Corrigé du concours blanc

PCSI, Bellevue, 2024-2025

PCSI, Bellevue, 2024-2025
Corrigé du concours blanc

Partie 1

1)a) La fonction f est le produit des fonctions $x \mapsto x$ et ln, toutes deux usuellement dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = 1 + \ln(x).$$

On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e},\quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e} \text{ et } f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$

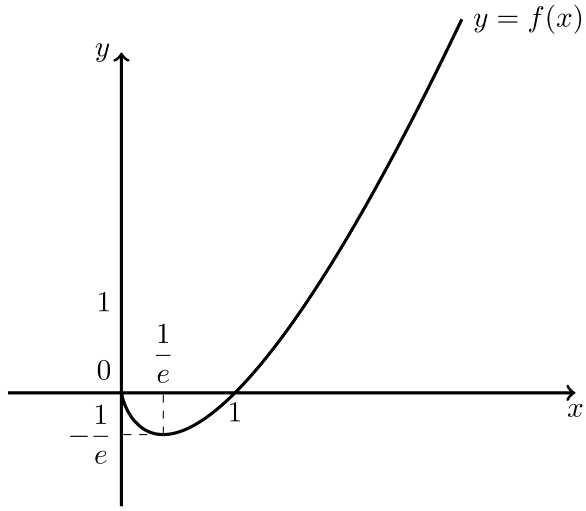
La fonction f est donc strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$, et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$.

1)b) Par croissances comparées, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, en prenant $f(0) = 0$.
De plus, $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$. De plus d'après ce qui précède, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue par construction en 0. Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, le prolongement de f n'est pas dérivable en 0. (Par contre, le graphe de f présente une tangente verticale au point d'abscisse 0.)

1)c) Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$, et croissante sur $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$, on a :

$$\begin{aligned} f(]0,1[) &= f\left(\left]0, \frac{1}{e}\right] \cup \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right) \\ &= \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x\to 0} f(x)\right[\cup \left]f\left(\frac{1}{e}\right), f(1)\right[\\ &= \left[-\frac{1}{e}, 0\right[\cup \left]-\frac{1}{e}, 0\right[\\ &= \left[-\frac{1}{e}, 0\right[. \end{aligned}$$

1)d) (On remarque de plus que $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$ et $f(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$).



1)e) On a la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} E \neq \emptyset &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ x \neq y \text{ et } x^x = y^y\right) \\ &\Leftrightarrow \left(\exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ x \neq y \text{ et } e^{x\ln(x)} = e^{y\ln(y)}\right) \\ &\underset{\text{par injectivité de exp}}{\Leftrightarrow} \left(\exists (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*,\ x \neq y \text{ et } f(x) = f(y)\right) \\ &\Leftrightarrow \left(f \text{ n'est pas injective sur } \mathbb{R}_+^*\right). \end{aligned}$$

2)a) D'après la question 1)b), la fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ donc, d'après le théorème de la bijection, la fonction g réalise une bijection de $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ dans $\left]\lim_{x\to\frac{1}{e}} g(x), \lim_{x\to 0} g(x)\right[= \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$. De

plus, sa bijection réciproque g^{-1} est également strictement décroissante sur $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$.
Comme g est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ et que sa dérivée égale à f' sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$ ne s'annule pas d'après 1)a), g^{-1} est également dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$, et on a :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[, \ (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{1+\ln\left(g^{-1}(x)\right)}.$$

2)b) En procédant de même : h réalise une bijection de $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$ dans $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$. Sa bijection réciproque h^{-1} est strictement croissante sur $\left]-\frac{1}{e}, 0\right[$, et : $\forall x \in \left]-\frac{1}{e}, 0\right[$, $(h^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+\ln\left(h^{-1}(x)\right)}$.

