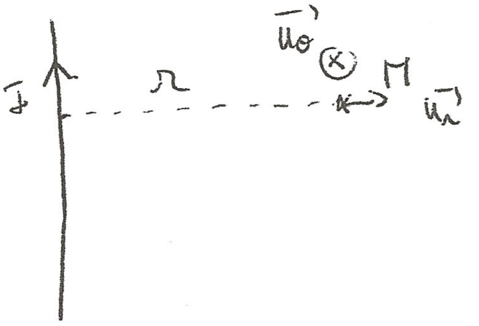
EX2 : Champ crée par un fil infiniment long.

Le champ magnétique crée par un fil rectiligne illimité parcouru par un courant d'intensité I s'exprime dans une base locale cylindrique d'axe oz (le fil) par :

$$\overline{B(M)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\overline{u_\theta}$$

Définir le sens de $\overline{B(M)}$, tracer les lignes de champ. Calculer la norme B du champ magnétique crée à r = 1cm d'un fil infini parcouru par un courant I = 1A. Comparer cette valeur à celle de la composante horizontale du champ magnétique terrestre.



$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\,\vec{u_\theta}$$

Modèle : fil ∞ $\Rightarrow$ $\frac{r}{a} \ll 1$ avec a longueur du fil.

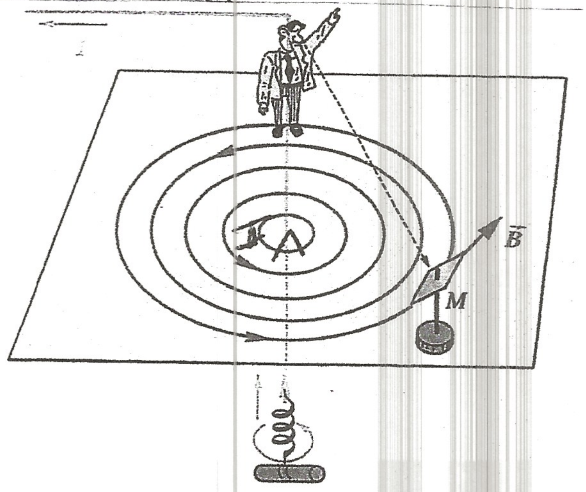
si $r \to 0$ le modèle ne s'applique pas, le fil rectiligne doit être remplacé par un fil de diamètre donné d $\to$ (voir 2nd année).

Direction et sens de $\vec{B}$: $\vec{B}$ est contenu ds le plan $\perp$ au fil et passant par M, dirigé suivant $\vec{u_\theta}$

$I>0$ $\vec{B}$ ds le sens de $\vec{u_\theta}$
$I<0$ $\vec{B}$ ds le sens opposé à $\vec{u_\theta}$ $\to$ cf les règles d'orientation.

lignes de champ : cercles centré sur Oz.

AN $r = 1$ cm $\to$ $B = 2.10^{-5}$ T.

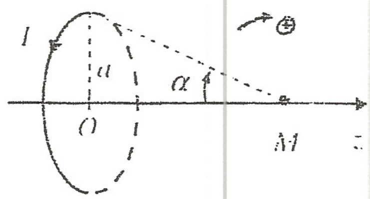


Lignes de champ dans un plan perpendiculaire à un conducteur rectiligne parcouru par un courant continu. La règle du bonhomme d'Ampère, ou celle du tire-bouchon, permet d'orienter les lignes de champ. ou de la main droite.

EX3 : Champ crée par une spire circulaire.

Une spire circulaire de centre O, d'axe Oz et de rayon a est parcourue par un courant d'intensité I.

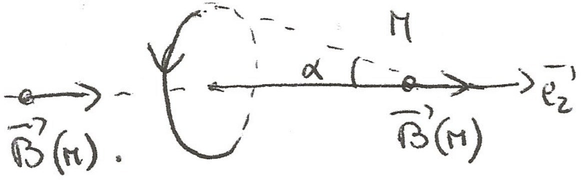
Le champ crée sur l'axe est $\overline{B(\alpha)} = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\overline{u_z}$



1-Donner l'expression de $\overline{B(M)}$ en fonction de z.

