto f(x) + 2$$

$$f_3 : x \mapsto f(x+2) \qquad f_4 : x \mapsto f(-x)$$

$$f_5 : x \mapsto -f(x) \qquad f_6 : x \mapsto f(2x)$$

$$f_7 : x \mapsto 2f(x)$$

Définitions

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite paire si :

(i) D est symétrique par rapport à 0

(ii) $\forall x \in D \qquad f(-x) = f(x)$

Elle est dite impaire si :

(i) D est symétrique par rapport à 0

(ii) $\forall x \in D \qquad f(-x) = -f(x)$

Remarque

Une fonction f est paire si

La fonction f est impaire si

Remarque

Une fonction f est paire si

$$\forall x \in D \quad -x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = f(x)$$

La fonction f est impaire si

$$\forall x \in D \quad -x \in D \quad \text{et} \quad f(-x) = -f(x)$$

Remarques

(i) La fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Elle est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarques

(i) La fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Elle est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

(ii) On peut restreindre l'étude à $D \cap \mathbb{R}_+$, et obtenir le reste de la courbe par symétrie.

▷ Exercice 1.

On pose : $f(x) = \ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Démontrer que f est impaire.

Définition

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est périodique de période T, ou T-périodique $(T > 0)$, si :

$$\forall x \in D \quad x + T \in D \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

Remarque

Si f est périodique de période T alors on peut restreindre son étude à un intervalle de longueur T, comme

$$[0, T] \qquad \text{ou} \qquad \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

On obtiendra le reste de la courbe par translations successives de vecteur $T\vec{\imath}$.

Exemple 7

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

La fonction tangente est périodique de période π.

▷ Exercice 2.

Déterminer les périodes des fonctions :

$$f(x) = \tan \frac{x}{2} \qquad\qquad g(x) = \frac{\cos 4x}{\sin 6x}$$

$$h(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

avec $\begin{cases} (A, \omega, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \\ A \neq 0, \omega \neq 0 \end{cases}$

▷ Exercice 3.

Démontrer que la fonction

$$f : x \mapsto \cos x + \cos(\pi x)$$

n'est pas périodique.

II. Généralités sur les fonctions

Définition

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est majorée, respectivement minorée, bornée si la partie $f(D)$ de $\mathbb{R}$ est majorée, respectivement minorée, bornée.

Remarque

La fonction f est majorée ssi :

Remarque

La fonction f est majorée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in D \quad f(x) \leqslant M$$

Graphiquement, la courbe de f est en-dessous de la droite d'équation $y = M$.

Remarque

f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Définition

La fonction f admet un maximum sur D si il existe $x_0 \in D$ tel que $f(x_0)$ soit un majorant de f sur D :

Définition

La fonction f admet un maximum sur D si il existe $x_0 \in D$ tel que $f(x_0)$ soit un majorant de f sur D :

$$\exists x_0 \in D \quad \forall x \in D \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

$f(x_0)$ est le maximum de l'ensemble $f(D)$.

Définition

La fonction f admet un minimum sur D si il existe $x_0 \in D$ tel que $f(x_0)$ soit un minorant de f sur D :

$$\exists x_0 \in D \quad \forall x \in D \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

$f(x_0)$ est le minimum de l'ensemble $f(D)$.

Notation

S'il existe le maximum de f sur D est noté :

$$\underset{D}{\mathrm{Max}}(f) \quad \text{ou} \quad \underset{x\in D}{\mathrm{Max}}\, f(x) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Max}(f(D))$$

S'il existe le minimum est noté :

$$\underset{D}{\mathrm{Min}}(f) \quad \text{ou} \quad \underset{x\in D}{\mathrm{Min}}\, f(x) \quad \text{ou} \quad \mathrm{Min}(f(D))$$

Exemple 8

Soit

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

f est minorée mais elle n'admet pas de minimum.

II. Généralités sur les fonctions

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

- croissante sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

- décroissante sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

- strictement croissante sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

- strictement décroissante sur D si :

$$\forall (x_1, x_2) \in D^2 \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est

- monotone sur D si elle est croissante ou décroissante.
- strictement monotone sur D si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Remarque

Soit f et g deux fonctions réelles telles que $g \circ f$ est définie.

Si f et g sont croissantes alors $g \circ f$ est croissante.

Remarque

Soit f et g deux fonctions réelles telles que $g \circ f$ est définie.
Si f et g sont croissantes alors $g \circ f$ est croissante.
Si f est croissante et g est décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.
Si f est décroissante et g est croissante alors $g \circ f$ est décroissante.

Remarque

Soit f et g deux fonctions réelles telles que $g \circ f$ est définie.

Si f et g sont croissantes alors $g \circ f$ est croissante.

Si f est croissante et g est décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.

Si f est décroissante et g est croissante alors $g \circ f$ est décroissante.

Si f et g sont décroissantes alors $g \circ f$ est

Remarque

Soit f et g deux fonctions réelles telles que $g \circ f$ est définie.
Si f et g sont croissantes alors $g \circ f$ est croissante.
Si f est croissante et g est décroissante alors $g \circ f$ est décroissante.
Si f est décroissante et g est croissante alors $g \circ f$ est décroissante.
Si f et g sont décroissantes alors $g \circ f$ est croissante.

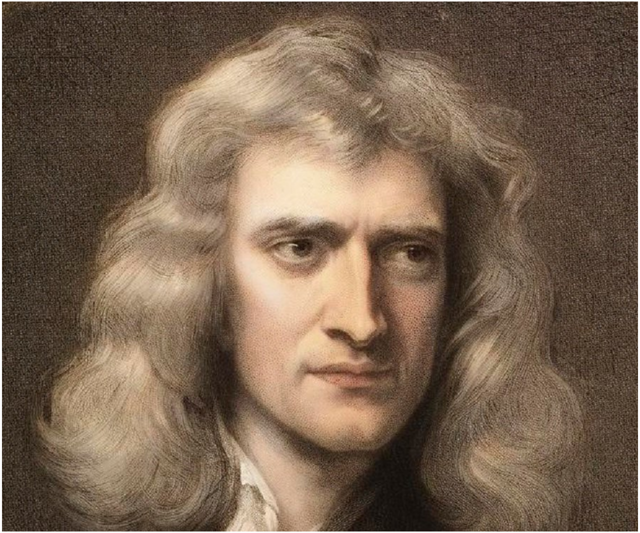
Exemple 9

La fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$

est-elle croissante ? Décroissante ?

