Lycée Bellevue. Toulouse **PC***
23 mai 2025

Oraux 1.

Exercice 1 : (INP exercice majeur)
1) Montrer que $(A, B) \to tr({}^tBA) =< A, B >$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.
Dans 2) et 3) on utilise la structure euclidienne que confère à $M_n(\mathbb{R})$ ce produit scalaire.
2)a) Vérifier que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux dans $M_n(\mathbb{R})$.
b) Déterminer une b.o.n de $M_n(\mathbb{R})$ (Utiliser les matrices élémentaires).
3) Prouver que : $A \in S_n(\mathbb{R}) \iff A^tA = A^2$.
4) On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = UV^t$.
Prouver(avec le minimum de calcul) que $A^tA = A^2$. Commentaire?
Solution :
1) Après passage je préfère donner une preuve complète de ce fait (c'est du cours!).
On pose $E = M_n(\mathbb{R})$ pour alléger.
i) La procédure renvoie bien un réel.
ii) Pour $(A, B) \in E^2$, $tr({}^tAB) = tr({}^t({}^tAB)) = tr({}^tBA)$; ce qui donne la symétrie.
iii) La linéarité de la trace et le ii) assurent de la bilinéarité.
iv) Je propose une alternative non calculatoire pour la vérification des deux derniers points en nous donnant $A \in E$.
$< A, A >= tr({}^tAA)$ et ${}^tAA \in S_n^+(\mathbb{R})$ (voir cours) donc les valeurs propres de ${}^tAA$ sont des réels positifs et sa trace (somme de celles-ci) est bien positive. D'où la positivité.
Supposons $< A, A >= 0$, cela implique que toutes les valeurs propres de ${}^tAA$ sont nulles et puisque cette matrice est dz, elle est bien nulle■
2)b) Les matrices élémentaires de E forment la base canonique de E; ce sont les $E_{i,j}$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé en i-ième ligne et j-ième colonne qui, lui, vaut 1 (Bien sûr i, j sont des entiers compris entre 1 et n).
Elles forment une b.o.n de E■

Exercice 2 : (INP exercice en direct) 10'
Pour n entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_1^\infty \frac{lnx}{x^n}dx$.
a) Nature de I_1? de I_n?.
b) Calculer, lorsque c'est possible, I_n.
Solution :
a) Il y a Cv ssi $n \geq 2$.
b) Dans le cas de convergence une IPP donne aisément la valeur■
Exercice 3 : (INP exercice en direct) 10'
Pour n entier naturel non nul, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x+1}dx$.
a) Limite de la suite (I_n)?.
b) Calculer, pour tout n, $I_n + I_{n+1}$.
c) En déduire $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.
Exercice 4 : (INP exercice majeur)
On se donne une suite de variables aléatoires (X_n) mutuellement indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose alors, pour tout n, $Y_n = X_nX_{n+1}$.
1) Déterminer la loi de chaque Y_n ainsi que son espérance et sa variance.
2) Pour $i \neq j$, donner $cov(Y_i, Y_j)$. Les (Y_n) sont elles mutuellement indépendantes?
On pose, pour tout n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Y_k$ et $Z_n = \frac{S_n}{n+1}$.
3) Espérance et variance de S_n.

4) Montrer que, pour tout $a > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Z_n - p^2| \geq a) = 0$

Exercice 5 : (INP exercice en direct) 10'
On donne X, Y deux variables aléatoires, à valeurs dans $\mathbb{N}$, définies sur un même espace probabilisé et telles que : $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{i!2^{j+1}}$
Déterminer a puis les lois marginales de X et Y.
Solution :
Fait en cours$\blacksquare$
Exercice 6 : (INP exercice en direct) 10'
On pose $f(x) = \dfrac{1}{2 - x^2}$.
1) Donner le DSE de f et son rayon de convergence.
2) Donner la loi de la v.a.d X dont f est la fonction génératrice.
3) E(X)? Loi de $Y = \dfrac{X}{2}$?
Solution :
1)Pour $x \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$.
2) Le DSE de f est à coefficients positifs et $f(1) = 1$ donc f est bien la fonction génératrice d'une v.a.d à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, ce pour tout n.
3) f étant DSE sur $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$, elle est dérivable en 1 et X possède bien une espérance mathématique finie. Celle-ci vaut $f'(1) = 2$.
Y est à valeurs demi-entières. Si k est un demi-entier $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = \dfrac{1}{2^{2k+1}}$$\blacksquare$
Exercice 7 : (INP exercice en direct) 10'
Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1 + j^n + j^{2n}$ (On rappelle que $j = exp(2i\pi/3)$.
a) Simplifier S_n, ce pour tout n.
X est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On définit Y comme celle qui renvoie le reste de la division euclidienne de X par 3.
b) Que vaut $\mathbb{P}(Y = 0)$?
Exercice 8 : (INP exercice en direct) 10'
Montrer que $A = \dfrac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$ représente un projecteur orthogonal.
Solution :
Il suffit de constater que A est symétrique et que $A^2 = A$$\blacksquare$

. . . .