2-Quelle est l'expression de la valeur du champ au centre B(O) ?

3-Tracer la courbe B(z) .



Sur l'axe $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\sin^3\alpha\,\vec{e_z}$

avec $\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{z^2+a^2}}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a}\cdot\frac{a^3}{(z^2+a^2)^{3/2}}\vec{e_z}$$

Rq sens de $\vec{B}$ lié au signe de I.

$\begin{cases} I>0 & \vec{B} \text{ suivant } \vec{e_z} \\ I<0 & \vec{B} \text{ suivant } -\vec{e_z} \end{cases}$

$B(z=0) = \dfrac{\mu_0 I}{2a}\vec{e_z}$. $\boxed{\text{Rq } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ pour } z=0.}$ ↳ se retrouvent avec les règles d'orientation.

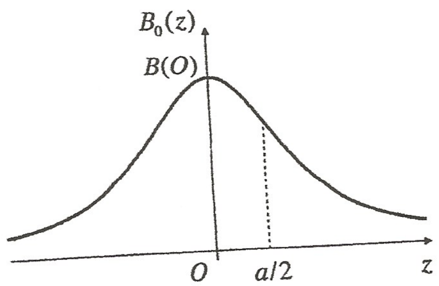
$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = B(0)\,\frac{a^3}{(z^2+a^2)^{3/2}}\,\vec{e_z}}$$

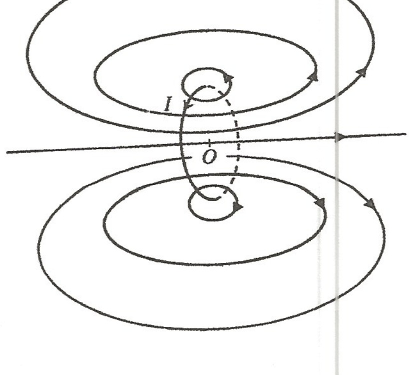
eo Règle de la main droite.
Les doigts suivant le courant (autres que le pouce)
Le pouce suivant $\vec{B}$.

B(z) ↘ lorsque z ↗.

Pour $z = \dfrac{a}{2}$ $\quad B(z) = B(0)\cdot\dfrac{a^3}{\left(\frac{a^2}{4}+a^2\right)^{3/2}} = B(0)\cdot\left(\dfrac{4}{5}\right)^{3/2} = 0{,}7\,B_0$

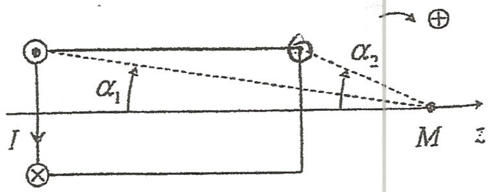
$z = a$ $\quad B(z) = 0{,}35\,B(0)$.





EX4 : Champ crée par un solénoïde infiniment long.

Le champ magnétique crée par un solénoïde de longueur finie, constitué de n spires par unité de longueur et parcouru par un courant d'intensité I est, en un point M quelconque de son axe : $\overline{B(M)} = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\,\overline{u_z}$



1- vérifier que le sens attendu du champ magnétique est conforme au signe de $(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)$.

2- Que valent les angles α_1 *et* α_2 pour un solénoïde infiniment long ? En déduire l'expression du champ $\overline{B_\infty}$ dans un tel solénoïde .

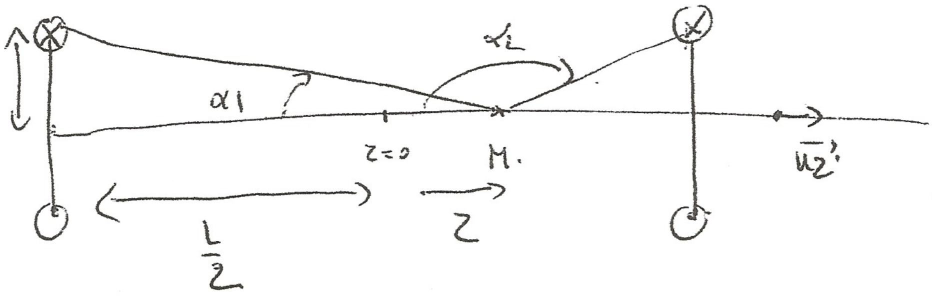
3-On note a le rayon du solénoïde et L sa longueur. Pour quelles valeurs du rapport L/2a peut-on considérer que le champ au centre d'un solénoïde de longueur finie diffère de moins de 1% de celui du solénoïde infiniment long ?