Blaise Pascal (France) 1596 – 1650

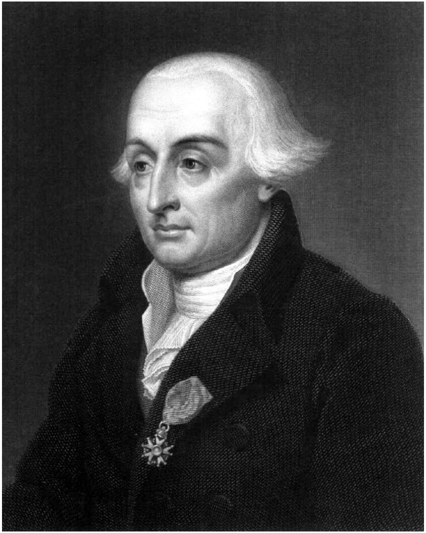
Isaac Newton (GB) 1642 – 1727



Gottfried Leibniz (Allemagne) 1646 – 1716

Jean Le Rond d'Alembert (France)
1717 – 1783

Joseph-Louis Lagrange (Italie) 1736 – 1813



III. Dérivation

Rappel sur les droites du plan

- L'équation d'une droite est de la forme :

$$y = ax + b \qquad \text{ou} \qquad x = b$$

Rappel sur les droites du plan

- L'équation d'une droite est de la forme :

$$y = ax + b \qquad \text{ou} \qquad x = b$$

- Le vecteur de coordonnées $(1, a)$ ou $(0, 1)$ est directeur de la droite.

Rappel sur les droites du plan

- L'équation d'une droite est de la forme :
$$y = ax + b \qquad \text{ou} \qquad x = b$$
- Le vecteur de coordonnées $(1, a)$ ou $(0, 1)$ est directeur de la droite.
- Pour tracer la droite d'équation $y = ax + b$ on place le point $(0, b)$ puis on utilise le vecteur directeur.

Rappel sur les droites du plan

- Soit $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points.
  Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

  $$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

  La valeur de b est calculée ensuite.

▷ Exercice 4.

Tracer les droites d'équations :

$$y = 3 - 2x \qquad y = \frac{x}{2} + 3 \qquad 2x - 5y = 1$$

▷ Exercice 4.

Tracer les droites d'équations :

$$y = 3 - 2x \qquad y = \frac{x}{2} + 3 \qquad 2x - 5y = 1$$

▷ Exercice 5.

Déterminer une équation de la droite passant par les points de coordonnées $(4, 5)$ et $(-1, 2)$, puis $(-1, 0)$ et $(6, -1)$.

Définition

$f : D \to \mathbb{R}$ fonction $x_0 \in D$

On dit que la fonction f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie.

Définition (suite)

On note alors

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) =$$

Définition (suite)

On note alors

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Définition (suite)

On note alors

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ce réel est appelé nombre dérivé de f en x_0.

Proposition

Équation de la tangente à la courbe de f en x_0 :

Proposition

Équation de la tangente à la courbe de f en x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Définition

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dérivable ou dérivable sur D si elle est dérivable en tout point x_0 de D.

Dans ce cas la fonction

$$\begin{aligned} f' : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

est appelée fonction dérivée de f.

Proposition

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf :

Proposition

Toutes les fonctions usuelles sont dérivables sur leur ensemble de définition, sauf :

- La fonction racine carrée
  définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
- La fonction valeur absolue
  définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$
- Les fonctions $\arccos$ et $\arcsin$
  définies sur $[-1, 1]$, dérivables sur $]-1, 1[$.

Exemple 10

La fonction carré est dérivable.

▷ Exercice 6.

Démontrer que la fonction inverse

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

est dérivable sur son ensemble de définition et donner sa fonction dérivée.

▷ Exercice 7.

Démontrer que la fonction racine carrée

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais pas en 0.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

Alors $f' \geqslant 0 \iff f$ croissante

$f' \leqslant 0 \iff f$ décroissante

$f' = 0 \iff f$ constante

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un **intervalle** I.

Alors $f' \geqslant 0 \iff f$ croissante

$f' \leqslant 0 \iff f$ décroissante

$f' = 0 \iff f$ constante

$f' > 0 \implies f$ strictement croissante

$f' < 0 \implies f$ strictement décroissante

Proposition

Avec les mêmes notations :

(i) Si f' est positive et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.

(ii) Si f' est négative et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

<u>Démonstration du *(i)*</u>.
Si f' est positive alors f est croissante.

Démonstration du *(i)*.

Si f' est positive alors f est croissante.

Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Démonstration du *(i)*.

Si f' est positive alors f est croissante.

Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.

Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, comme $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ alors

$$f(x_1) = f(x) = f(x_2)$$

<u>Démonstration du *(i)*</u>.
Si f' est positive alors f est croissante.
Si f n'est pas strictement croissante alors il existe x_1 et x_2 dans I tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$.
Pour tout $x \in [x_1, x_2]$, comme $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ alors

$$f(x_1) = f(x) = f(x_2)$$

Ainsi f est constante sur $[x_1, x_2]$, donc sa dérivée y est nulle.
Or l'intervalle $[x_1, x_2]$ contient une infinité de points, ce qui constitue une contradiction. $\square$

Corollaire

Soit f et g dérivables sur un intervalle I.

Si $f' = g'$ alors il existe une constante K telle que $f = g + K$:

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I \qquad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. Soit $h = f - g$.

Démonstration. Soit $h = f - g$.

Alors h est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Démonstration. Soit $h = f - g$.

Alors h est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi $h' = 0$ donc h est constante :

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I \qquad h(x) = K$$

Démonstration. Soit $h = f - g$.

Alors h est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi $h' = 0$ donc h est constante :

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I \qquad f(x) - g(x) = K$$

Démonstration. Soit $h = f - g$.

Alors h est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi $h' = 0$ donc h est constante :

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I \qquad f(x) = g(x) + K$$

Démonstration. Soit $h = f - g$.

Alors h est dérivable et :

$$\forall x \in I \qquad h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$$

Ainsi $h' = 0$ donc h est constante :

$$\exists K \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in I \qquad f(x) = g(x) + K$$

Ceci donne $f(x) = g(x) + K$ pour tout $x \in I$. $\square$

Remarque

Les propriétés précédentes ne sont valables que sur un intervalle !

Remarque

Les propriétés précédentes ne sont valables que sur un intervalle !

Exemple 11

La fonction signe

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{sgn} : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|} \end{array}$$

est définie sur $\mathbb{R}^*$.
Elle est dérivable, de dérivée nulle, mais pas constante.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Si f' est positive
alors f est croissante sur tout intervalle de D.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Si f' est négative
alors f est décroissante sur tout intervalle de D.