Exercice 9 : (Centrale)
On se donne 3 v.a X, Y, Z indépendantes et suivant une même loi uniforme U(n).
1) Déterminer la loi, l'espérance mathématique et la variance de $X + Y$.
2) Donner la loi de $X + Y + Z$.
3) Préciser $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.
Solution :
Solution : 1) On voit que$X + Y$ prend ses valeurs dans $\{2, ..., 2n\}$ puis que (si $2 \leq k \leq 2n$) :
$\mathbb{P}(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i)$. On remarque alors que $k - i$ doit être plus grand que 1 et plus petit que n donc que :
$\mathbb{P}(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=k-n}^{k-1} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i)$.
Si $k \leq n$:$\mathbb{P}(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{k-1}{n^2}$ et
si $n + 1 \leq k \leq 2n$, :$\mathbb{P}(X + Y = k) = \displaystyle\sum_{i=k-n}^{n} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i)(2n - k + 1)\frac{1}{n^2}$.
On vérifie que la somme des probabilités donne bien 1. (Fait en ce qui me concerne)

Pour l'espérance, la linéarité de celle-ci donne $E(X+Y)=2E(X)=n+1$ et l'indépendance de X,Y fournit $V(X+Y)=2V(X)=\dfrac{n^2-1}{6}$.
NB : On peut aussi approcher la question avec les fonctions génératrices, c'est la méthode utilisée pour la question 2).
2) On voit que$S=X+Y+Z$ prend ses valeurs dans $\{3,.....,3n\}$ et que $G_S=(G_X)^3$.
En particulier pour $t\in]-1,1[$: $G_S(t)=t^3(1-t^n)^3\dfrac{1}{n^3(1-t)^3}$ donc, par dérivation DSE usuel, distributivité et changements d'indice, il vient (en posant $h(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)}{2n^3}$ pour x réel)
$G_S(t)=\sum\limits_{k=3}^{\infty}h(k)t^k-3\sum\limits_{k=n+3}^{\infty}h(k-n)t^k+3\sum\limits_{k=2n+3}^{\infty}h(k-2n)t^k-\sum\limits_{k=3n+3}^{\infty}h(k-3n)t^k$.
Par conséquent (unicité DSE) $\mathbb{P}(S=k)=h(k)$ si $k\in[\![3,n+2]\!]$ puis $\mathbb{P}(S=k)=h(k)-3h(k-n)$ si $k\in[\![n+3,2n+2]\!]$ et $\mathbb{P}(S=k)=h(k)-3h(k-n)+3h(k-2n)$ si $k\in[\![2n+3,3n]\!]$.
3) Par additivité et indépendance cette probabilité vaut $\sum\limits_{k=2}^{n}\mathbb{P}(X+Y=k)\mathbb{P}(Z=k)=\dfrac{n-1}{2n^2}$ en utilisant 1)■

Exercice 10 : (Centrale)
Pour x à préciser, on pose $f(x)=\int_0^{\pi}\ln(x^2-2xcost+1)dt$
1) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est paire.
2) Montrer que, pour tout réel x, $f(x^2)=2f(x)$. En déduire explicitement une expression de f (Distinguer les cas $|x|>1$, $|x|<1$ et $|x|=1$).
Solution : 1) On peut observer que $x^2-2xcost+1=(x-exp(it))(x-exp(-it))=|x-exp(it)|^2$, ce pour tout réel x. Les seuls réels appartenant à $\mathbb{U}$ étant 1 et -1, le module précédent est strictement positif pour tout réel différent de ±1. Posons alors $g(x,t)=ln(x^2-2xcost+1)$ pour de tels x et pour $t\in[0,\pi]$, on voit que $t\in[0,\pi]\to g(x,t)$ est continue donc que f est définie pour de tels x. Si maintenant $x=1$, $t\to g(x,t)=\ln(2)+\ln(1-\cos(t))$ est continue sur $]0,\pi]$ et en 0 on dispose de l'information suivante $\ln(1-\cos(t))\sim\ln(t^2/2)$ qui fournit la convergence de l'IG pour $x=1$ donc f est aussi définie en 1; la parité (qui se prouve avec le changement de variable affine $t=\pi-u$) assure que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2) On vérifie que $f(x)+f(-x)=\int_0^{\pi}\ln(x^4-2x^2\cos(2t)+1)dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\ln(x^4-2x^2\cos(v)+1)dv$ (en posant $t=\dfrac{v}{2}$. Chasles en intercalant π et un dernier changement de variable $v=2\pi-w$ pour $v\in[\pi,2\pi]$ conduit enfin à $f(x)+f(-x)=f(x^2)$ soit, par parité, la relation voulue.
En utilisant le théorème de continuité sous le signe intégral (domination sur tout segment puisqu'on intègre sur un segment et que g est bornée sur tout compact), on montre que f est continue sur tout segment de $\mathbb{R}\setminus -1,1\}$ puis, par itération de la relation $f(x^2)=2f(x)$, on a $f(x^{2^n})=2^nf(x)$ ou $f(x)=\dfrac{f(x^{2^n})}{2^n}$ et, avec $n\to\infty$, il vient $f(x)$ =0 sur]-1,1[. La relation (pour x non nul) $f(1/x)=f(x)-2\pi ln|x|$ (à établir et c'est facile) donne alors $f(x)=2\pi ln|x|$ pour $|x|>1$. Cette égalité reste valable pour $x=\pm1$ ■

