Feuille d'exercices 21
ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 1.

(c) Soit G une primitive de $g : t \mapsto e^{-t^2}$. Alors : $\forall x \geq 0,\ f(x) = G(\sqrt{x}) - G(1)$, donc :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}.$$

(d) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \dfrac{t}{1+t^4}$. Alors : $\forall x > 0,\ f(x) = G(\sqrt{x}) - G\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} g(\sqrt{x}) + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Exercice 2. (a) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \cos(t^2)$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \cos(t^2) dt = \frac{G(x) - G(-x)}{x} = 2 \frac{G(x) - G(-x)}{x - (-x)},$$

donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} \cos(t^2) dt = 2G'(0) = 2g(0) = 2.$$

(b) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \dfrac{1}{(\ln t)^2}$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2} = \frac{G(2x) - G(x)}{x} = \frac{G(2x) - G(x)}{2x - x},$$

donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{dt}{(\ln t)^2} = \lim_{x \to +\infty} G'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{(\ln x)^2} = 0.$$

(c) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{t}$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t} = \frac{G(2x) - G(x)}{x} = \frac{G(2x) - G(x)}{2x - x},$$

donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \int_{x}^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \lim_{x \to 0} G'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{x} = \infty.$$

(d) Soit G une primitive de $g : t \mapsto \dfrac{e^{\frac{1}{t}}}{t}$. Alors :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} = \frac{G(2x)-G(x)}{x} = \frac{G(2x)-G(x)}{2x-x},$$

donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_x^{2x} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{x\to+\infty} G'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = 0.$$

Exercice 3.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t+i} \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t-i}{1+t^2}dt \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t}{1+t^2}dt - i\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \left[\frac{1}{2}\ln|1+t^2|\right]_0^{\sqrt{3}} - i\left[\arctan(t)\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \ln(2) - i\frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{k=0}^{E(x)-1} \int_k^{k+1} E(t)dt + \int_{E(x)}^x E(t)dt \\ &= \sum_{k=0}^{E(x)-1} k + \int_{E(x)}^x E(x)dt \\ &= \frac{E(x)(E(x)-1)}{2} + (x-E(x))E(x). \end{aligned}$$

La fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ puisque E l'est. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $F(n) = \dfrac{n(n-1)}{2} = \lim\limits_{x\to n^+} F(x)$, et :

$$\lim_{x\to n^-} F(x) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1\times(n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = F(n),$$

donc F est continue en n. Donc F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. On a : $\displaystyle\int_0^1 (f(t)-f(1))dt = 0$. Comme $g : t \mapsto f(t)-f(1)$ est continue sur $[0,1]$ et d'intégrale nulle, g s'annule en un certain $t_0 \in]0,1[$, c'est-à-dire que $f(t_0) = f(1)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]t_0, 1[\subset]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. On a : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2} = \int_0^1 xdx$, donc $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-x)dx = 0$. Si f n'a pas de point fixe, alors, comme f est continue : $\forall x \in [0,1],\ f(x) > x$ ou $\forall x \in [0,1],\ f(x) < x$, donc $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-x)dx > 0$ ou $\displaystyle\int_0^1 (f(x)-x)dx < 0$, ce qui est absurde. Donc f admet un point fixe.

Exercice 7. Si f ne s'annule pas sur $]0,1[$, alors, comme f est continue, $f>0$ sur $]0,1[$ ou $f<0$ sur $]0,1[$; donc, dans tous les cas, $\displaystyle\int_0^1 f\neq 0$, ce qui est faux. Donc f s'annule sur $]0,1[$ en un certain a.
De même, si f ne s'annule qu'en a, alors la fonction $g : t\mapsto (t-a)f(t)$ est de signe constant sur $]0,1[$, donc $\displaystyle\int_0^1 g\neq 0$. Or $\displaystyle\int_0^1 g=\int_0^1 tf(t)dt-a\int_0^1 f(t)dt=0$. Donc f s'annule deux fois sur $]0,1[$.

Exercice 8. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_a^b \cos(nt^2)dt &= \frac{1}{2n}\int_a^b \frac{1}{t}\times 2nt\cos(nt^2)dt\\ &= \frac{1}{2n}\left(\left[\frac{1}{t}\sin(nt^2)\right]_a^b+\int_a^b\frac{\sin(nt^2)}{t^2}dt\right),\end{aligned}$$

où, comme $|\sin|\leq 1$, $\displaystyle\left|\left[\frac{1}{t}\sin(nt^2)\right]_a^b\right|\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=C$, et $\displaystyle\left|\int_a^b\frac{\sin(nt^2)}{t^2}dt\right|\leq\int_a^b\frac{dt}{t^2}=D$, donc :

$$\left|\int_a^b\cos(nt^2)dt\right|\leq\frac{C+D}{2n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\cos(nt^2)dt=0$.