Corollaire

Soit f une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$.

Si f' est nulle
alors f est constante sur tout intervalle de D.

Proposition

Si f admet un extremum en x_0 point intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Proposition

Si f admet un extremum en x_0 point intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration.

Proposition

Si f admet un extremum en x_0 point intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

<u>Démonstration</u>. $\square$

Proposition

Si f admet un extremum en x_0 point intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

(i) On utilise le tableau de variations pour déterminer les extrema d'une fonction.

Proposition

Si f admet un extremum en x_0 point intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

(i) On utilise le tableau de variations pour déterminer les extrema d'une fonction.

(ii) La réciproque est fausse.

Proposition

Si f admet un extremum en x_0 point intérieur à I alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques

(i) On utilise le tableau de variations pour déterminer les extrema d'une fonction.

(ii) La réciproque est fausse.

Exemple 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

III. Dérivation

Proposition

Tableau des dérivées des fonctions usuelles.

III. Dérivation

Proposition

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D.
Alors les fonctions suivantes sont dérivables sur D et leurs dérivées sont :

$$\begin{aligned}
(u+v)' &= \\
(\lambda u)' &= \\
(uv)' &= \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &=
\end{aligned}$$

Proposition

Soit u et v deux fonctions dérivables sur D.
Alors les fonctions suivantes sont dérivables sur D et leurs dérivées sont :

$$\begin{aligned}
(u+v)' &= u' + v' \\
(\lambda u)' &= \lambda u' \\
(uv)' &= u'v + uv' \\
\left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u'v - uv'}{v^2}
\end{aligned}$$

<u>Démonstration</u>.

Il suffit de démontrer que pour tout $x_0 \in D$ ces fonctions sont dérivables en x_0.

On note donc x_0 un élément de D.

Suite de la démonstration.

(i) Pour tout $x \in D$:

$$\frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0}$$

Suite de la démonstration.

(i) Pour tout $x \in D$:

$$\frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0}$$

Suite de la démonstration.

(i) Pour tout $x \in D$:

$$\begin{aligned} & \frac{(u+v)(x)-(u+v)(x_0)}{x-x_0} \\ = & \frac{u(x)+v(x)-u(x_0)-v(x_0)}{x-x_0} \\ = & \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} \end{aligned}$$

Par passage à la limite :

$$(u+v)'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0) \qquad \square$$

Suite de la démonstration.

(ii) (Exercice) On démontre de même que la fonction λu est dérivable en x_0 et que $(\lambda u)'(x_0) = \lambda\, u'(x_0)$.

(iii) Cas du produit uv.

Suite de la démonstration.

(ii) (Exercice) On démontre de même que la fonction λu est dérivable en x_0 et que $(\lambda u)'(x_0) = \lambda\, u'(x_0)$.

(iii) Cas du produit uv.

(iv) Cas du quotient $\frac{u}{v}$: voir ci-dessous. $\square$

▷ Exercice 8.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 + 15 \qquad f_2(x) = \frac{x^2 + 3x - 5}{x}$$

$$f_3(x) = xe^x \qquad f_4(x) = \cos x \sin x$$

$$f_5(x) = \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} \qquad f_6(x) = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

Proposition

Soit $u : D \to \mathbb{R}$ et $v : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $u(D) \subseteq E$.

Si u et v sont dérivables, alors $v \circ u$ est dérivable et

Proposition

Soit $u : D \to \mathbb{R}$ et $v : E \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $u(D) \subseteq E$.

Si u et v sont dérivables, alors $v \circ u$ est dérivable et

$$\forall x \in D \qquad (v \circ u)'(x) = u'(x).(v' \circ u)(x)$$

Démonstration (idée).

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0}$$

Démonstration (idée).

$$\frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{v \circ u(x) - v \circ u(x_0)}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

Démonstration (idée).

$$\frac{v\circ u(x) - v\circ u(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \frac{v\circ u(x) - v\circ u(x_0)}{u(x) - u(x_0)} \cdot \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0}$$

$$\underset{x\to x_0}{\longrightarrow} v'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$$

Exemple 13

Dériver les fonctions suivantes.

$$f_1(x) = \cos(2x) \qquad f_2(x) = e^{-x}$$

$$f_3(x) = (4x-3)^5 \qquad f_4(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_5(x) = \ln(\sin x) \qquad f_6(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Remarque

$$
\begin{aligned}
(u(ax+b))' &= a\,u'(ax+b) \\
(e^u)' &= \\
(\ln u)' &= \\
\left(\frac{1}{u}\right)' &= \\
(\sqrt{u})' &= \\
(u^\alpha)' &=
\end{aligned}
$$

Remarque

$$(u(ax+b))' = a\,u'(ax+b)$$

$$(e^u)' = u'e^u$$

$$(\ln u)' =$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' =$$

$$(\sqrt{u})' =$$

$$(u^\alpha)' =$$

Remarque

$$
\begin{aligned}
(u(ax+b))' &= a\,u'(ax+b)\\
(e^u)' &= u'e^u\\
(\ln u)' &= \frac{u'}{u}\\
\left(\frac{1}{u}\right)' &=\\
(\sqrt{u})' &=\\
(u^\alpha)' &=
\end{aligned}
$$

Remarque

$$
\begin{aligned}
(u(ax+b))' &= a\,u'(ax+b) \\
(e^u)' &= u'e^u \\
(\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} \\
(\sqrt{u})' &= \\
(u^\alpha)' &=
\end{aligned}
$$

Remarque

$$\begin{aligned}
(u(ax+b))' &= a\,u'(ax+b) \\
(e^u)' &= u'e^u \\
(\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} \\
(\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(u^\alpha)' &=
\end{aligned}$$

Remarque

$$\begin{aligned}
(u(ax+b))' &= a\,u'(ax+b) \\
(e^u)' &= u'e^u \\
(\ln u)' &= \frac{u'}{u} \\
\left(\frac{1}{u}\right)' &= -\frac{u'}{u^2} \\
(\sqrt{u})' &= \frac{u'}{2\sqrt{u}} \\
(u^\alpha)' &= \alpha\,u'\,u^{\alpha-1}
\end{aligned}$$

Démonstration de la formule de dérivation de $\frac{u}{v}$.

Démonstration de la formule de dérivation de $\frac{u}{v}$.

$\square$

▷ Exercice 9.

Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

$$f_7(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) \qquad f_8(x) = \cos^2(3x)$$

$$f_9(x) = \ln((x+6)^2) \qquad f_{10}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$f_{11}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad f_{12} = \frac{1}{(x^2+3x-5)^2}$$

Exemple 14

Sur quels ensembles les fonctions suivantes sont-elles définies ? dérivables ?

$$f(x) = \sqrt{4 - x} \qquad\qquad g(x) = x\sqrt{|x|}$$

▷ Exercice 10.

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt{x - x^2}$$

Sur quel ensemble est-elle dérivable ? Quelle est sa dérivée ?

III. Dérivation

Définition

$$f^{(0)} = f$$

Définition

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= f' \end{aligned}$$

Définition

$$\begin{aligned} f^{(0)} &= f \\ f^{(1)} &= f' \\ f^{(2)} &= (f')' &= f'' \end{aligned}$$

Définition

$$
\begin{aligned}
f^{(0)} &= f \\
f^{(1)} &= f' \\
f^{(2)} &= (f')' &&= f'' \\
f^{(3)} &= (f'')' &&= f'''
\end{aligned}
$$

Définition

$$\begin{array}{rclcl}
f^{(0)} & = & f & & \\
f^{(1)} & = & f' & & \\
f^{(2)} & = & (f')' & = & f'' \\
f^{(3)} & = & (f'')' & = & f''' \\
 & \cdots & & & \\
f^{(n)} & = & (f^{(n-1)})' & &
\end{array}$$

$f^{(n)}$ est appelée dérivée n-ème de f

Définition

Les fonctions $f^{(n)}$, pour $n \in \mathbb{N}$, sont aussi appelées dérivées successives de f.

Exemple 15

Calcul des dérivées successives de

(i) $f(x) = e^x$

Exemple 15

Calcul des dérivées successives de

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 12x + 1$

Exemple 15

Calcul des dérivées successives de

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 12x + 1$

(iii) $f(x) = \cos x$

Exemple 15

Calcul des dérivées successives de

(i) $f(x) = e^x$

(ii) $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 12x + 1$

(iii) $f(x) = \cos x$

Toutes ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$

i.e., n-fois dérivables pour tout $n \in \mathbb{N}$

▷ Exercice 11.

Soit $f(x) = \ln(x)$.
Calculer f', f'', f''' puis trouver une formule pour $f^{(n)}$ $(n > 0)$ et la démontrer.

Définition

$f : D \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in D$

On dit que f est continue en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Définition

$f : D \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in D$

On dit que f est continue en x_0 si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

On dit que f est continue ou continue sur D si elle est continue en tout point de D.

Remarques

(i) Toutes les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition sauf la fonction partie entière.

Remarques

(i) Toutes les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition sauf la fonction partie entière.

(ii) Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont continues.

Remarques

(i) Toutes les fonctions usuelles du programme sont continues sur leur ensemble de définition sauf la fonction partie entière.

(ii) Les sommes, produits, quotients, composées de fonctions continues sont continues.

Proposition

$$f \text{ dérivable en } x_0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ continue en } x_0.$$

IV. Continuité

Théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur l'intervalle I

$(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$

Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Théorème des valeurs intermédiaires

f continue sur l'intervalle I

$(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$

Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Corollaire

f continue **et strictement monotone** sur $[a, b]$

Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe **un unique** $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démonstration du corollaire.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses.

Soit d compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme f est continue alors d'après le TVI il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démontrons que c est unique.

Démonstration du corollaire.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses.

Soit d compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Comme f est continue alors d'après le TVI il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Démontrons que c est unique.

Soit c et c' deux points tels que $f(c) = f(c') = d$.

Si $c < c'$ ou $c' < c$

alors $f(c) < f(c')$ ou $f(c') < f(c)$: contradiction.

Donc $c = c'$. $\square$

Définition

Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où n est un entier naturel,
et $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.

Définition

Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

où n est un entier naturel,

et $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.

Définition

Une fonction polynomiale est une fonction de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

où n est un entier naturel,
et $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels.
Si a_n est non-nul on dit que n est le degré de f.

Proposition

Les fonctions polynomiales sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Proposition

Les fonctions polynomiales sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Leurs limites en $\pm\infty$ sont celles de leurs termes de plus haut degré.

Remarque

- Les fonctions de degré 0 sont les fonctions constantes non-nulles.
- La fonction nulle est de degré $-\infty$.
- Les fonctions de degré au plus 1 :

$$x \mapsto ax + b$$

sont appelées fonctions affines.

Remarque

- Les fonctions de degré 0 sont les fonctions constantes non-nulles.
- La fonction nulle est de degré $-\infty$.
- Les fonctions de degré au plus 1 :

$$x \mapsto ax + b$$

sont appelées fonctions affines.

Exemple 16

Tracé de quelques courbes polynomiales.

Proposition

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

Proposition

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

Proposition

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire.

Elles sont dérivables, de dérivées :

$$\sin' = \cos \qquad \text{et} \qquad \cos' = -\sin$$

<u>Démonstration</u>.

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

Démonstration.

Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont 2π-périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos x \\ \sin(x+2\pi) &= \sin x \end{aligned}$$

$\cos$ est paire, $\sin$ est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} \cos(-x) &= \cos x \\ \sin(-x) &= -\sin x \end{aligned}$$

Démonstration.

Pour la dérivabilité on utilise :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1 \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

Démonstration.

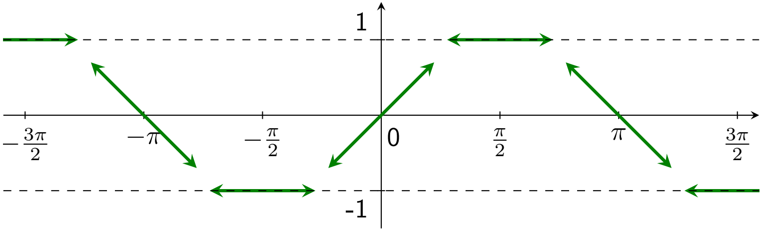
Pour la dérivabilité on utilise :

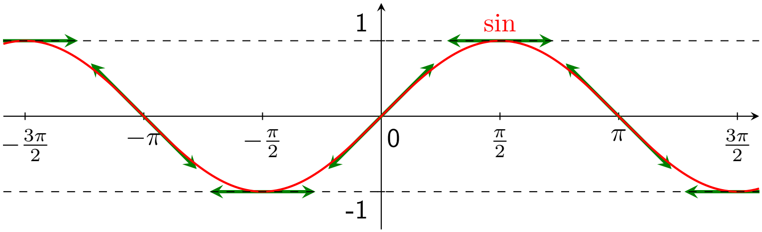
$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1 \qquad \lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}=0$$

