Devoir surveillé n° 9

CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t \cos(kt) dt &= \left[\frac{t}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) dt \\ &= \frac{1}{k^2} [\cos(kt)]_0^\pi \\ &= \frac{(-1)^k - 1}{k^2}, \end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi t^2 \cos(kt) dt &= \left[\frac{t^2}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi - \frac{2}{k} \int_0^\pi t \sin(kt) dt \\ &= -\frac{2}{k} \left(\left[-\frac{t}{k} \cos(kt) \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kt) dt \right) \\ &= \frac{2\pi(-1)^k}{k^2} - \frac{2}{k^2} \left[\frac{1}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi \\ &= \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}. \end{aligned}$$

2. Les constantes $a = -1$ et $b = \frac{1}{2\pi}$ conviennent.

3. D'après les questions précédentes :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (at + bt^2) S_n(t) dt &= 2B_n + \int_0^\pi \left(-t + \frac{t^2}{2\pi} \right) dt \\ &= 2B_n + \left[-\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6\pi} \right]_0^\pi \\ &= 2B_n - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{6} \\ &= 2B_n - \frac{\pi^2}{3}. \end{aligned}$$

4. Soit $t \in]0, \pi[$:

$$S_n(t) = 1 + 2\operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right),$$

où :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikt} &= e^{it} \frac{1 - e^{int}}{1 - e^{it}} \\ &= e^{it} \frac{e^{\frac{int}{2}} e^{\frac{int}{2}} - e^{-\frac{int}{2}}}{e^{\frac{it}{2}} e^{\frac{it}{2}} - e^{-\frac{it}{2}}} \\ &= e^{\frac{i(n+1)t}{2}} \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
 S_n(t) &= 1 + 2 \frac{\cos\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
 &= 1 + \frac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2} + \frac{nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{(n+1)t}{2} - \frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.
 \end{aligned}$$

De plus : $S_n(0) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n 1 = 2n + 1$.

5. On a : $\forall t \in]0, \pi]$, $g(t) = (2a + 2bt) \frac{\frac{t}{2}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2a = -2$, donc g est prolongeable par continuité en 0 avec $g(0) = -2$. De plus, g est de classe C^1 sur $]0, \pi]$, avec :

$$\forall t \in]0, \pi], g'(t) = \frac{(a + 2bt) \sin\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{at+bt^2}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

où $\frac{2bt}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 4b$, $\frac{\frac{bt^2}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2b$, et $\frac{a}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{\frac{at}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{t}{6} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, donc :

$$g'(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 2b = \frac{1}{\pi}.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement g est donc dérivable en 0, et sa dérivée est continue en 0. Le prolongement de g en 0 est donc de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi h(t) \sin(mt) dt &= \left[-h(t) \frac{\cos(mt)}{m} \right]_0^\pi + \frac{1}{m} \int_0^\pi h'(t) \cos(mt) dt \\
 &= \frac{(-1)^{m+1} h(\pi) + h(0)}{m} + \frac{1}{m} I_m,
 \end{aligned}$$

où $I_m = \int_0^\pi h'(t) \cos(mt) dt$ vérifie, comme $|\cos| \leq 1$: $|I_m| \leq \int_0^\pi h'(t) dt$. On a donc :

$$\frac{(-1)^{m+1} h(\pi) + h(0)}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \frac{I_m}{m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0,$$

donc :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^\pi h(t) \sin(mt) dt = 0.$$

7. D'après les questions précédentes :

$$\int_0^\pi (at + bt^2) S_n(t) dt = \int_0^\pi g(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = -\frac{C}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2.

1. C'est immédiat : $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $S_k - S_{k-1} = \sum_{i=1}^k i - \sum_{i=1}^{k-1} i = k$.
2. On applique simultanément les transvections $C_k \leftarrow C_k - C_{k-1}$ pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ S_1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!$$

Exercice 3.

1. La variable $Y = (X - E(X))^2$ est positive (puisque c'est un carré), donc, par linéarité de l'espérance :

$$0 \leq E(Y) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - E(X)^2,$$

c'est-à-dire que $E(X^2) \geq E(X)^2$, avec égalité si et seulement si $Y = 0$, c'est-à-dire que X est constante.

Ou : l'inégalité est vraie car $V(X) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $V(X) = 0$, i.e. X est constante.

