Mathématiques

Chapitre A2
Calculs algébriques

MPSI – Lycée Bellevue – Toulouse

Année 2024-2025

I. Calculs sur les réels

Notations

- L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.

Notations

- L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

Notations

- L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$$

Notations

- L'ensemble des réels est noté $\mathbb{R}$.
- L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$$

- L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

Notation

Pour tout réel x on note :

$$x\mathbb{N} = \{xn \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad x\mathbb{Z} = \{xn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Notation

Pour tout réel x on note :

$$x\mathbb{N} = \{xn \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad x\mathbb{Z} = \{xn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples

(i) $2\mathbb{N}$ est l'ensemble de entiers naturels pairs.

Notation

Pour tout réel x on note :

$$x\mathbb{N} = \{xn \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad x\mathbb{Z} = \{xn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples

(i) $2\mathbb{N}$ est l'ensemble de entiers naturels pairs.

(ii) $3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 3.

Notation

Pour tout réel x on note :

$$x\mathbb{N} = \{xn \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad x\mathbb{Z} = \{xn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples

(i) $2\mathbb{N}$ est l'ensemble de entiers naturels pairs.

(ii) $3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 3.

(iii) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$

Notation

Pour tout réel x on note :

$$x\mathbb{N} = \{xn \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad x\mathbb{Z} = \{xn \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

Exemples

(i) $2\mathbb{N}$ est l'ensemble de entiers naturels pairs.

(ii) $3\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 3.

(iii) $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$

(iv) La cotangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Définition

L'ensemble des nombres rationnels est :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Proposition

Soit $r \in \mathbb{Q}$ un rationnel. Alors :

$$\exists!(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \qquad r = \frac{p}{q} \quad \text{et} \quad p \wedge q = 1$$

Cette écriture est la forme irréductible de r.

Remarque

Le développement d'un nombre rationnel non décimal en base quelconque présente une ration.

Exemple 1

Développement décimal de : $\frac{2}{3}$ $\frac{25}{9}$ $\frac{4}{11}$ $\frac{2}{7}$

Définition

Soit i un nombre vérifiant $i^2 = -1$. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres $x + iy$ où x et y sont deux réels :

$$\mathbb{C} = \left\{ x + iy \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Ces nombres sont appelés nombres complexes.

Exemple 2

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$$

Notations

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Notations

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} \qquad \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[\qquad \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$$

$$\mathbb{R}_- =]-\infty, 0] \qquad \mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$$

Rappel

Deux définitions équivalentes de la valeur absolue :

Rappel

Deux définitions équivalentes de la valeur absolue :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappel

Deux définitions équivalentes de la valeur absolue :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad |x| = \sqrt{x^2}$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$|x| \geqslant 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$|x| \geqslant 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

$$|xy| = |x||y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Proposition

Pour tous réels x et y :

$$|x| \geqslant 0 \qquad |-x| = |x| \qquad |x|^2 = x^2$$

$$|xy| = |x||y| \qquad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$\begin{aligned} |x| = |y| \quad &\Longleftrightarrow \quad x = y \quad \text{ou} \quad x = -y \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 = y^2 \end{aligned}$$

Proposition (Inégalités triangulaires)

Pour tous réels x et y :

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$$

Proposition (Inégalités triangulaires)

Pour tous réels x et y :

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Proposition (Inégalités triangulaires)

Pour tous réels x et y :

$$\left||x|-|y|\right| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$$

L'égalité dans l'inégalité de droite a lieu si et seulement si x et y sont de même signe.
L'égalité dans l'inégalité de gauche a lieu si et seulement si x et y sont de signes opposés.

Proposition (Inégalités triangulaires)

Pour tous réels x et y :

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

L'égalité dans l'inégalité de droite a lieu si et seulement si x et y sont de même signe.
L'égalité dans l'inégalité de gauche a lieu si et seulement si x et y sont de signes opposés.