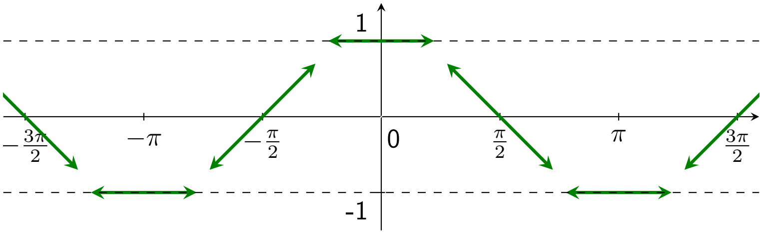
$\square$

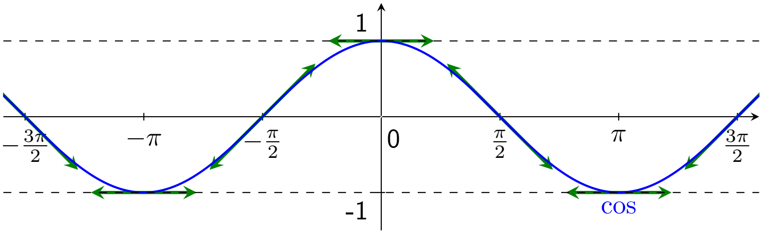
Tracé

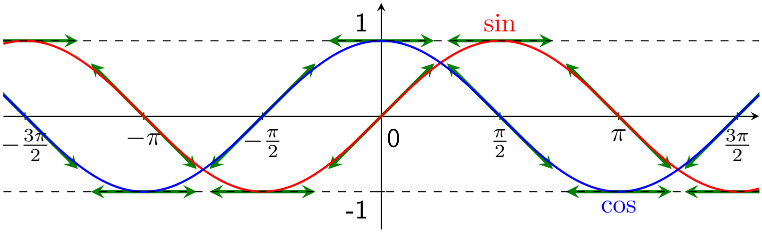
On peut restreindre l'étude à $[0, \pi]$.

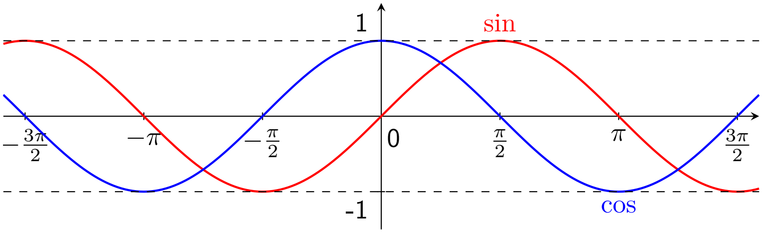

1
-1
0
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$


sin
1
-1
0
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$


1
-1
0
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$


1
-1
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
cos


1
sin
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
-1
cos


1
sin
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
-1
cos

▷ Exercice 12.

Justifier que la fonction $x \mapsto \cos^2 x$ est aussi une sinusoïde. Donner sa période et son amplitude. Tracer son graphe ainsi que celui de la fonction cosinus sur un même graphique.

Proposition

La fonction tangente est définie sur

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Proposition

La fonction tangente est définie sur

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Elle est π-périodique et impaire.

Proposition

La fonction tangente est définie sur

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Elle est π-périodique et impaire.

Elle est dérivable de dérivée

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Proposition

La fonction tangente est définie sur

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Elle est π-périodique et impaire.

Elle est dérivable de dérivée

$$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

Elle est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Démonstration.

La fonction $\tan$ est π-périodique :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \qquad \tan(x+\pi) = \tan x$$

La fonction $\tan$ est impaire :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

Démonstration.

La fonction $\tan$ est π-périodique :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \qquad \tan(x+\pi) = \tan x$$

La fonction $\tan$ est impaire :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \qquad \tan(-x) = -\tan x$$

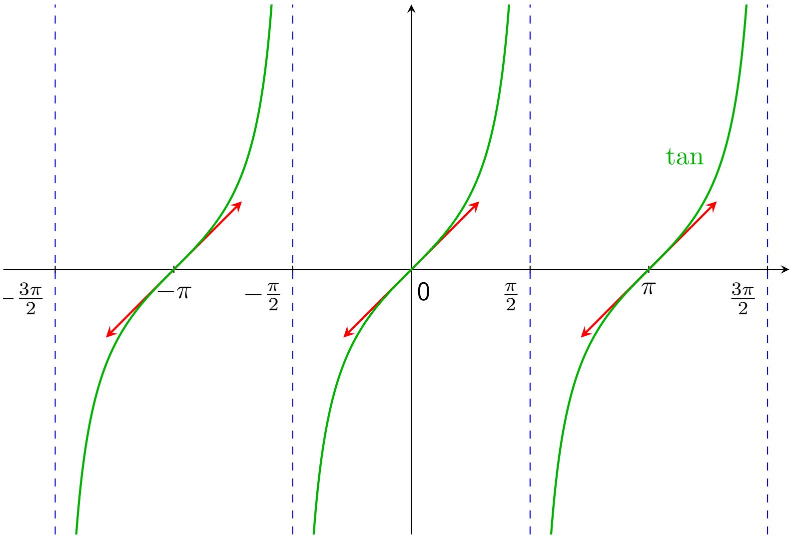
etc. $\square$

Proposition

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \tan x = -\infty$$

Tracé

On peut restreindre l'étude à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.


tan
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
0
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$

▷ Exercice 13.

On pose $g(x) = 1 + \tan^2 x$.

Déterminer l'ensemble de définition de g, puis démontrer qu'on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Déterminer ses variations et ses limites, tracer sa courbe sur le même graphique que sur celui de l'exercice précédent.

Proposition (Limites usuelles)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Proposition (Limites usuelles)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Démonstration.

Proposition (Limites usuelles)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

Démonstration.

$\square$

Définition

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{t} \end{array}$$

qui s'annule en 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Remarque

La fonction $\ln$ est dérivable et sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Remarque

$$\ln(1) = 0$$

Proposition

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Proposition

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Corollaire

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\forall (a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z} \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

Proposition

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration.

Proposition

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

Démonstration.

$\square$

Corollaire

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\forall (a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z} \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration.

Corollaire

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\forall b \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\forall (a,n) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{Z} \qquad \ln(a^n) = n \ln a$$

Démonstration.

