Devoir surveillé n° 9

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.
Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(10 points)* On veut déterminer la limite de la suite de terme général $B_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties, montrer que :
$$\int_0^\pi t\cos(kt)dt = \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \quad \text{et} \int_0^\pi t^2\cos(kt)dt = \frac{2\pi(-1)^k}{k^2}.$$
2. En déduire deux constantes a et b telles que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^\pi (at + bt^2)\cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}$.
3. On pose $S_n : t \mapsto 1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$.
   Montrer que : $\displaystyle\int_0^\pi (at + bt^2)S_n(t)dt = 2B_n + C$, où C est une constante à déterminer.
   Les deux questions qui suivent sont (un peu) difficiles.
4. Vérifier que : $\forall t \in]0,\pi[,\ S_n(t) = \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$. Que vaut $S_n(0)$?
5. Montrer que $g : t \mapsto \dfrac{at + bt^2}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$, définie sur $]0,\pi]$, est prolongeable en 0 en une fonction de classe C^1.
6. Montrer que si h est une fonction de classe C^1, alors : $\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\int_0^\pi h(t)\sin(mt)dt = 0$.
   On pourra procéder par intégration par parties.
7. Conclure.

Exercice 2. *(6 points)* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note : $\forall k \in [\![1,n]\!],\ S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i$.

1. Vérifier que : $\forall k \in [\![2,n]\!]$, $S_k - S_{k-1} = k$.
2. En déduire la valeur du déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$.

Exercice 3. *(8 points)* On s'intéresse au *paradoxe des temps d'attente* : un arrêt de bus est desservi, en moyenne, une fois par heure. Pourtant, les usagers attendent, en moyenne, bien plus de 30 minutes...

1. Soit X une variable aléatoire quelconque. Montrer que $E(X^2) \geq E(X)^2$. Dans quel cas y a-t-il égalité ?
   On pourra calculer $E(Y)$, *où* $Y = (X - E(X))^2$.
2. Modélisons notre expérience :
   - On note $[\![0, T]\!]$ l'intervalle de temps de l'expérience, avec $T \in \mathbb{N}^*$.
   - On suppose que n bus exactement desservent l'arrêt pendant cet intervalle ; ils sont numérotés dans l'ordre, de 1 à n. On suppose que le $n^{\text{ème}}$ bus passe au temps T.
   - On note, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, A_k l'attente entre deux bus (le bus 1 passe donc au temps A_1, le bus 2 au temps $A_1 + A_2$, etc). On suppose que les variables aléatoires A_i prennent leurs valeurs dans $[\![0, T]\!]$, et qu'elles suivent toutes une même loi (qu'on ne connaît pas).

   (a) Montrer que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ E(A_i) = \dfrac{T}{n}$.

   (b) Un usager se présente à un moment aléatoire à l'arrêt. On note B le numéro du bus pris par cet usager. Justifier que : $\forall (k, t) \in [\![1, n]\!] \times [\![0, T]\!],\ \mathbb{P}_{A_k = t}(B = k) = \dfrac{t}{T}$.

   (c) On rappelle que les A_i suivent une même loi. On note : $\forall (i, t) \in [\![1, n]\!] \times [\![0, T]\!],\ p_t = \mathbb{P}(A_i = t)$.
   On note A l'attente du bus pris par l'usager (c'est-à-dire que si l'usager prend le bus k, alors $A = A_k$).
   Déterminer, en fonction des p_t, la loi conjointe du couple (B, A), puis ses lois marginales.

   (d) Montrer que : $E(A) = \dfrac{n}{T} E(A_i^2)$, pour un $i \in [\![1, n]\!]$ quelconque.

   (e) En déduire que $E(A) \geq \dfrac{T}{n}$. Conclure. Dans quel cas y a-t-il égalité ?

Problème. *(12 points)* On considère l'application $f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array} \right.$.
On note $\mathcal{B}_0 = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

I. 1. Justifier que l'application f est bien définie et linéaire.
   2. Déterminer la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}_0$.
   3. Déterminer le rang de f. Que peut-on en déduire sur cette application ?

II. On note $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$, avec :

$$P_1 = X^2 - 1, \quad P_2 = (X-1)^2, \quad P_3 = (X+1)^2.$$

   1. Montrer que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
   2. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, puis la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.
   3. En déduire la matrice B de f dans la base $\mathcal{B}$.
   4. En déduire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}_2[X]$ non nul tel que $f(Q) = 3Q$. En donner un exemple.

III. On s'intéresse dans cette partie à l'origine de la base $\mathcal{B}$.
   1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(A - \lambda I_3)$.
   2. Montrer que l'équation $\det(A - \lambda I_3) = 0$ a pour ensemble de solutions $S = \{-1, 1, 3\}$.
   3. Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\lambda \in S) \Leftrightarrow (\exists X \in M_{3,1}(\mathbb{R}),\ AX = \lambda X \text{ et } X \neq 0_{3,1})$.
   4. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Résoudre l'équation $AX = \lambda X$ pour chaque $\lambda \in S$. Conclure.