Devoir surveillé n°8 : Concours Blanc

PCSI, Bellevue, 2024-2025

PCSI, Bellevue, 2024-2025
Devoir surveillé de mathématiques n°8 : Concours blanc

L'usage de la calculatrice est interdit.

Le travail doit être convenablement présenté. L'écriture, l'orthographe et la rédaction doivent être soignées. Aucune abréviation n'est autorisée.

Chaque question doit être traitée avec un souci de rigueur et de clarté. Sauf mention explicite, les réponses doivent être justifiées. Les résultats essentiels peuvent être encadrés ou soulignés. Il ne faut pas oublier que c'est la conclusion explicite d'un raisonnement qui doit achever la réponse à une question.

Il est demandé de rendre une copie indépendante pour chacune des quatre parties. Et dans l'éventualité où une partie ne serait pas traitée, il est quand même demandé de rendre une copie correspondante à cette partie. *Pour chaque copie, les feuilles doivent être numérotées et rangées dans le bon ordre.*

Partie 1

On note E l'ensemble des couples de nombres réels strictement positifs (x, y) tels que $x \neq y$ et $x^x = y^y$ c'est-à-dire

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } x \neq y \text{ et } x^x = y^y\}$$

Le but de ce problème est d'étudier cet ensemble E.

On introduit la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x\ln(x) \end{array}$$

1)a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée. En déduire les variations strictes de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
1)b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui, son prolongement par continuité est-il dérivable en 0 ?
1)c) Démontrer que $f(]0,1[) = \left[-\frac{1}{e}, 0\right[$.
1)d) Tracer une représentation graphique de la fonction f.
1)e) Démontrer que $E \neq \emptyset$ si et seulement si f n'est pas injective sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note respectivement g et h les restrictions de f à $]0, \frac{1}{e}[$ et $]\frac{1}{e}, 1[$.

2)a) Justifier que la fonction g réalise une bijection de $]0, \frac{1}{e}[$ dans un intervalle à déterminer. Indiquer les variations strictes de g^{-1} sur cet intervalle. Justifier que la bijection réciproque g^{-1} est dérivable sur ce même intervalle et donner sa fonction dérivée en fonction de g^{-1}.
2)b) De même, mais on ne demande pas de le justifier, la fonction h réalise une bijection de $]\frac{1}{e}, 1[$ dans un intervalle. Sans justifier, indiquer quel est cet intervalle. La fonction h^{-1} est dérivable sur cet intervalle mais on ne demande pas de le justifier. Sans justifier, indiquer les variations strictes de h^{-1} et donner sa fonction dérivée.

3)a) Démontrer que si $E \neq \emptyset$ alors $\forall (x, y) \in E$, on a $x < 1$ et $y < 1$.
3)b) Démontrer que si $E \neq \emptyset$ alors $\forall (x, y) \in E$, on a $x < \frac{1}{e} < y$ ou $y < \frac{1}{e} < x$.
3)c) Démontrer que $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $(\frac{1}{e}, y) \notin E$. De même, mais on ne demande pas de le justifier, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, \frac{1}{e}) \notin E$.

4)a) Soit $x \in]0, \frac{1}{e}[$. Démontrer qu'il existe un unique $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x, y) \in E$. On le notera $\varphi(x)$ et on l'exprimera à l'aide de x et des fonctions introduites jusqu'à présent.
4)b) Soit $x \in]\frac{1}{e}, 1[$. Il existe un unique $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $(x, y) \in E$, mais on ne demande pas de le justifier. On le notera $\varphi(x)$. Sans justifier, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de x et des fonctions introduites jusqu'à présent.

Les questions 4)a) et 4)b) précédentes définissent une fonction φ sur $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, 1[$.

