Devoir à la maison n° 15
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soit $t \in [0, 2\pi]$, on a directement :

$$(x-\cos(t))^2+\sin^2(t) = x^2-2x\cos(t)+\cos^2(t)+\sin^2(t) = x^2-2x\cos(t)+1,$$

donc $x^2-2x\cos(t)+1 \geq 0$, et :

$$x^2-2x\cos(t)+1=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-\cos(t) & = & 0 \\ \sin(t) & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow 1=\cos^2(t)+\sin^2(t)=x^2 \Rightarrow x=\pm 1, \text{ ce qui est exclu,}$$

donc $x^2-2x\cos(t)+1>0$. Donc la fonction $t \mapsto \ln\left(x^2-2x\cos(t)+1\right)$ est bien définie sur $[0, 2\pi]$, donc $I(x)$ est bien définie.

2. Par définition, on a :

$$u_n = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right).$$

3. On a directement :

$$v_n = \exp\left(\sum_{k=0}^{n-1}\ln\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right)\right) = \prod_{k=0}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1\right).$$

Or, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right) = x^2-\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}+e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)x+1 = x^2-2x\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+1,$$

donc : $v_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(x-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right)$.

Or, la famille $\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est la famille des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité, donc :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = x^n-1\,;\text{ et de même, }\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right) = x^n-1,$$

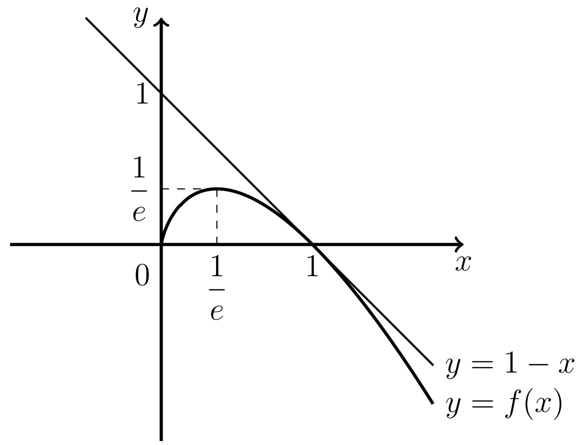
d'où : $v_n = (x^n-1)^2$.

4. On a donc : $u_n = \dfrac{2\pi}{n}\ln(v_n) = \dfrac{4\pi}{n}\ln|x^n-1|$. D'après le théorème des sommes de Riemann, la suite (u_n) converge vers $I(x)$. Par disjonction de cas :
   - si $|x|<1$, alors $x^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\ln|x^n-1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1)=0$, donc $I(x)=0$,
   - si $|x|>1$, alors $u_n = \dfrac{4\pi}{n}\ln\left|x^n\left(1-x^{-n}\right)\right| = 4\pi\ln|x|+\dfrac{4\pi}{n}\ln|1-x^{-n}|$, avec $\ln|1-x^{-n}| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1)=0$, donc $I(x)=4\pi\ln|x|$.

Exercice 2.

1. La fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+$, donc est en-dessous de ses tangentes. Sa tangente en 1 ayant pour équation $y = 1 - x$, on a donc :

$$\forall x \geq 0,\ f(x) \leq 1 - x.$$



2. (a) Notons a la seule valeur prise par X. On a alors $\mathbb{P}(X = a) = 1$, donc :

$$H(X) = f\left(\mathbb{P}(X = a)\right) = f(1) = 0.$$

(b) On a $X(\Omega) = [\![1, N]\!]$, et : $\forall k \in [\![1, N]\!],\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{N}$. Donc :

$$H(X) = \sum_{k=1}^{N} f\left(\mathbb{P}(X = k)\right) = N f\left(\frac{1}{N}\right) = \ln(N).$$

3. (a) Pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) \in [0, 1]$ (c'est une probabilité), donc, comme $f([0, 1]) = \left[0, \dfrac{1}{e}\right]$: $f\left(\mathbb{P}(X = x)\right) \geq 0$. Donc $H(X) \geq 0$.

(b) D'après (C), on a directement :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f\left(N\mathbb{P}(X = x)\right) \leq \sum_{x \in X(\Omega)} \left(1 - N\mathbb{P}(X = x)\right) = N - N \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = N - N = 0.$$

(c) On a : $\forall x \in X(\Omega)$,

$$f\left(N\mathbb{P}(X = x)\right) = -N\mathbb{P}(X = x) \ln\left(N\mathbb{P}(X = x)\right) = -N\ln(N)\mathbb{P}(X = x) - N\mathbb{P}(X = x)\ln\left(\mathbb{P}(X = x)\right),$$

donc :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in X(\Omega)} f\left(N\mathbb{P}(X = x)\right) &= -N\ln(N) \sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) - N \sum_{x \in X(\Omega)} f\left(\mathbb{P}(X = x)\right) \\ &= -N\ln(N) + NH(X). \end{aligned}$$

(d) D'après les deux questions précédentes : $-N\ln(N) + NH(X) \leq 0$, d'où : $H(X) \leq \ln(N)$.

4. On a vu que l'entropie est minorée par 0, et que cette valeur est atteinte pour les variables aléatoires constantes. Réciproquement, si l'entropie d'une variable aléatoire X est nulle, alors : $\forall x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X = x)$ est un point d'annulation de f, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X = x) = 1$ ou 0. La variable aléatoire X est donc constante.
Les variables aléatoires d'entropie minimale sont donc les variables aléatoires constantes.
De même, l'entropie d'une variable aléatoire X est majorée par $\ln\left(|X(\Omega)|\right)$, et cette valeur est atteinte si X est de loi uniforme. Réciproquement, si l'entropie de X est égale à $\ln\left(|X(\Omega)|\right)$, alors il y a égalité

dans le résultat de la question 3.(b) : $\forall x \in X(\Omega),\ f(N\mathbb{P}(X = x)) = 1 - N\mathbb{P}(X = x)$; donc, par convexité de f : $N\mathbb{P}(X = x) = 1$, donc $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{N}$, et donc X suit une loi uniforme.
Les variables aléatoires d'entropie maximale sont donc celles qui suivent une loi uniforme.
Cette notion d'entropie a été introduite en 1948 par Claude Shannon (1916-2001). Elle mesure le degré de brouillage d'un message, et est centrale en théorie de l'information.