En remplaçant y par $-y$:

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| \leqslant |x| + |y|$$

Proposition

Soit a un réel strictement positif. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} |x| \leqslant a \quad \Longleftrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Proposition

Soit a un réel strictement positif. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} |x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \\ |x| \geqslant a \iff \end{cases}$$

Proposition

Soit a un réel strictement positif. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} |x| \leqslant a & \iff \quad -a \leqslant x \leqslant a \\ \\ |x| \geqslant a & \iff \quad x \geqslant a \quad \text{ou} \quad x \leqslant -a \end{cases}$$

Proposition

Soit a un réel strictement positif. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} |x| \leqslant a \iff -a \leqslant x \leqslant a \\ |x| \geqslant a \iff x \geqslant a \quad \text{ou} \quad x \leqslant -a \end{cases}$$

Remarque

De plus : $\quad |x| \leqslant a \iff x^2 \leqslant a^2$

Proposition

Pour tous réels a et b, b étant positif :

$$|x - a| \leqslant b \quad \Longleftrightarrow$$

Proposition

Pour tous réels a et b, b étant positif :

$$|x-a| \leqslant b \iff a-b \leqslant x \leqslant a+b$$

$$\iff$$

Proposition

Pour tous réels a et b, b étant positif :

$$\begin{aligned} |x-a| \leqslant b &\iff a-b \leqslant x \leqslant a+b \\ &\iff x \in [a-b, a+b] \end{aligned}$$

▷ Exercice 1.

Résoudre les équations :

a. $|2x - 1| = |x + 4|$

b. $|3x| \leqslant |2x + 3|$

Proposition

Soit x un réel. Alors :

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leqslant \varepsilon\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

Proposition

Soit x un réel. Alors :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leqslant \varepsilon) \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0$$

Démonstration.

Le sens indirect est évident.

Proposition

Soit x un réel. Alors :

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leqslant \varepsilon\right) \iff x = 0$$

Démonstration.

Le sens indirect est évident.

Le sens direct se démontre par l'absurde.

Proposition

Soit x un réel. Alors :

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad |x| \leqslant \varepsilon) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0$$

<u>Démonstration</u>.

Le sens indirect est évident.

Le sens direct se démontre par l'absurde. $\square$

Définition

La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.

Définition

La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.

On note $y = \sqrt{x}$.

Définition

La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.

On note $y = \sqrt{x}$.

Définition

La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.

On note $y = \sqrt{x}$.

Remarques

- La racine carrée d'un réel non positif n'est pas définie.

Définition

La racine carrée d'un réel positif x est l'unique réel positif y tel que $y^2 = x$.

On note $y = \sqrt{x}$.

Remarques

- La racine carrée d'un réel non positif n'est pas définie.
- La racine carré d'un réel positif est toujours positive.

Proposition

Pour tous réel positifs x et y :

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$$

Remarque

Attention :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \sqrt{x}^2 =$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{x^2} =$$

Remarque

Attention :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \sqrt{x}^2 = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{x^2} =$$

Remarque

Attention :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \qquad \sqrt{x}^2 = x$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sqrt{x^2} = |x|$$

▷ Exercice 2.

Résoudre les équations et inéquations suivantes.

a. $\sqrt{x-1} \leqslant \sqrt{2x-5}$

b. $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-1} = 0$

c. $\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-1} = 0$

d. $x - 3\sqrt{x} - 10 = 0$

e. $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 5$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Exemples

$$x^0 = \qquad x^1 = \qquad x^{-1} =$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Exemples

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = \qquad x^{-1} =$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Exemples

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^{-1} =$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n}$$

Pour tout $x \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ on note :

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Exemples

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Proposition

Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n, sous réserve d'existence :

$$x^m x^n = \qquad (x^m)^n = \qquad (xy)^n =$$

Proposition

Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n, sous réserve d'existence :

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = \qquad\qquad (xy)^n =$$

Proposition

Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n, sous réserve d'existence :

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = x^{mn} \qquad (xy)^n =$$

Proposition

Pour tous complexes x et y et tous entiers m et n, sous réserve d'existence :

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad (x^m)^n = x^{mn} \quad (xy)^n = x^n y^n$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ la racine n-ème de x, c'est-à-dire l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ la racine n-ème de x, c'est-à-dire l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Exemple

$$x^{\frac{1}{2}} =$$

Définition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on note $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ la racine n-ème de x, c'est-à-dire l'unique réel positif y tel que $y^n = x$.