Exercice 9. Comme f est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème de Weierstrass, f est bornée sur $[a,b]$ et atteint ses bornes. Notons M le maximum de f sur $[a,b]$, alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n\leq\left(\int_a^b M^n\right)^{\frac{1}{n}}=M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

De plus : soit $\varepsilon>0$. Comme M est atteint par f en un certain $c\in[a,b]$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$\forall x\in[a,b],\ (|x-c|\leq\delta)\Rightarrow(f(x)\geq M-\varepsilon).$$

Comme f est positive sur $[a,b]$, on a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n\geq\left(\int_{[a,b]\cap[c-\delta,c+\delta]}(M-\varepsilon)^n\right)^{\frac{1}{n}}\geq(M-\varepsilon)\delta^{\frac{1}{n}}.$$

Or : $(b-a)^{\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et $\delta^{\frac{1}{n}}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$. Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geq N,\ M-2\varepsilon\leq I_n\leq M+\varepsilon,$$

c'est-à-dire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=M$.

Exercice 10. Notons $F : x\mapsto\displaystyle\int_0^x f(t)dt$, c'est-à-dire que F est la primitive de f qui s'annule en 0 (d'après le théorème fondamental de l'analyse). La fonction F vérifie donc :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ F'(x)\leq kF(x),$$

c'est-à-dire $F' - kF \leq 0$. Notons alors $g : x \mapsto e^{-kx}F(x)$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ g'(x) = e^{-kx}(F'(x) - kF(x)) \leq 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$. On sait de plus que $g(0) = F(0) = 0$ et que g est positive (car F l'est, puisque f l'est), donc g est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.
Donc F est également nulle, donc $f = F'$ également.

Exercice 12. On a : $\displaystyle\int_0^x \cos t\, dt = \mathrm{Re}\left(\int_0^x e^{it}dt\right)$, où, d'après le théorème des sommes de Riemann :

$$\int_0^x e^{it}dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikx}{n}},$$

où : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ikx}{n}} = \frac{1-e^{ix}}{1-e^{\frac{ix}{n}}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1-e^{ix}}{-\frac{ix}{n}}$, donc :

$$\int_0^x e^{it}dt = i(1-e^{ix}),$$

donc : $\displaystyle\int_0^x \cos t\, dt = \sin(x)$.
En outre : $\displaystyle\int_0^x \sin t\, dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^x e^{it}dt\right) = 1 - \cos(x)$.

Exercice 15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 6 à $\sin$ entre 0 et x :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}\sin^{(7)}(t)dt,$$

donc, comme $|\sin^{(7)}| \leq 1$:

$$\left|\sin x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)\right| \leq \left|\int_0^x \frac{(x-t)^6}{6!}dt\right| \leq \frac{|x|^7}{7!}.$$

Exercice 16. Par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \left[(1-t)^m\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{m}{n+1}\int_0^1 (1-t)^{m-1}t^{n+1}dt \\
&= \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1} \\
&= \frac{m!n!}{(m+n)!}I_{0,m+n} \\
&= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.
\end{aligned}$$

Exercice 17.

(a) $\ln\left(\frac{8}{5}\right)$,

(b) $\frac{7}{2}$,

(c) $\frac{e^{\pi}+1}{2}$,

(d) $\frac{\ln(3)}{4}-\frac{1}{6}$,

(e) $3+\frac{3}{8}\ln(3)$,

(f) $\ln(3)$,

(g) $\frac{7}{3}$,

(h) 2,

(i) $\frac{3\pi}{16}$,

(j) $\frac{\pi^2}{16}-\frac{\pi}{4}+\frac{\ln(2)}{2}$,

(k) $\frac{1}{3}$,

(l) ∞.

Exercice 18.

(a) On applique le changement de variable $t = a + b - x$:

$$\begin{aligned} I &= \int_a^b xf(x)dx \\ &= \int_b^a (a+b-t)f(a+b-t) \times (-dt) \\ &= \int_a^b (a+b-t)f(t)dt \\ &= (a+b)\int_a^b f - I, \end{aligned}$$

donc $I = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)dt$.

(b) D'après le résultat ci-dessus :

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx = [-\arctan(\cos(x))]_0^{\pi} = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}.$$