Feuille d'exercices 22
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3. Notons X_i la variable indicatrice de l'événement « le candidat $n°i$ a réussi à l'issue des deux épreuves. » On a $\mathbb{P}(X_i = 0) = (1-p)^2$, donc X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^2 = p(2-p)$.
Notons X le nombre de candidats ayant réussi à l'issue des deux épreuves, on a : $X = X_1+X_2+\cdots+X_n$, donc, comme les X_i sont mutuellement indépendantes, X suit la loi binomiale de paramètres $(n, p(2-p))$.

Exercice 5. Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ jetons dans l'urne. Comme la probabilité de tirage est uniforme sur les jetons, on a donc :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \frac{k}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= \frac{2n+1}{3}, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathbb{P}(X = k) \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k^3 \\ &= \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

donc :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{n^2+n-2}{18}.$$

En particulier, pour $n = 25$: $E(X) = 17$ et $V(X) = 36$, donc $\sigma(X) = 6$, et l'événement $A =$« $|X - E(X)| \leq \sigma(X)$ » est égal à « $11 \leq X \leq 23$ », donc :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=11}^{2} 3\mathbb{P}(X = k) = \frac{17}{25} = 68\%.$$

Exercice 7. On a : $X_n = \alpha^{Y_n}\beta^{n-Y_n}$, où $Y_n \hookrightarrow B(n, p)$.
D'après le théorème de transfert, on a donc, en notant $q = 1-p$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathbb{P}(X_n = \alpha^k\beta^{n-k}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha p)^k (\beta q)^{n-k} \\ &= (\alpha p + \beta q)^n, \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} E(X_n^2) &= \sum_{k=0}^{n} (\alpha^k \beta^{n-k})^2 \mathbb{P}(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha^2 p)^k (\beta^2 q)^{n-k} \\ &= (\alpha^2 p + \beta^2 q)^n, \end{aligned}$$

donc :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = (\alpha^2 p + \beta^2 q)^n - (\alpha p + \beta q)^{2n}.$$

Si $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$, on a alors :

$$E(X) \geq 1 \Leftrightarrow \alpha p + \frac{1-p}{\alpha} \geq 1 \Leftrightarrow p \geq \frac{1}{\alpha + 1},$$

et on a intérêt à investir à cette dernière condition.

Exercice 8.

(a) L'univers est de cardinal $\dbinom{2n}{2r}$, et l'événement « $X_i = 1$ » est de cardinal $\dbinom{2n-2}{2r-2}$. La probabilité de tirage étant uniforme, on a donc :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{\binom{2n-2}{2r-2}}{\binom{2n}{2r}} = \frac{r(2r-1)}{n(2n-1)},$$

et $\mathbb{P}(X_i = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_i = 1)$.

On a alors directement $E(X_i) = 1 \times \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.

(b) On a $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, donc :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{r(2r-1)}{2n-1}.$$

Observons que si $r = n$, alors $E(X) = n$, et que si $r = 0$, alors $E(X) = 0$, ce qui est cohérent. De plus, si $r = \dfrac{n}{2}$, alors $E(X) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n}{4}$ (c'est-à-dire qu'en tirant la moitié des chaussures, on récupère en moyenne un quart de paires complètes).

Exercice 10. On généralise directement l'exemple du cours, en commençant par établir la loi conjointe du couple (U, V) :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ \mathbb{P}((U = i) \cap (V = j)) = \frac{2}{n^2} \text{ si } i < j,\ \frac{1}{n^2} \text{ si } i = j,\ 0 \text{ si } i > j.$$

On en déduit les lois marginales :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(U = i) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}((U = i) \cap (V = j)) = \frac{2n - 2i + 1}{n^2},$$

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \mathbb{P}(V = j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}((U = i) \cap (V = j)) = \frac{2j - 1}{n^2},$$

puis :

$$E(U) = \sum_{i=1}^{n} i\mathbb{P}(U = i) = \frac{(n + 1)(2n + 1)}{6n},$$

$$E(V) = \sum_{j=1}^{n} j\mathbb{P}(V = j) = \frac{(n + 1)(4n - 1)}{6n}.$$

Exercice 11.