Exemple

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Remarques

(i) La définition ci-dessus est valable pour tout réel positif x. Mais dans le cas où n est un entier positif impair alors la racine n-ème d'un réel négatif x est définie, c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$.

Remarques

(i) La définition ci-dessus est valable pour tout réel positif x. Mais dans le cas où n est un entier positif impair alors la racine n-ème d'un réel négatif x est définie, c'est l'unique réel y tel que $y^n = x$.

(ii) Si x est un réel strictement positif alors on peut définir, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*)$:
$x^{\frac{p}{q}} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = \qquad 27^{\frac{4}{3}} =$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \qquad 100^{\frac{5}{2}} =$$

$$5^{-2} = \qquad 4^{\frac{7}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \qquad 1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4 \qquad 27^{\frac{4}{3}} =$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \qquad 100^{\frac{5}{2}} =$$

$$5^{-2} = \qquad 4^{\frac{7}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \qquad 1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4 \qquad 27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \qquad 100^{\frac{5}{2}} =$$

$$5^{-2} = \qquad 4^{\frac{7}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \qquad 1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4 \qquad 27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 100^{\frac{5}{2}} =$$

$$5^{-2} = \qquad 4^{\frac{7}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \qquad 1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4 \qquad 27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$5^{-2} = \qquad 4^{\frac{7}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \qquad 1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4 \qquad 27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} \qquad 4^{\frac{7}{2}} =$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \qquad 1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$9^{\frac{1}{3}} =$$

$$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$8^{-\frac{2}{3}} =$$

$$1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} =$$

$$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} =$$

$$27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} =$$

$$1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} =$$

$$1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} =$$

$$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$1^{-\frac{5}{6}} =$$

$$64^{\frac{1}{6}} =$$

$$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4 \qquad 27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad 100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25} \qquad 4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9} \qquad (-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4} \qquad 1^{-\frac{5}{6}} = 1$$

$$64^{\frac{1}{6}} = \qquad \sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$64^{\frac{1}{6}} = 2$$

$$27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$1^{-\frac{5}{6}} = 1$$

$$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} =$$

Exemples

$$16^{\frac{1}{2}} = 4$$

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5^{-2} = \frac{1}{25}$$

$$9^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}$$

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$$

$$64^{\frac{1}{6}} = 2$$

$$27^{\frac{4}{3}} = 81$$

$$100^{\frac{5}{2}} = 100\,000$$

$$4^{\frac{7}{2}} = 128$$

$$(-3\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = -\sqrt{3}$$

$$1^{-\frac{5}{6}} = 1$$

$$\sqrt{7}^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$$

II. Sommes et produits

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Notation

Étant donnés des nombres a_1, $a_2, \ldots, a_n$ on note :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Notation

Étant donnés des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on note :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \ldots a_n$$

Soit n un entier naturel : $n \in \mathbb{N}$

Notation

En posant $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ on note également :

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \prod_{i \in I} a_i = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{i=6}^{11} a_i =$$

Exemple

$$\sum_{i=1}^{5} a_i + \sum_{i=6}^{11} a_i = \sum_{i=1}^{11} a_i$$

Remarque

On dit que i est une variable muette :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Remarque

On dit que i est une variable muette :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Remarque

On dit que i est une variable muette :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ce n'est pas le cas de n !

On peut noter : $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Notation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Exemple

Compléter :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = S_{n-1} +$$

Notation

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Exemple

Compléter :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad S_n = S_{n-1} + a_n$$

Exemple 3

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{k^2}{k+1}$

Exemple 3

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{k^2}{k+1} = \frac{49}{12}$

Exemple 4

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k$

Exemple 4

Calculer : $\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k$

Proposition (somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exemple 4

Calculer : $\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k$

Proposition (somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

Exemple 4

Calculer : $\sum_{k=1}^{1} k \qquad \sum_{k=1}^{2} k \qquad \sum_{k=1}^{3} k \qquad \sum_{k=1}^{4} k$

Proposition (somme des premiers entiers)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

$\square$

Proposition (somme des premiers carrés, des premiers cubes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 =$

Proposition (somme des premiers carrés, des premiers cubes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 =$$

Proposition (somme des premiers carrés, des premiers cubes)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

▷ Exercice 3.