$\square$

Proposition

$\ln$ est strictement croissante, de limites :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \ln x = -\infty$$

Proposition

$\ln$ est strictement croissante, de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

Démonstration.

Proposition

$\ln$ est strictement croissante, de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty$$

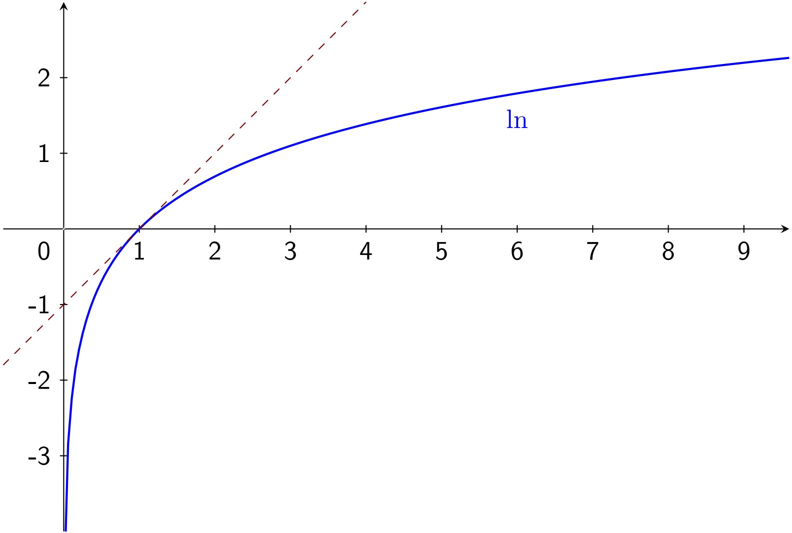
Démonstration.

$\square$

Tracé

Tangente à la courbe en 1 :

$$y = x - 1$$


2
1
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
ln

Proposition (Limites usuelles)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Proposition (Limites usuelles)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Démonstration.

Proposition (Limites usuelles)

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1$$

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 14.

Dériver et tracer la fonction $f : x \mapsto \ln|x|$

▷ Exercice 14.

Dériver et tracer la fonction $f : x \mapsto \ln|x|$

▷ Exercice 15.

Résoudre les équations suivantes.

a. $2\ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln(2x-1)$

b. $|\ln x| = \left|\ln\left(x + \frac{8}{3}\right)\right|$

Définition

Logarithme de base 10 :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

Remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

Remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

La fonction $\log$ est strictement croissante.

Remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log'(x) = \frac{1}{x \ln 10}$$

La fonction $\log$ est strictement croissante.

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \log(xy) = \log x + \log y$$

etc.

Proposition

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$$y = \log x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x =$$

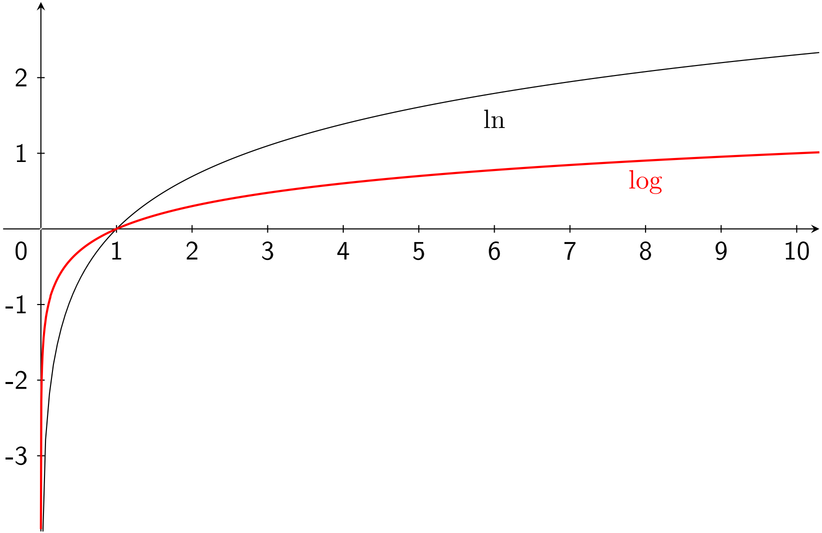
Proposition

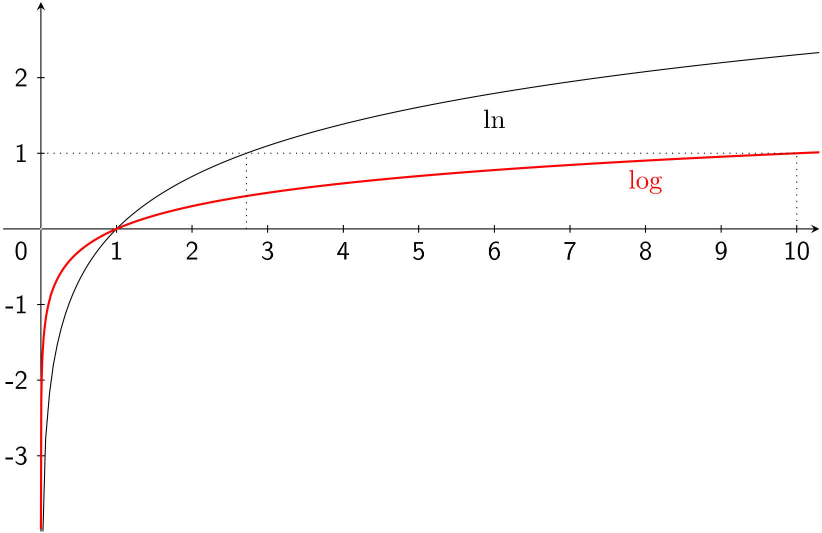
$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$$y = \log x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 10^y$$

Tracé

La dérivée en 1 est $\frac{1}{\ln 10} \simeq 0{,}43$.


ln
log
2
1
-1
-2
-3
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


2
1
0
-1
-2
-3
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
ln
log

Exemple 17

(i) $\log 10\,000 =$

Exemple 17

(i) $\log 10\,000 = 4$

(ii) $\log x = 28{,}54 \qquad \Longrightarrow$

Exemple 17

(i) $\log 10\,000 = 4$

(ii) $\log x = 28{,}54 \quad \Longrightarrow \quad 10^{28} < x < 10^{29}$

Remarque

Logarithme de base a $(a \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Remarque

Logarithme binaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \log_2(x) = \frac{\ln x}{\ln 2}$$

Remarque

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, de limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.
Donc tout réel $x \in \mathbb{R}$ admet un et un seul antécédent par cette fonction, noté $\exp(x)$.