4- AN Calculer le champ d'un solénoïde infini avec N = 1000 spires. L=10cm. I = 0,5A.

Les rayons des spires situées aux extrémités du solénoïde sont vus sous les angles α_1 et α_2. avec $\alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \cos\alpha_1 > \cos\alpha_2$.

donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\vec{u_z}$ est ds le sens de $\vec{u_z}$, ce qui est bien conforme à la règle d'orientation de la main droite.

Modèle de solénoïde infiniment long $\Rightarrow$ tous les points M de l'axe est à l'intérieur du solénoïde.



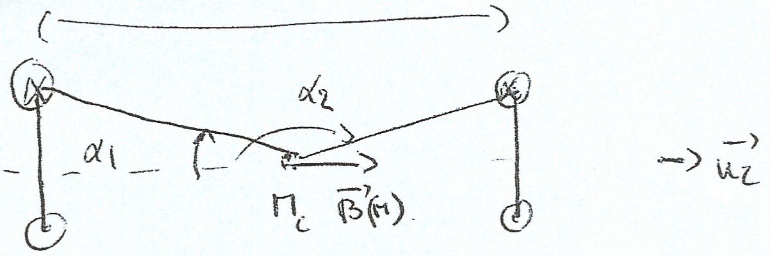
$\tan\alpha_1 = \frac{a}{\frac{L}{2}+z} \to 0$ si $L \to \infty$

et $\alpha_1 < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1 \to 0$.

$\tan\alpha_2 = -\frac{a}{\frac{L}{2}-z} \to 0$ si $L \to \infty$

et $\alpha_2 > \frac{\pi}{2} \to \alpha_2 \to \pi$.

d'où $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 n I}{2}(1-(-1)) = \boxed{\mu_0 n I \vec{u_z} = \vec{B}(M)}$



Au centre du solenoïde de longueur finie L $\quad \alpha_2 = \pi - \alpha_1$

$\cos\alpha_2 = -\cos\alpha_1$

d'où $\vec{B}(M_c) = \mu_0 n I \cos\alpha_1 \vec{u_z}$ et $\cos\alpha_1 = \dfrac{L}{2\cdot\sqrt{a^2 + L^2/4}}$

On veut $B(M_c) \geqslant 0{,}99\, B_\infty \Rightarrow \dfrac{L/2}{\sqrt{a^2 + L^2/4}} \geqslant 0{,}99$

$\dfrac{L^2}{4} > (0{,}99)^2\left[a^2 + \dfrac{L^2}{4}\right] \rightarrow \dfrac{L^2}{4}\left[1-(0{,}99)^2\right] \geqslant (0{,}99)^2 a^2 \Rightarrow$

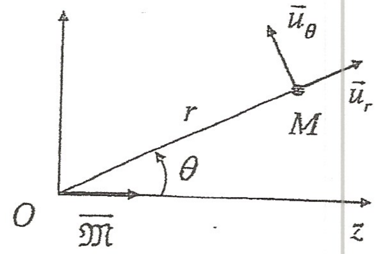
$\dfrac{L}{2a} \geqslant \dfrac{0{,}99}{\sqrt{1-(0{,}99)^2}} \Rightarrow \dfrac{L}{2a} > 7. \Rightarrow$ la longueur doit être égale au moins à 7 fois le diamètre de la bobine, ce qui valide le modèle solenoïde ∞ pour les bobines longues réelles, dans la région centrale.