Exercice 11 : (Centrale)
Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,2\pi]$ dans $\mathbb{C}^*$ telle que $f(0)=f(2\pi)$. On pose $2i\pi a=\int_0^{2\pi}\dfrac{f'(t)}{f(t)}dt$.
1) Etablir que, pour $x\in[0,2\pi]$, $f(x)=f(0)exp(\int_0^x\dfrac{f'(t)}{f(t)}dt)$.
2) Prouver que a est un entier relatif.
3) Calculer ce nombre pour $f:t\to e^{int}$.
4) Même question avec $f:t\to Re^{int}+(1+i)$, où $R>0$.
Solution : 1) les deux membres de l'égalité vérifient de même problème de Cauchy : $fy'-f'y=0$ et $y(0)=f(0)$.
2) Prendre $x=2\pi$ dans l'égalité du 1).
3) On trouve $a=n$.
4) ? la fonction pouvant s'annuler....■
....
Exercice 12 : (IMT)
Soient X,Y,Z trois v.a.d mutuellement indépendantes suivant une même loi géométrique de paramètre 1/3.
Que vaut $\mathbb{P}(X=Y=Z)$?

Exercice 13 : (Mines-Telecom)
Solution : Sigma-additivité puis indépendance et calcul de somme de série géométrique■
Rayon de convergence et somme de $\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n$?
Solution : $R=1$ puis décomposer en éléments simples $\frac{x^2+4x-1}{x+2}$ et utiliser les DSE usuels■
. . . .

Exercice 14 : (Mines, 15 ' de préparation)
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$, pour n entier naturel non nul, $y''+y'+y=\frac{\cos(nx)}{n^3}=u_n(x)$.
2) Montrer que $f=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $y''+y'+y=f$.
Exercice 15 : (Mines, direct)
Déterminer $\underset{(a,b)\in\mathbb{R}^2}{inf} (\int_0^1 (\sqrt{t}-(at+b))^2 dt)$.

Solution En se plaçant dans l'espace préhilbertien $(C^0([0,1])=E,.)$, où $f.g=\int_0^1 fg$ (pour f,g dans E) et en posant $F=\mathbb{R}_1[X]$ et $f:t\rightarrow\sqrt{t}$, il nous faut évaluer $d(f,F)^2$ autrement dit $||f-p_F(f)||^2$. Comme $f-p_F(f)$ est orthogonal aux fonctions $t\rightarrow 1, tt\rightarrow t$, il vient en posant $p_F(f)(t)=a+bt$ (pour tout $t\in[0,1]$ $a+b/2=2/3$ et $a/2+b/3=2/5$ soit $a=4/15$ et $b=4/5$. Reste à finir le calcul; avec Pythagore on a $||f-p_F(f)||^2=||f||^2-||p_F(f)||^2=1/2-112/225=1/225$. A vérifier !■
Exercice 16 : (Mines , 15 ' de préparation)
1) Pour $a>-1$, montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+asin^2(t)}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$ à l'aide du changement de variable $x=tant$.
2) Nature en fonction du réel positif α de $\sum_{n\geq 0}\int_0^{\pi} \frac{dt}{1+(n\pi)^{\alpha} sin^2(t)}$.
3) Même question pour $\sum_{n\geq 0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^{\alpha} sin^2(t)}$.
4) En déduire la nature de $\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^{\alpha} sin^2(t)}$.