Remarque

La fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, de limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. Donc tout réel $x \in \mathbb{R}$ admet un et un seul antécédent par cette fonction, noté $\exp(x)$.

Définition

On appelle exponentielle et on note $\exp$ la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

Définition

On appelle exponentielle et on note $\exp$ la fonction réciproque de la fonction $\ln$.

Remarque

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*$

$$y = \exp(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \ln y$$

Notation

On note e l'antécédent de 1 par la fonction $\ln$.

On note pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x = \exp(x)$$

Remarque

Le nombre e est irrationnel (et même transcendant).

$$e \simeq 2{,}718\,281\,828\,459\ldots$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = \qquad e^{x-y} = \qquad e^{-x} =$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Démonstration.

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$e^{x+y} = e^x e^y \qquad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \qquad e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Démonstration.

$\square$

Remarque

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0$$

Remarque

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0$$

La fonction exponentielle est strictement croissante.

Ses limites sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x =$$

Remarque

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0$$

La fonction exponentielle est strictement croissante.
Ses limites sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x =$$

Remarque

La fonction $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est strictement positive.

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x > 0$$

La fonction exponentielle est strictement croissante.
Ses limites sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Proposition

La fonction exponentielle est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$$

Proposition

La fonction exponentielle est dérivable et

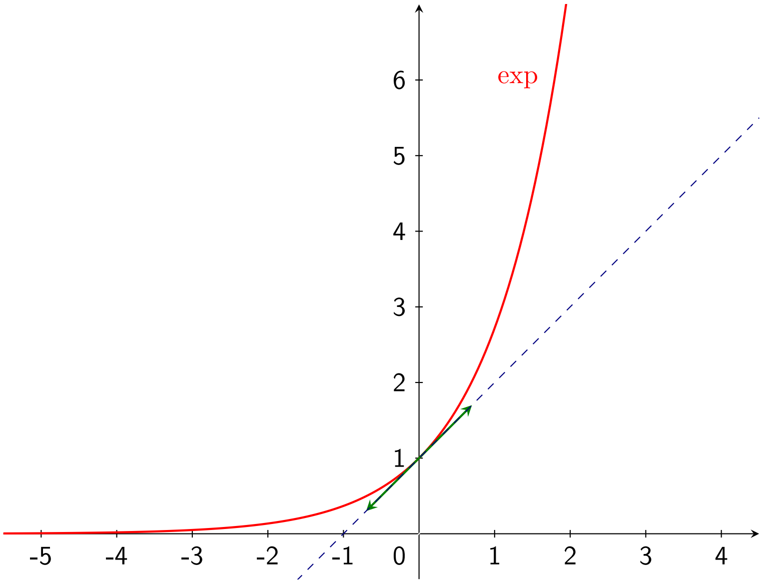
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{\mathrm{d}e^x}{\mathrm{d}x} = e^x$$

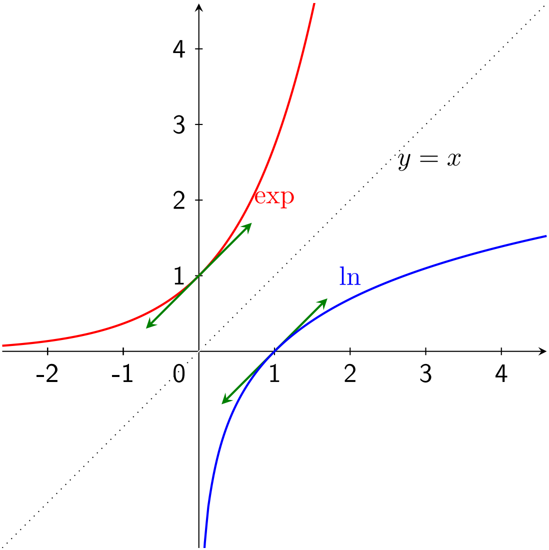
Démonstration. Admise. $\square$

Tracé

Tangente en 0 :

$$y = x + 1$$


exp
6
5
4
3
2
1
0
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4


4
3
2
1
0
-2
-1
1
2
3
4
$y = x$
exp
ln

Proposition (Limite usuelle)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Proposition (Limite usuelle)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Démonstration. Il s'agit de la limite du taux d'accroissement en 0. $\square$

Puissance α

Puissance α

Définition

$\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall b \in \mathbb{R}$

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Définition

Fonction puissance α (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{aligned}$$

Proposition

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$x^\alpha y^\alpha = \qquad\qquad x^\alpha x^\beta =$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \qquad\qquad (x^\alpha)^\beta =$$

Proposition

$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Proposition

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Démonstration.

Proposition

$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

$$x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha \qquad x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Démonstration.

$\square$

Proposition

La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Proposition

La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration.

Proposition

La fonction puissance α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

Démonstration.

$\square$

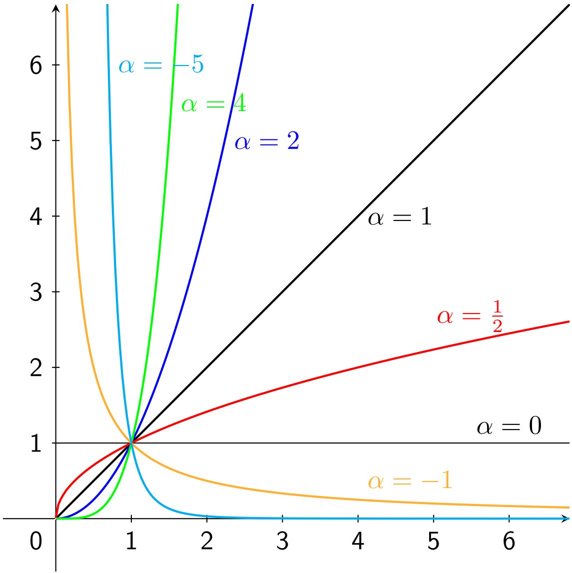
Corollaire

La fonction puissance α est

- strictement croissante si $\alpha > 0$
- strictement décroissante si $\alpha < 0$.

Tracés

Pour $\alpha \in \left\{-5, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 4\right\}$.


$\alpha = -5$
$\alpha = 4$
$\alpha = 2$
$\alpha = 1$
$\alpha = \frac{1}{2}$
$\alpha = 0$
$\alpha = -1$
0
1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5
6

Remarque

Si α est strictement positif, on prolonge la fonction à $\mathbb{R}_+$ en posant $0^\alpha = 0$.