Démontrer par récurrence la propriété :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pour l'hérédité on démontrera $\mathcal{P}_{n-1} \Longrightarrow \mathcal{P}_n$.

On peut aussi démontrer l'autre formule de la même façon.

▷ Exercice 4.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

a. Calculer S_1, S_2, S_3, S_4.

b. Énoncer une conjecture pour une expression générale de S_n sans signe somme, et la démontrer.

Remarque (somme vide, produit vide)

Par convention si $m > n$ alors :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

Remarque (somme vide, produit vide)

Par convention si $m > n$ alors :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{0} a_k = 0 \qquad\qquad \prod_{k=1}^{0} a_k = 1$$

Remarque (somme vide, produit vide)

Par convention si $m > n$ alors :

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{et} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{0} a_k = 0 \qquad\qquad \prod_{k=1}^{0} a_k = 1$$

Ceci est cohérent avec la formule

$$\sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

dans le cas où $m = 0$.

Remarque (Autres notations)

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 9\\ k\ \text{pair}}} a_k =$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} a_i \quad =$$

Remarque (Autres notations)

$$\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant 9 \\ k \text{ pair}}} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} a_i =$$

Remarque (Autres notations)

$$\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant 9\\ k \text{ pair}}} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + a_8$$

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} a_i = a_0 + \cdots + a_{j-1} + a_{j+1} + \cdots + a_n$$

II. Sommes et produits

Notation

On note $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Notation

On note $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Proposition (linéarité)

Pour toutes familles de nombres $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= a_1+b_1+\cdots+a_n+b_n \\
&= a_1+\cdots+a_n+b_1+\cdots+b_n \\
&= \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k &= \lambda a_1+\cdots+\lambda a_n \\
&= \lambda(a_1+\cdots+a_n) \\
&= \lambda\sum_{k=1}^{n}a_k
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition

Avec les mêmes notations :

$$\prod_{k=1}^{n} (a_k b_k) =$$

Proposition

Avec les mêmes notations :

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$$

$$\text{et} \qquad \prod_{k=1}^{n} \lambda a_k \quad =$$

Proposition

Avec les mêmes notations :

$$\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \prod_{k=1}^{n} a_k \prod_{k=1}^{n} b_k$$

$$\text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \lambda a_k = \lambda^n \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Remarque

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = \qquad \prod_{k=1}^{n} 4 =$$

Remarque

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = \qquad \prod_{k=1}^{n} 4 =$$

Remarque

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = 6n \qquad \prod_{k=1}^{n} 4 =$$

Remarque

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = 6n \qquad \prod_{k=1}^{n} 4 = 4^n$$

Remarque

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{k=1}^{n} 6 = 6n \qquad \prod_{k=1}^{n} 4 = 4^n$$

Exemple 5

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} (6k-5)$

Exemple 6 (Changement d'indice)

Calculer $\displaystyle\sum_{k=9}^{29} k$ de deux manières différentes :

a. En complétant : $\displaystyle\sum_{k=9}^{29} k = \sum_{k=1}^{29} k - \sum_{k=*}^{*} k = \cdots$

b. Grâce au changement d'indice $\ell = k - 8$.

▷ Exercice 5.

Calculer $\sum_{k=0}^{19} (k+1)^2$

- par linéarité,
- puis en posant $\ell = k + 1$.

Exemple 7

Calculer de deux façons différentes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

- par changement d'indice,
- en simplifiant $k^2 - (k-1)^2$.

Exemple 7

Calculer de deux façons différentes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

- par changement d'indice,
- en simplifiant $k^2 - (k-1)^2$.

Remarque (Sommes télescopiques)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = \qquad\qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} =$$

Exemple 7

Calculer de deux façons différentes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

- par changement d'indice,
- en simplifiant $k^2 - (k-1)^2$.

Remarque (Sommes télescopiques)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} =$$

Exemple 7

Calculer de deux façons différentes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

- par changement d'indice,
- en simplifiant $k^2 - (k-1)^2$.