Exercice 17 : (Mines direct et classique du concours)
Pour $P\in E=\mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P)(X)=X^nP(\frac{1}{X})$.
1) Vérifier que l'on définit bien un endomorphisme de E.
2) Montrer de plusieurs manières que f est diagonalisable.
3) Trouver une base de diagonalisation de f.
Solution :2) Matriciellement et en observant que f est une symétrie.
3) $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\in E_1$ ssi $a_{n-k}=a_k$ et $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\in E_{-1}$ ssi $a_{n-k}=-a_k$■
Exercice 18 : Mines direct
Nature et somme de $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$.
Solution : Convergence = Leibniz + CVD.
Somme : Somme partielle (série géométrique) et CVD à nouveau pour contrôler le reste■
Exercice 19 : Mines avec préparation
On pose, pour $n\geq 1$: $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$.
1) Prouver que $S_n\sim 2\sqrt{n}$.
2) Etablir que $(S_n-2\sqrt{n})$ converge vers un réel L dont on donnera le signe.
3) Equivalent de $S_n-2\sqrt{n}-L$?
Exercice 20 : Mines direct
Trouver une condition pour que $A\in O_3(\mathbb{R})$ soit triangulaire. Généraliser.
Exercice 21 : Mines direct
Nature de $\int_0^{\infty}\frac{sinx}{sinx+\sqrt{x}}dx$?

Solution : 1) La décroissance sur $[1,+\infty[$ de $f : x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ donne : $\displaystyle\int_k^{k+1} f \leq f(k)$, ce pour tout k entier naturel non nul et $f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f$ pour $k \geq 2$. Ainsi par sommation, il vient (pour tout n non nul) $\displaystyle\int_1^{n+1} f \leq S_n \leq 1 + \int_1^n f$. Soit aussi (et à plus forte raison) : $2\sqrt{n} - 2 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$. Le théorème des gendarmes donnel'équivalent souhaité.
2) Pour tout n non nul (on pose $u_n = S_n - 2\sqrt{n}$, on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ soit $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n+1}} \leq 0$. La suite (u_n) est donc décroissante et (par l'encadrement trouvé eb 1)) à termes dans le segment $[-2,-1]$ (elle est minorée) ainsi elle converge vers une limite dans ce même segment.
3) On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ (pour tout n non nul); la série Σv_n converge (lien suite série) et, par ailleurs (télescopage) le reste d'ordre $n-1$ (noté V_n) de cette série vaut $L - u_n$ (donc l'opoosée de la suite dont nous devons trouver un équivalent. Jusqu'ici vous pouviez être autonome. Là l'examinateur aurait pris les choses en main en vous demandant un équivalent de $v - n$ (réponse : $\dfrac{-1}{n^{3/2}}$ avec le b)). Puis il vous aurait demandé d'admettre que le reste de la série $\Sigma\dfrac{-1}{n^{3/2}}$ est équivalent à V_n. On obtient alors par considération d'aires (cf 1)) un équivalent de celui-ci : $-\displaystyle\int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} = -\frac{2}{\sqrt{n}}$. L'équivalent cherché est l'opposé.

Exercice 22 : Mines direct
Trouver une condition pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$ soit triangulaire. Généraliser.
Solution : On cherche donc une matrice triangulaire supérieure (sans perte de généralité) dont les vecteurs colonnes forment une b.o.n de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. On voit rapidement que cela contraint la matrice à être diagonale avec comme éléments diagonaux des 1 ou des -1. Idem pour le cas général.

Exercice 23 : Mines direct
Nature de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{sinx}{sinx + \sqrt{x}} dx$?
Solution : C'est un classique des Mines.
On note f l'intégrande. Celle-ci est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) \to 0$ si $x \to 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 f$ converge. Cela pour corriger une imprécision.

....

Exercice 24 : (X)
On se donne σ une bijection de $\mathbb{N}^*$ sur lui-même et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ une STP.
a) En revenant aux sommes partielles montrer que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_{\sigma(n)}$ sont de même nature.
b) Déterminer les natures des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$.
c) Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$?
(Plus délicat) (Ind : Montrer que l'ensemble $k \in \{2n, ..., 3n\}$ tels que $\sigma(k) \geq k$ possède au moins n éléments puis minorer le reste d'ordre $3n$).
Exercice 25 : (ENS)
1) Montrer que si m est un entier relatif, $m^3 - m$ est divisible par 3.
2) Soit $A \in M_2(\mathbb{Z})$, établir que $tr(A^3) - tr(A)$ est divisible par 3.
3) Généraliser à toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Exercice 26 : (X-ENS)
Une matrice carrée d'ordre n et à coefficients réels est dite de Bourdaud si les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de la matrice (avec nombre d'apparitions sur la diagonale correspondant à la multiplicité pour chaque valeur propre).
On note B_n leur ensemble.
1) B_n est-il convexe? Fermé?

2) Donner un élément de B_3 non triangulaire.
3) Quels sont les éléments de $B_n \cap S_n(\mathbb{R})$?

Exercice 27 : (X-ENS)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série absolument convergente dont la somme est notée S.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$.

1) Prouver que $\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = S$.

2) Montrer que le résultat précédent reste vrai si la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ n'est que convergente.