Remarque

Si α est strictement positif, on prolonge la fonction à $\mathbb{R}_+$ en posant $0^\alpha = 0$.

Si α est entier positif on la prolonge à $\mathbb{R}$.

Remarque

Si α est strictement positif, on prolonge la fonction à $\mathbb{R}_+$ en posant $0^\alpha = 0$.

Si α est entier positif on la prolonge à $\mathbb{R}$.

Si α est entier négatif on la prolonge à $\mathbb{R}^*$.

▷ Exercice 16.

Résoudre les équations suivantes.

a. $4\left(\sqrt[6]{x^5}-\sqrt[6]{x}\right)=15\sqrt{x}$

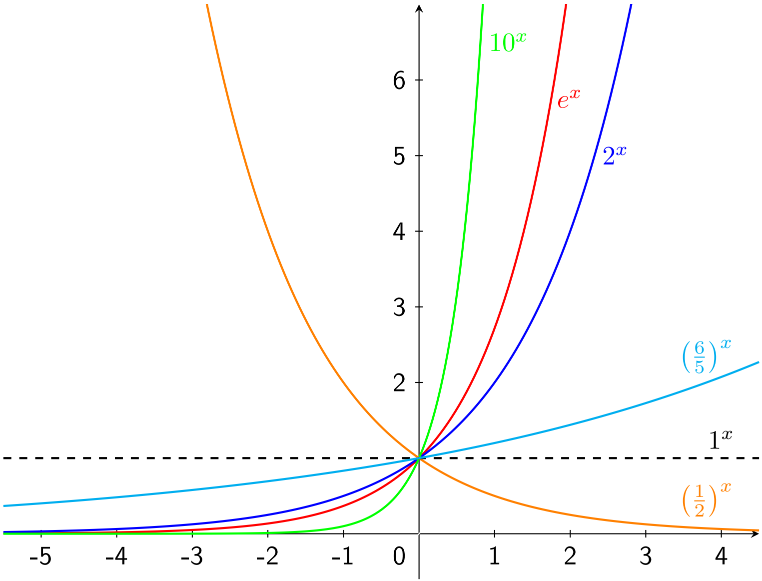
b. $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$

Remarque

Fonctions puissances : $x \mapsto x^\alpha$

Fonctions exponentielles de base a : $x \mapsto a^x$

définies sur $\mathbb{R}$.


10^x
e^x
2^x
$\left(\frac{6}{5}\right)^x$
1^x
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$
6
5
4
3
2
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

V. Fonctions classiques

Théorème (Croissances comparées)

$\forall \alpha > 0 \qquad \forall \beta > 0$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta \; = \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} \; =$$

$$\lim_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^x \; = \qquad\qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} \; =$$

Théorème (Croissances comparées)

$\forall \alpha > 0 \qquad \forall \beta > 0$

$$\lim_{x \to 0} x^\alpha |\ln x|^\beta = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$$

Remarque

En conséquence :

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} =$$

Remarque

En conséquence :

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Démonstration. Limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

Suite de la démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{\ln^{\beta} x}{x^{\alpha}} &= \left(\frac{\ln x}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta} \\
&= \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta} \\
&= \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}\left(\frac{\ln x^{\frac{\alpha}{\beta}}}{x^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^{\beta} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta}\left(\frac{\ln y}{y}\right)^{\beta}
\end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} x^\alpha \left|\ln x\right|^\beta &= \lim_{y\to+\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^\alpha \left|\ln \frac{1}{y}\right|^\beta \\ &= \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln^\beta y}{y^\alpha} = 0\end{aligned}$$

Suite de la démonstration. On pose $y = e^x$.

$$\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = \lim_{y \to 0} |\ln y|^\alpha y = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\ln^\alpha y} = +\infty \qquad \square$$

Exemple 18

Déterminer : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x}}}$$

V. **Fonctions classiques**

Plan d'une étude de fonction :

- Ensemble de définition (s'il n'est pas déjà donné).
- Réduction de l'ensemble d'étude grâce à la périodicité et à la parité.
- Continuité, dérivabilité, dérivée, signe de la dérivée, variations.
  Éventuellement tableau de variations.
- Limites aux bornes, étude des branches infinies (asymptotes éventuelles).
- Tracé.

Exemple 19

Étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{2x}{x+3}$$

Définition

- La droite d'équation $x = b$ est asymptote à la courbe si

$$\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$$

Définition

- La droite d'équation $x = b$ est asymptote à la courbe si
$$\lim_{x \to b} f(x) = \pm\infty$$

- La droite d'équation $y = a$ est asymptote à la courbe si
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$$

Définition

- La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe si

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Exemple 20

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \ln x \leqslant x - 1$$

▷ Exercice 17.

Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \sin x \leqslant x$$

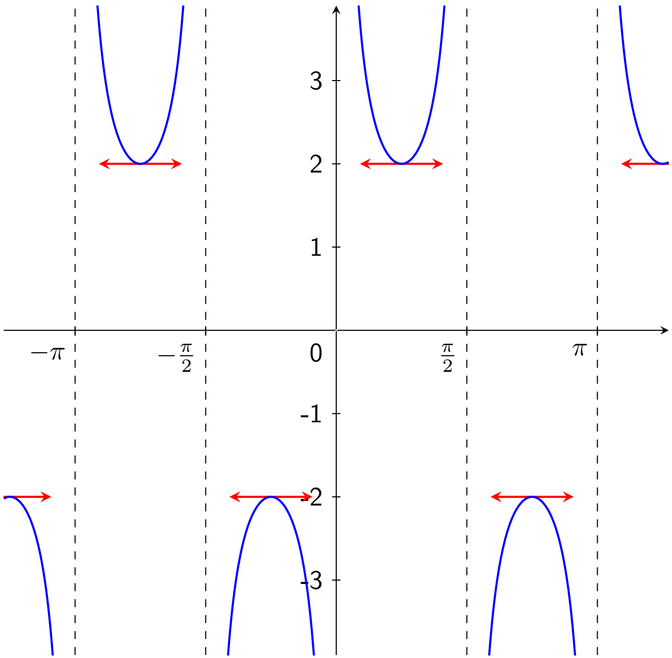
puis que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad x \leqslant \tan x$$

Exemple 21

$$f(x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$$

Justifier que l'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



3
2
1
0
-1
-2
-3
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π

▷ Exercice 18.

Étudier la fonction : $f(x) = \sqrt{2x^3 - x^4}$.

Prochain chapitre

Chapitre B1

Nombres complexes