EX5 Champ crée par un moment magnétique

Une spire circulaire de rayon R est parcourue par un courant d'intensité I. Son rayon est vu sous un angle α à partir d'un point M de son axe, placé à la distance d du centre O.

a) Rappeler la direction du champ de la spire en M et donner son intensité $B_{sp.}$ en fonction de I, R et α.

b) En se limitant à un plan, les composantes en coordonnées polaires du champ magnétique créé au point M par un dipôle magnétique placé en O et de moment $\vec{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\vec{u}_z$ sont données par les expressions :



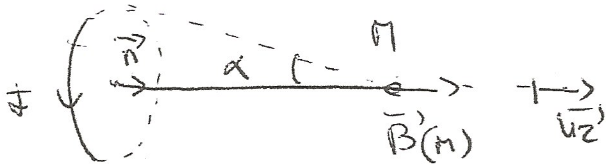
$$\boxed{B_r = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\mathfrak{M}\cos\theta}{r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}\sin\theta}{r^3}}$$

Quel est le moment dipolaire $\vec{\mathfrak{M}}$ équivalent à la spire de la question précédente ? Montrer que lorsque le point M est sur l'axe Oz le champ du dipôle n'a plus qu'une composante et exprimer $B_{dip.}$ en fonction de I, R et z.

c) Pour quelles valeurs de z le champ au point M sur l'axe de la spire diffère-t-il de moins de 1% de celui du dipôle magnétique équivalent ? Pour cela établir le rapport $B_{sp.}/B_{dip.}$ au point M en fonction de z, puis donner la valeur limite pour z en fonction de R.

a] Une spire de rayon R, vu sous l'angle α à partir d'un point M sur l'axe de la spire, crée en M un champ $\vec{B}$

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R}\sin^3\alpha\,\vec{u_z}$$



$$\begin{cases} \vec{\mathcal{M}} = I\,S\,\vec{n} = I\pi R^2\vec{n} \\ \sin\alpha = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+z^2}} \end{cases}$$

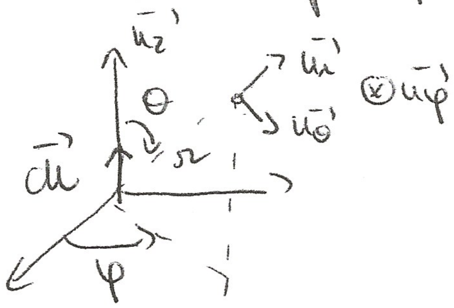
d'où $\vec{B}(M) = \dfrac{\mu_0 I}{2R}\cdot\dfrac{R^3}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z} = \dfrac{\mu_0 I\pi R^2}{2\pi}\times\dfrac{1}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{u_z}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0\vec{\mathcal{M}}}{2\pi(R^2+z^2)^{3/2}}}$$

$$\vec{B}_{spire}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{\mathcal{M}}}{(R^2+z^2)^{3/2}} .$$

Comparaison avec le champ d'un moment magnétique.

En coordonnées sphériques :



$$\begin{cases} B_r = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{2\mathcal{M}\cos\theta}{r^3} \\ B_\theta = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{\mathcal{M}\sin\theta}{r^3} \\ B_\varphi = 0 \end{cases}$$

sur l'axe. $\theta = 0$ $\Rightarrow$ $B_{dipole} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{2\mathcal{M}}{z^3} = \dfrac{\mu_0 \mathcal{M}}{2\pi z^3} \vec{u_z}$

$\begin{pmatrix} r = z \\ \vec{u_r} \to \vec{u_z} \end{pmatrix}$

Rq $B_{spire} < B_{dipole}$.

$= B_{dipole} - B_{spire} < 0{,}01 B_{dipole}$. $\rightarrow$ $B_{spire} > 0{,}99 B_{dipole}$.

On veut $\dfrac{B_{spire}}{B_{dipole}} > 0{,}99$. $\Rightarrow$ $\dfrac{z^3}{(R^2+z^2)^{3/2}} > 0{,}99$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{R^2}{z^2}\right)^{3/2}} > 0{,}99$

$\left(1+\dfrac{R^2}{z^2}\right) < \left(\dfrac{1}{0{,}99}\right)^{\frac{2}{3}}$ $\rightarrow$ $z^2 > \dfrac{R^2}{\left(\dfrac{1}{0{,}99}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}$ $\rightarrow$ $z > \dfrac{R}{\left[\left(\dfrac{1}{0{,}99}\right)^{2/3} - 1\right]^{1/2}} \simeq 12R$.