Remarque (Sommes télescopiques)

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0 \qquad \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{a_n}{a_0}$$

▷ Exercice 6.

Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. En déduire une autre démonstration du résultat de l'exercice 4.

▷ Exercice 7.

Exprimer $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$ sans signe somme.

On rappelle que $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

II. Sommes et produits

Rappel

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un complexe r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Ce complexe r est appelé raison de la suite (u_n).

Rappel

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un complexe r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n + r$$

Ce complexe r est appelé raison de la suite (u_n).
Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 + nr$$

Proposition (somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$

Proposition (somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$
$$= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

Proposition (somme des termes d'une suite arithmétique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\tfrac{u_0+u_n}{2}$$
$$= (n+1)u_0 + r\tfrac{n(n+1)}{2}$$

Plus généralement :

$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = (n-m+1)\frac{u_m+u_n}{2}$$

Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$
$$= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

Proposition

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$$
$$= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration.

$\square$

Rappel

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un complexe q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

Ce complexe q est appelé raison de la suite (u_n).

Rappel

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe un complexe q tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = qu_n$$

Ce complexe q est appelé raison de la suite (u_n).
Si la suite (u_n) est géométrique de raison q alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0q^n$$

Proposition (somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition (somme des termes d'une suite géométrique)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} \dfrac{u_0 - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n+1)u_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Plus généralement :

$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \dfrac{u_m - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-m+1)u_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition

$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \dfrac{u_m - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-m+1)u_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

Proposition

$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \begin{cases} \dfrac{u_m - u_{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ (n-m+1)u_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration.

$\square$

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n =$$

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1})$$

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \end{aligned}$$

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \end{aligned}$$

Exemple 8

Vérification pour n allant de 0 à 4.

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \end{aligned}$$

Démonstration.

Corollaire

Pour tous complexes a et b, et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-1}) \\ &= (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k \end{aligned}$$

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 8.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et donner sa dérivée.

II. Sommes et produits

Exemple 9 (sommes rectangulaires)

Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}ij$

Exemple 9 (sommes rectangulaires)

Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}ij$

Exemple 10 (sommes triangulaires)

Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}j$

Exemple 9 (sommes rectangulaires)

Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(i+j)$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}ij$

Exemple 10 (sommes triangulaires)

Calculer : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j$ et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n}j$

On remarque que ces deux sommes sont égales.

Notation

On considère une famille (a_{ij}) de réels indexée par deux familles. On note :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Notation

On considère une famille (a_{ij}) de réels indexée par deux familles. On note :

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}$$

▷ Exercice 9.

Calculer : $$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

et on appelle factorielle de n cet entier.

Définition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

et on appelle factorielle de n cet entier.

Exemple

Les premières factorielles.

Exemple 11

Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = \qquad \frac{11!}{12!} =$$

$$\frac{100!}{98!} = \qquad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Exemple 11

Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = 10 \qquad \frac{11!}{12!} =$$

$$\frac{100!}{98!} = \qquad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Exemple 11

Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = 10 \qquad \frac{11!}{12!} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{100!}{98!} = \qquad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Exemple 11

Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = 10 \qquad \frac{11!}{12!} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{100!}{98!} = 9900 \qquad \frac{10!}{(5!)^2} =$$

Exemple 11

Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = 10 \qquad \frac{11!}{12!} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{100!}{98!} = 9900 \qquad \frac{10!}{(5!)^2} = 252$$

Exemple 11

Simplifier :

$$\frac{10!}{9!} = 10 \qquad \frac{11!}{12!} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{100!}{98!} = 9900 \qquad \frac{10!}{(5!)^2} = 252$$

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad (n+1)! = (n+1)\, n!$

▷ Exercice 10.

Écrire à l'aide de factorielles et de puissances :

$$A = 10 \times 11 \times \cdots \times 30$$

$$B = 3 \times 6 \times 9 \times \cdots \times 30$$

$$C = 10 \times 12 \times 14 \times \cdots \times 30$$

$$D = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 29$$

Définition

Soit n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. On note :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Définition

Soit n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. On note :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si $k < 0$ ou $k > n$ alors on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Définition

Soit n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. On note :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si $k < 0$ ou $k > n$ alors on pose $\binom{n}{k} = 0$.

Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.
$\binom{n}{k}$ se lit «k parmi n».

Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples

Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = \qquad \binom{n}{n} = \qquad \binom{n}{1} =$$

$$\binom{n}{2} =$$

Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples

Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = \qquad \binom{n}{1} =$$

$$\binom{n}{2} =$$

Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples

Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} =$$

$$\binom{n}{2} =$$

Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples

Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} =$$

Définition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Exemples

Valeurs remarquables :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

Proposition (Symétrie)

Pour tous entiers n et k :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Proposition (Symétrie)

Pour tous entiers n et k :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration.

Proposition (Symétrie)

Pour tous entiers n et k :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Démonstration.

$\square$

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration.

Si $k < 0$ ou $k > n$ la formule est immédiate :

$$0 + 0 = 0$$

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration.

Si $k = 0$ alors la formule donne :

$$0 + 1 = 1$$

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration.

Si $k = n$ alors elle donne :

$$1 + 0 = 1$$

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration.

Supposons maintenant que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Proposition (Formule de Pascal)

Pour tous entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et k :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Démonstration.

Supposons maintenant que $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

$\square$

Définition

Le triangle de Pascal permet de calculer les premiers coefficients binomiaux.

Z	1	2	3	4	5	6	7	L 8	9	10
1	G 1	σ 1	π 1	λ 1	μ 1	δ 1	ζ 1	1	1	1
2	φ 1	ψ 2	θ 3	R 4	S 5	N 6	7	8	9	
3	A 1	B 3	C 6	ω 10	ξ 15	21	28	36		
4	D 1	E 4	F 10	ρ 20	Y 35	56	84			
5	H 1	M 5	K 15	35	70	126				
6	P 1	Q 6	21	56	126					
7	V 1	7	28	84						
T 8	1	8	36							
9	1	9								
10	1									

Rangs paralleles

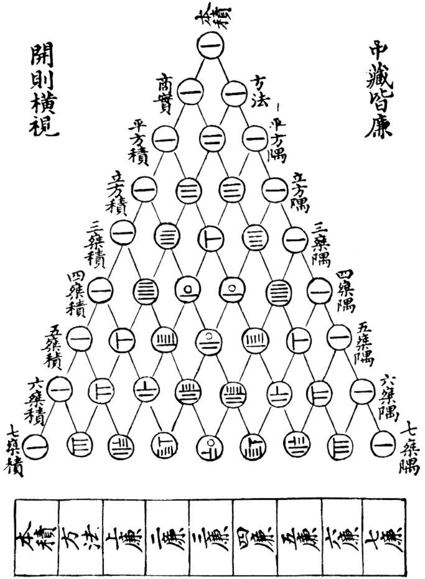
Triangle Arithmetique

Rangs perpendiculaires

古法七乘方圖

中藏皆廉

開則橫視



Proposition

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Proposition

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

Démonstration.

Proposition

Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est un entier naturel.

<u>Démonstration</u>.

$\square$

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux complexes. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 12

Pour $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ et même 0.

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux complexes. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 12

Pour $n = 1, 2, 3, 4\ldots$ et même 0.

Remarque

Pour $(a-b)^n$ on alterne les signes.

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux complexes. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 12

Pour $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ et même 0.

Remarque

Pour $(a-b)^n$ on alterne les signes.

Démonstration.

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soit $n \in \mathbb{N}$, a et b deux complexes. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 12

Pour $n = 1, 2, 3, 4\ldots$ et même 0.

Remarque

Pour $(a-b)^n$ on alterne les signes.

<u>Démonstration</u>. $\square$

Exemple 13

Calculer $10{,}2^5$.

Exemple 13

Calculer $10{,}2^5$.

▷ Exercice 11.

Calculer

- $2{,}1^4$ en utilisant l'égalité $2{,}1 = 2 + 0{,}1$
- 99^3 en utilisant l'égalité $99 = 100 - 1$.

Proposition (somme des lignes du triangle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} =$$

Proposition (somme des lignes du triangle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Proposition (somme des lignes du triangle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration.

Proposition (somme des lignes du triangle)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Démonstration.

$\square$

▷ Exercice 12.

Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-2)^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \binom{10}{k} 2^k$.

Système linéaire de 2 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} 6x + 5y = 8 \\ 7x + 6y = 14 \end{cases}$$

Système linéaire de 3 équations à 3 inconnues

$$\begin{cases} 3x - 5y + 4z = 7 \\ 4x + y - 9z = 1 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

Système linéaire de 3 équations à 2 inconnues

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + 3y = 1 \\ x - 5y = -5 \\ 3x + 7y = 12 \end{cases}$$

Système linéaire de 2 équations à 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 4 \\ 2x - 3y - 4z = 7 \end{array}\right.$$

Système linéaire de 5 équations à 4 inconnues

$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 3t = 0 \\ 2x - y + z - 5t = 2 \\ -x - 2y + 9z + 9t = 2 \\ 6x - 8y + t = 6 \\ 2x + 3y + 2z + 3t = 6 \end{cases}$$

Système linéaire de 5 équations à 4 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 3x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 5x_4 & = & 2 \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & 9x_3 & + & 9x_4 & = & 2 \\ 6x_1 & - & 8x_2 & & & + & x_4 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 6 \end{array}\right.$$

Système linéaire de 4 équations à 6 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr}
3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & - & 5x_5 & + & 2x_6 & = & 18 \\
x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & - & x_5 & + & 4x_6 & = & 0 \\
7x_1 & + & 4x_2 & - & 8x_3 & + & 2x_4 & - & 2x_5 & - & 10x_6 & = & -7 \\
-2x_1 & - & 5x_2 & + & 6x_3 & + & 4x_4 & + & 2x_5 & & & = & 1
\end{array}\right.$$

Système linéaire de n équations à p inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n
\end{array}\right.$$

Colin Maclaurin (Écosse) 1698 – 1746

Gabriel Cramer (Suisse) 1704 – 1752

Carl Friedrich Gauß (Allemagne) 1777 – 1855

Wilhelm Jordan (Allemagne) 1842 – 1899

n et p entiers naturels non-nuls

Définition

Système linéaire de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Définition

Système linéaire de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\; \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

x_j : inconnues

Définition

Système linéaire de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

x_j : inconnues $\qquad$ a_{ij} : coefficients

Définition

Système linéaire de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

x_j : inconnues $\qquad$ a_{ij} : coefficients

b_i : second membre

Définition

Système linéaire de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & \quad L_1 \\ \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & \quad L_n \end{cases}$$

x_j : inconnues $\qquad$ a_{ij} : coefficients

b_i : second membre $\qquad$ L_i : lignes.

Définition

Système linéaire de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 & L_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n & L_n \end{cases}$$

x_j : inconnues $\qquad$ a_{ij} : coefficients

b_i : second membre $\qquad$ L_i : lignes.

Exemple 14 *(i)*

$$S_1 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$S_3 : \begin{cases} 3x - y = 2 \\ 6x - 2y = 4 \end{cases}$$

Exemple 14 *(ii)*

$$S_4 : \begin{cases} 4x + 2y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Exemple 14 *(iii)* Cas extrêmes

$$S_5 : 2x = -5$$

Exemple 14 *(iii)* Cas extrêmes

$$S_5 : 2x = -5$$

$$S_6 : 3x + 2y = 11$$

Exemple 14 *(iii)* Cas extrêmes

$$S_5 : 2x = -5$$

$$S_6 : 3x + 2y = 11$$

$$S_7 : \begin{cases} 2x = 2 \\ 5x = 7 \end{cases}$$

Définition

Solution de S :

$$p\text{-uplet} \quad x = (x_1, \ldots, x_p)$$

satisfaisant toutes les lignes du système.

Définition

Solution de S :

$$p\text{-uplet} \quad x = (x_1, \dots, x_p)$$

satisfaisant toutes les lignes du système.

Résolution d'un système :

Déterminer toutes ses solutions.

Théorème

Un système linéaire admet :

- une infinité de solution
- ou une solution unique
- ou aucune solution.

