Devoir à la maison n° 15

Exercice 1. On note, pour tout réel $x \notin \{-1, 1\}$:

$$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos(t) + 1\right) dt.$$

Soit x un tel réel, et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que : $\forall t \in [0, 2\pi],\ x^2 - 2x\cos(t) + 1 = (x - \cos(t))^2 + \sin^2(t)$.
   En déduire que l'intégrale $I(x)$ est bien définie.
2. Écrire la $n^{\text{ème}}$ somme de Riemann à gauche associée à $I(x)$. On la notera u_n.
3. On note $v_n = e^{\frac{n}{2\pi}u_n}$. Montrer que :

$$v_n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(x - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\left(x - e^{-i\frac{2k\pi}{n}}\right) = (x^n - 1)^2.$$

4. En déduire que : $u_n = \dfrac{4\pi}{n} \ln|x^n - 1|$, puis déterminer $I(x)$.
   On distinguera les cas $|x| < 1$ *et* $|x| > 1$.

Exercice 2. Notons f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = -x\ln(x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.
Étant donné une variable aléatoire X, on appelle *entropie de* X le nombre réel :

$$H(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} f\left(\mathbb{P}(X = x)\right).$$

1. Justifier l'inégalité $(C)\ :\ \forall x \geq 0,\ f(x) \leq 1 - x$. Représenter graphiquement cette inégalité.
2. (a) Soit X une variable aléatoire constante. Déterminer $H(X)$.
   (b) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(1, N)$. Calculer $H(X)$.
3. Soit X une variable aléatoire quelconque. On note $N = \mathrm{Card}\,(X(\Omega))$.
   (a) Montrer que : $H(X) \geq 0$.
   (b) En utilisant (C), montrer que : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f\left(N\mathbb{P}(X = x)\right) \leq 0$.
   (c) Montrer d'autre part que : $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} f\left(N\mathbb{P}(X = x)\right) = -N\ln(N) + NH(X)$.
   (d) En déduire une majoration de $H(X)$.
4. Pour quelles variables aléatoires l'entropie est-elle minimale ? maximale ? Justifier.