(a) On a directement la loi conjointe :

$$\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \frac{b}{a + b} \times \frac{b - 1}{a + b - 1},$$

$$\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) = \frac{b}{a + b} \times \frac{a}{a + b - 1},$$

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) = \frac{a}{a + b} \times \frac{b}{a + b - 1},$$

$$\mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{a}{a + b} \times \frac{a - 1}{a + b - 1},$$

puis les lois marginales :

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) + \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) = \frac{b}{a + b},$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) + \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{a}{a + b},$$

et de même : $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \dfrac{b}{a + b}$, $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{a}{a + b}$.

(b) D'après les calculs précédents : $\mathbb{P}_{X_1=1}(X_2 = 1) = \dfrac{a - 1}{a + b - 1} \neq \mathbb{P}(X_2 = 1) = \dfrac{a}{a + b}$, donc X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(c) On a directement :

$$E(X_1X_2) = 1 \times 1 \times \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{a}{a + b} \times \frac{a - 1}{a + b - 1},$$

et

$$E(X_1)E(X_2) = \left(\frac{a}{a + b}\right)^2 \neq E(X_1X_2).$$

(d) On a $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, avec :

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0)) = \frac{b}{a+b} \times \frac{b-1}{a+b-1},$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_2 = 1)) + \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 0)) = \frac{2ab}{(a+b)(a+b-1)},$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}((X_1 = 1) \cap (X_2 = 1)) = \frac{a}{a+b} \times \frac{a-1}{a+b-1}.$$

On a par suite :

$$E(X) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2a}{a+b},$$

$$E(X^2) = 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 4 \times \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2a(2a+b-2)}{(a+b)(a+b-1)},$$

d'où :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{b(a+b-2)}{(a+b)(a+b-1)}.$$

L'apparition du $a + b - 2$ dans la variance est "morale" : si $a + b = 2$, X est constante.

Exercice 12. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$, on peut décomposer X en somme de m variables de Bernoulli mutuellement indépendantes :

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m,$$

et de même :

$$Y = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n.$$

Alors :

$$X + Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_m + Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n,$$

où les X_i et les Y_j suivent la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et sont, comme X et Y sont indépendantes, mutuellement indépendantes. Donc : $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p)$.

Exercice 15. Notons X le nombre d'occurrences du numéro du joueur, et G le gain. On a : $G = -k$ si $X = 0$, et $G = kX$ si $X \in \{1, 2, 3\}$. De plus : $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{6}\right)$, donc, d'après le théorème de transfert :

$$\begin{aligned} E(G) &= -k \times \mathbb{P}(X = 0) + k \times \mathbb{P}(X = 1) + 2k \times \mathbb{P}(X = 2) + 3k \times \mathbb{P}(X = 3) \\ &= -\frac{17k}{216} < 0, \end{aligned}$$

donc le jeu n'est pas équitable.

Exercice 16. Soit n le nombre de personnes interrogées, et X le nombres de personnes qui répondent avoir voté pour le parti. On a : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

On cherche n tel que : $\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq 3\%\right) \leq 10\%$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}\left(|X - E(X)| \geq \frac{3n}{100}\right) \leq \frac{1}{10}.$$

On reconnaît l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, appliquée à $a = \dfrac{3n}{100}$. On a :

$$\frac{V(X)}{a^2} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow n = \frac{10^5}{9} p(1-p),$$

où, comme $p \in [0,2; 0,3]$: $p(1-p) \leq \dfrac{3}{10} \times \dfrac{7}{10}$.
Il suffit donc d'interroger $n = \left\lceil \dfrac{10^5}{9} \times \dfrac{21}{100} \right\rceil = 2334$ personnes, *et ceci quel que soit le nombre de votants !*