Définitions

Opérations élémentaires :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ ajout à la ligne i
de la ligne j multipliée par α
$(i \neq j,\ \alpha \in \mathbb{R})$

Définitions

Opérations élémentaires :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α $(i \neq j,\ \alpha \in \mathbb{R})$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ multiplication de la ligne i par λ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$

Définitions

Opérations élémentaires :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ ajout à la ligne i de la ligne j multipliée par α $(i \neq j,\ \alpha \in \mathbb{R})$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ multiplication de la ligne i par λ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ interversion des lignes i et j

Proposition

Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ inverse :

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ inverse :

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ inverse :

Proposition

Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ inverse : $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ inverse :

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ inverse :

Proposition

Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ inverse : $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ inverse : $(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i)$

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ inverse :

Proposition

Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ inverse : $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ inverse : $(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i)$

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ inverse : $(L_i \leftrightarrow L_j)$

Proposition

Toute opération élémentaire est inversible :

$(L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j)$ inverse : $(L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j)$

$(L_i \leftarrow \lambda L_i)$ inverse : $(L_i \leftarrow \frac{1}{\lambda} L_i)$

$(L_i \leftrightarrow L_j)$ inverse : $(L_i \leftrightarrow L_j)$

Ainsi on ne change pas les solutions d'un système linéaire en lui appliquant des opérations élémentaires.

Exemple 15

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ \quad x + 3y = 5 \end{cases}$$

Exemple 15

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x + 7y = 9 \end{cases}$$

Exemple 15

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x + 7y = 9 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ \quad - 2y = -6 \end{cases}$$

Exemple 15

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x + 7y = 9 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2y = -6 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 3 \end{cases}$$

Exemple 15

$$S_8 : \begin{cases} 3x + 7y = 9 \\ x + 3y = 5 \end{cases} \qquad (L_1 \leftrightarrow L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 3x + 7y = 9 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ - 2y = -6 \end{cases} \qquad (L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{2}L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x + 3y = 5 \\ y = 3 \end{cases} \qquad (L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2)$$

$$\sim \begin{cases} x = -4 \\ y = 3 \end{cases}$$

Exemple 15 (suite)

$$S_9 : \begin{cases} 2x + 4y - 2z = 6 \\ 3x + 7y \phantom{{}-2z} = 7 \\ 2x + 6y + 5z = 0 \end{cases}$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$1. \begin{cases} \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \\ \bullet x + \bullet y + \bullet z = \bullet \end{cases}$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$1. \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ \bullet\, x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ \bullet\, x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \end{array} \right.$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$2.\ \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \end{array}\right.$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$2. \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \end{array} \right.$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$3. \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & & & \bullet\, z & = & \bullet \end{array} \right.$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$4.\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \bullet\, y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & y & + & \bullet\, z & = & \bullet \\ & & & & z & = & \bullet \end{array}\right.$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$5.\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & \bullet\, y & & & = & \bullet \\ & & y & & & = & \bullet \\ & & & & z & = & \bullet \end{array}\right.$$

Méthode

- On utilise uniquement des opérations élémentaires.
- On échelonne, puis on réduit le système.

$$6. \left\{\begin{array}{rrrl} x & & & = \bullet \\ & y & & = \bullet \\ & & z & = \bullet \end{array}\right.$$

Exemple 16

Résolution du système :

$$S_{10} : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 3y + 4z = 6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$$

▷ Exercice 13.

Résoudre les systèmes :

$$S_1 : \begin{cases} y + z = 13 \\ x + z = 1 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

$$S_2 : \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + 4y + 3z = 7 \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$$

▷ Exercice 14.

Résoudre les systèmes

$$S_3 : \begin{cases} 7x - 5y = 5 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$$

$$S_4 : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 5x - y = 4 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

$$S_5 : \begin{cases} -5x + 4y - 3z = -1 \\ x - y + 2z = 2 \end{cases}$$

▷ Exercice 15.

Soit λ un paramètre. Résoudre les systèmes :

$$S_6 : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ \lambda x + y = 0 \end{cases}$$

$$S_7 : \begin{cases} \lambda x + 2y - z = 0 \\ 2x + (\lambda - 3)y + 2z = \lambda - 4 \\ -x + 2y + \lambda z = 2 \end{cases}$$

Prochain chapitre

Chapitre A3

Fonctions d'une variable réelle