2. (a) Par hypothèse : $A_1 + A_2 + \cdots + A_n = T$. Comme de plus les A_i suivent une même loi, on a $E(A_1) = E(A_2) = \cdots = E(A_n)$ donc, par linéarité de l'espérance : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $nE(A_i) = T$, d'où $E(A_i) = \frac{T}{n}$.
- (b) Soit $(k, t) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 0, T \rrbracket$, supposons l'événement « $A_k = t$ » réalisé. Le moment d'arrivée de l'utilisateur suit par hypothèse une loi uniforme sur $\llbracket 0, T \rrbracket$, ensemble sur lequel l'événement « $B = k$ » est de cardinal t . Donc $\mathbb{P}_{A_k=t}(B = k) = \frac{t}{T}$.
- (c) D'après le résultat précédent, et d'après la formule des probabilités composées :

$$\forall (k, t) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 0, T \rrbracket, \quad \mathbb{P}((B = k) \cap (A = t)) = \mathbb{P}(A_k = t) \mathbb{P}_{A_k=t}(B = k) = \frac{tp_t}{T}.$$

On a alors, d'après la formule des probabilités totales :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(B = k) = \sum_{t=0}^T \mathbb{P}((B = k) \cap (A = t)) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^T tp_t = \frac{E(A_i)}{T} = \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire : $B \hookrightarrow \mathcal{U}(1, n)$. De même :

$$\forall t \in \llbracket 0, T \rrbracket, \quad \mathbb{P}(A = t) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((B = k) \cap (A = t)) = \frac{ntp_t}{T}.$$

- (d) On a directement :

$$E(A) = \sum_{t=0}^T t \times \mathbb{P}(A = t) = \frac{n}{T} \sum_{t=0}^T t^2 p_t = \frac{n}{T} E(A_i^2),$$

pour un $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ quelconque (puisque les A_i suivent la même loi).

- (e) D'après la question 1, on a donc :

$$E(A) \geq \frac{n}{T} E(A_i)^2 = \frac{T}{n}.$$

Le phénomène est donc prouvé : la durée d'attente du bus que l'utilisateur va prendre est supérieure à la moyenne ! Il y a égalité dans le cas d'égalité de la question 1, c'est-à-dire quand les A_i sont constantes

égales à $\frac{T}{n}$; c'est-à-dire quand les bus passent avec une parfaite régularité !

Problème.

- I. 1. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Notons aX^2 le terme en X^2 de P (avec a éventuellement nul), alors le terme en X^3 de $f(P)$ est $2X \times aX^2 - X^2 \times 2aX = 0$, donc $f(P) \in \mathbb{R}_2[X]$. Donc f est bien définie.
Soient $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= (2X + 1)(\lambda P + \mu Q) - (X^2 - 1)(\lambda P + \mu Q)' \\ &= \lambda((2X + 1)P - (X^2 - 1)P') + \mu((2X + 1)Q - (X^2 - 1)Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q), \end{aligned}$$

donc f est linéaire : c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On a : $f(1) = 2X + 1$, $f(X) = X^2 + X + 1$, $f(X^2) = X^2 + 2X$, donc :

$$A = M_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. On applique la méthode du pivot à la matrice A :

$$A \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc $\text{rg}(A) = 3$. L'application f est donc bijective : c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

- II. 1. Notons $M = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a, en développant par rapport à la première colonne :

$$\det(M) = - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

donc M est inversible, donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Comme on l'a vu : $P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

La méthode du pivot nous donne alors : $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_0} = (P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}})^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3. On a :

$$\begin{aligned} B &= M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \\ &= P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_0} M_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}(f) P_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. D'après le calcul précédent, tout polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $M_{\mathcal{B}}(Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$, où $z \in \mathbb{R}$, convient ;
c'est-à-dire $Q = z \times P_3(X + 1)^2$.

III. 1. On a directement, en développant par rapport à la première colonne :

$$\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3).$$

2. On a directement la factorisation : $\det(A - \lambda I_3) = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$, d'où $S = \{-1, 1, 3\}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (\lambda \in S) &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Ker}(A - \lambda I_3) \neq \{0_{3,1}\} \\ &\Leftrightarrow \exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), (A - \lambda I_3)X = 0_{3,1} \text{ et } X \neq 0_{3,1} \\ &= \exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0_{3,1}. \end{aligned}$$

4. Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Pour $\lambda = 1$:

$$AX = X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= x \\ 2x + y + 2z &= y \\ y + z &= z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} +y &= 0 \\ 2x + 2z &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + z = 0 \Leftrightarrow X = -x \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = -1$:

$$AX = -X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= -x \\ 2x + y + 2z &= -y \\ y + z &= -z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = -\frac{y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $\lambda = 3$:

$$AX = 3X \Leftrightarrow \begin{cases} x + y &= 3x \\ 2x + y + 2z &= 3y \\ y + z &= 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y &= 0 \\ 2x - 2y + 2z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \frac{y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On retrouve bien les polynômes de la base $\mathcal{B}$.