Devoir à la maison n° 14
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. On a $f(e_1) = (1, 2, 2)$, donc $M_{\mathcal{B}_3}(f(e_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, $f(e_2) = (2, -1, 3)$, donc $M_{\mathcal{B}_3}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. (i) Par définition, $P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}'_2} = M_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $P_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}'_3} = M_{\mathcal{B}_3}(\mathcal{B}'_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (ii) D'après la formule de changement de base :
$$M_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}'_2}(f) = P_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}_3} M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}(f) P_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}'_2}.$$
Il faut calculer $P_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}_3}$: on a directement $M_{\mathcal{B}'_3}(f_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puis $f_2 = (f_1 + f_2) - f_1$, donc $M_{\mathcal{B}'_3}(f_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, et de même $f_3 = (f_1 + f_2 + f_3) - (f_1 + f_2)$, donc $M_{\mathcal{B}'_3}(f_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Donc $P_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}_3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Donc :
$$M_{\mathcal{B}'_3}^{\mathcal{B}'_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. On a $g = f \circ h$, où $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ est défini par $h(x, y, z) = (x + z, y + z)$. La matrice de h par rapport aux bases canoniques est donc $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et par conséquent :
$$M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(g) = M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_2}(f) M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_3}(h) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$
Par construction, les colonnes de $M_{\mathcal{B}_3}^{\mathcal{B}_3}(g)$ sont liées par $C_1 + C_2 = C_3$, donc $\det g = 0$. L'application g n'est donc pas bijective.

Exercice 2.

1. On a directement :

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{vmatrix} &= \begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & j-1 & j^2-1\\ 0 & j^2-1 & j-1\end{vmatrix}\\
&= (j-1)^2\begin{vmatrix}1 & j+1\\ j+1 & 1\end{vmatrix}\\
&= (1-j)^2(1-(j+1)^2)\\
&= (1-j)^2(-2j-j^2)\\
&= (1-j)^3,
\end{aligned}$$

   donc $\det(J) \neq 0$. Donc J est inversible.

2. On a directement :

$$MJ = \begin{pmatrix}a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & j & j^2\\ 1 & j^2 & j\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c & a+bj+cj^2 & a+bj^2+cj\\ a+b+c & aj+bj^2+c & aj^2+bj+c\\ a+b+c & aj^2+b+cj & aj+b+cj^2\end{pmatrix}.$$

   On a alors :

$$\begin{aligned}
\det(MJ) &= \begin{vmatrix}(a+b+c)\times 1 & (a+bj+cj^2)\times 1 & (a+bj^2+cj)\times 1\\ (a+b+c)\times 1 & (a+bj+cj^2)\times j & (a+bj^2+cj)\times j^2\\ (a+b+c)\times 1 & (a+bj+cj^2)\times j^2 & (a+bj^2+cj)\times j\end{vmatrix}\\
&= (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)\det(J),
\end{aligned}$$

   d'où, comme $\det(MJ) = \det(M)\det(J)$:

$$\begin{aligned}
\det(M) &= (a+b+c)(a+bj+cj^2)(a+bj^2+cj)\\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+(ab+ac+bc)(j+j^2))\\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)\\
&= a^3+b^3+c^3-3abc.
\end{aligned}$$