5)a) Justifier que φ est dérivable sur $]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, 1[$ et calculer sa fonction dérivée. Pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, 1[$, exprimer $\varphi'(x)$ à l'aide de x et $\varphi(x)$.
5)b) Déterminer les variations de φ sur $]0, \frac{1}{e}[$ puis déterminer les limites de φ en 0 et à gauche de $\frac{1}{e}$.
5)c) Sans justifier, indiquer les variations de φ sur $]\frac{1}{e}, 1[$ et ses limites à droite de $\frac{1}{e}$ et en 1.

On peut donc prolonger par continuité la fonction φ en 0, $\frac{1}{e}$ et 1. On notera désormais φ cette fonction ainsi prolongée sur $[0, 1]$.

6)a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de $\frac{1}{e}$ de la fonction f.
6)b) Justifier que $\forall x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, 1[$, $f\left(\varphi(x)\right) = f(x)$, puis démontrer que

$$\left(\varphi(x) - \frac{1}{e}\right)^2 \underset{x \to \frac{1}{e}}{\sim} \left(x - \frac{1}{e}\right)^2$$

6)c) Pour tout $x \in]0, \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}, 1[$, déterminer le signe de $\frac{\varphi(x) - \frac{1}{e}}{x - \frac{1}{e}}$.
6)d) Démontrer que la fonction φ est dérivable en $\frac{1}{e}$ et donner son nombre dérivé en $\frac{1}{e}$.

7)a) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?
7)b) Sans justifier, indiquer si la fonction φ est dérivable en 1 et, si elle est dérivable, quel est son nombre dérivé.

8) Tracer une représentation graphique de la fonction φ sur $[0, 1]$. Quel est le lien avec l'ensemble E ?

Partie 2

On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites numériques réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\beta \neq 0$. On note $E_{\alpha,\beta}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$$

c'est-à-dire :

$$E_{\alpha,\beta} = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ telles que } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n\right\}.$$

1) Démontrer que $E_{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On considère la suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{\alpha,\beta}$ telle que $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ et la suite $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $E_{\alpha,\beta}$ telle que $b_0 = 0$ et $b_1 = 1$.

2) Calculer en fonction de α et β les termes a_2, a_3, a_4 et b_2, b_3, b_4.

On note $\mathcal{E} = (a, b) = ((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}})$ la famille constituée de ces deux suites.

3) Démontrer que la famille $\mathcal{E}$ est libre.

4)a) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{\alpha,\beta}$. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une condition nécessaire sur le couple (λ, μ) pour que $u = \lambda.a + \mu.b$. Puis vérifier que la condition trouvée est également suffisante.
4)b) Démontrer que la famille $\mathcal{E}$ engendre $E_{\alpha,\beta}$.

5) Quelle est la dimension de $E_{\alpha,\beta}$?

6) Soit $r \in \mathbb{R}^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient-elle à $E_{\alpha,\beta}$? *(Bien que ce soit un résultat de cours, on demande de justifier la réponse par une démonstration.)*

On considère le polynôme $P(X) = X^2 - \alpha X - \beta$. On note Δ son discriminant. On suppose désormais que $\Delta > 0$ et on note r_1 et r_2 les deux racines réelles du polynôme $P(X)$.

7)a) Justifier que les suites géométriques $g = (r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $h = (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $E_{\alpha,\beta}$.
7)b) Démontrer que la famille $\mathcal{B} = (g, h)$ est libre.
7)c) En déduire que la famille $\mathcal{B}$ est une base de $E_{\alpha,\beta}$.

8) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = \frac{3}{4} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \frac{1}{2}v_{n+1} + \frac{1}{4}v_n. \end{cases}$$

Déterminer en fonction de n le terme général de cette suite.

Partie 3

Soit N un entier fixé strictement supérieur à 4. On lance N fois consécutives une pièce équilibrée. Les lancers sont indépendants les uns des autres. On note (Ω, P) l'espace probabilisé qui modélise cette expérience aléatoire.

1) Donner une description ensembliste de Ω.

On note $[\![1, N]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre 1 et N inclus. Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on note Q_n l'événement « obtenir pile au n-ème lancer » et F_n l'événement « obtenir face au n-ème lancer ».
2)a) Étant donné $n \in [\![1, N]\!]$, justifier que la famille d'événements (Q_n, F_n) est un système complet d'événements.
2)b) Pour cette question, on suppose que $N = 5$. Donner une description ensembliste de l'événement Q_4.
2)c) Pour cette question, on suppose que $N = 5$. Décrire, à l'aide des événements introduits dans l'énoncé, l'événement élémentaire « obtenir pile puis face puis pile puis face puis pile ».

3) Quelle est la probabilité de l'événement « obtenir pile à tous les lancers » ? Justifier.

Deux joueurs A et B utilisent cette suite de lancers pour jouer au jeu suivant :
- le joueur A gagne si la séquence « pile, pile, face » apparaît avant la séquence « face, pile pile »,
- le joueur B gagne si la séquence « face, pile pile » apparaît avant la séquence « pile, pile, face »,
- il y a match nul sinon.

Pour tout $n \in [\![3, N]\!]$, on note A_n l'événement « le joueur A gagne à l'issue du n-ème lancer et aucun des deux joueurs n'avait gagné avant » puis $a_n = P(A_n)$.

4)a) Calculer a_3.
4)b) Démontrer que $a_4 = \frac{1}{16}$.
4)c) Pour tout $n \in [\![3, N]\!]$, calculer a_n.
4)d) Calculer la probabilité de l'événement « le joueur A gagne ». On note g_N cette probabilité.
4)e) Déterminer la limite de g_N quand N tend vers $+\infty$. Interpréter.

Pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on note D_n l'événement « ne jamais obtenir deux piles consécutifs au cours des n premiers lancers » et on note d_n la probabilité de cet événement, c'est-à-dire $d_n = P(D_n)$.

5)a) Calculer d_1, d_2 et d_3.
5)b) Démontrer que pour tout $n \in [\![1, N-2]\!]$, la famille $(Q_{n+1} \cap Q_{n+2}, Q_{n+1} \cap F_{n+2}, F_{n+1} \cap Q_{n+2}, F_{n+1} \cap F_{n+2})$

est un système complet d'événements.
5)c) Démontrer que pour tout $n \in [\![1, N-2]\!]$, on a :

$$D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2})$$

5)d) En déduire que pour tout $n \in [\![1, N-2]\!]$, on a :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2} d_{n+1} + \frac{1}{4} d_n$$

5)e) Déterminer, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, la valeur exacte de d_n. *(On pourra utiliser le résultat obtenu dans la partie d'algèbre linéaire ou utiliser un théorème du cours.)*

Partie 4

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(H) \qquad 2x(1-x)y' + y = 0.$$

1)a) Sur quels intervalles peut-on normaliser cette équation ? Quelle est l'équation différentielle normalisée équivalente à (H) sur chacun de ces intervalles ?
1)b) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall x \in \,]0,1[, \; \frac{1}{2x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}.$$

1)c) Soit I un intervalle de longueur non nulle inclus dans $]0,1[$. Résoudre (H) sur l'intervalle I.

2) Résoudre sur l'intervalle $]0,1[$ l'équation différentielle suivante :

$$(L) \qquad 2x(1-x)y' + y = (1-x)\sqrt{\frac{x}{1+x}}.$$

(Cette résolution de (L) ne sera pas utile pour la suite.)

On considère l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$(E) \qquad xy' + 2y(1-y) = 0.$$

Soit u une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$.
3)a) Montrer que u est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
3)b) Justifier que u admet une limite finie en 0 et une limite finie en $+\infty$. En déduire que u réalise une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle de la forme $]\alpha, \beta[$ avec $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.
3)c) On note v la bijection réciproque de u. Montrer que v est solution de (H) sur $]\alpha, \beta[$.
3)d) En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall x \in \,]0, +\infty[, \quad u(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{c}\right)^2}.$$

4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs dans $]0,1[$.