3)a) On suppose que $E \neq \emptyset$. Soit $(x, y) \in E$. Alors $x \neq y$ et $f(x) = f(y)$. Supposons que $x \geq 1$. Alors, d'après la question 1)a), $f(x) \geq f(1) = 0$, donc $f(y) \geq 0$. Donc, d'après la question 1)c), $y \geq 1$. Comme la fonction f est injective (car strictement croissante) sur $[1, +\infty[$, on a donc $x = y$, ce qui est absurde. Donc $x < 1$. De même, $y < 1$. 3)b) On suppose que $E \neq \emptyset$. Soit $(x, y) \in E$. Alors $x, y \in]0, 1[$ et $f(y) = f(x)$. D'après la question 2), $g^{-1}(f(x)) \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ et $h^{-1}(f(x)) \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$ sont deux antécédents de $f(x)$ par f. De plus d'après 1)a), f est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ donc $f(x)$ y a au plus un antécédent par f. Et f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right[$ donc $f(x)$ y a au plus un antécédent par f. Donc $g^{-1}(f(x)) \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$ et $h^{-1}(f(x)) \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$ sont exactement les deux antécédents de $f(x)$ par f. On a donc :

$$\left(x = g^{-1}(f(x)) \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\text{ et } y = h^{-1}(f(x)) \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right) \quad \text{ou} \quad \left(y = g^{-1}(f(x)) \in \left]0, \frac{1}{e}\right[\text{ et } x = h^{-1}(f(x)) \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right).$$

3)c)Comme f est strictement décroissante sur $]0, \frac{1}{e}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ a un seul antécédent par f, donc $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, $(\frac{1}{e}, y) \notin E$.

4)a) Notons $y = h^{-1}(f(x))$. Alors $y \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$, donc $x \neq y$; et $f(y) = h(h^{-1}(f(x))) = f(x)$, donc $(x, y) \in E$. Donc y existe.
De plus, soient y_1, y_2 tels que (x, y_1) et $(x, y_2) \in E$. Alors, d'après la question 3)b), $y_1, y_2 \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$; et, par construction, $f(y_1) = f(x) = f(y_2)$. Or la fonction f est injective (car strictement croissante) sur $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$, donc $y_1 = y_2$. Donc y est unique. On a donc :

$$y = \varphi(x) = y = h^{-1}(f(x)).$$

4)b) De même : $\varphi(x) = g^{-1}(f(x))$.

5)a) Sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$, on a $\varphi = h^{-1} \circ f$, où h et f sont dérivables ; donc φ est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$. De même, φ est dérivable sur $\left]\frac{1}{e}, 1\right[$, donc φ est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, 1\right[$.
D'après les questions 2)b) et 4)b), on a :

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[, \ \varphi'(x) = f'(x) \times (h^{-1})'(f(x)) = \frac{1+\ln(x)}{1+\ln\left(g^{-1}(f(x))\right)} = \frac{1+\ln(x)}{1+\ln\left(\varphi(x)\right)},$$

et de même : $\forall x \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$, $\varphi'(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1+\ln\left(\varphi(x)\right)}$.
5)b) On a : $\forall x \in \left]0, \frac{1}{e}\right[$, $\varphi(x) \in \left]\frac{1}{e}, 1\right[$, donc $1 + \ln(x) < 0$ et $1 + \ln(\varphi(x)) > 0$; donc $\varphi'(x) < 0$. Donc φ est strictement décroissante sur $\left]0, \frac{1}{e}\right[$.
De plus : $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\varphi(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \lim\limits_{x \to 0} h^{-1}(x) = 1$; et $f(x) \underset{x \to \frac{1}{e},\ x < \frac{1}{e}}{\longrightarrow} -\frac{1}{e}$, donc $\varphi(x) \underset{x \to \frac{1}{e},\ x < \frac{1}{e}}{\longrightarrow} \lim\limits_{x \to -\frac{1}{e}} h^{-1}(x) = \frac{1}{e}$.

5)c) De même, φ est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{e},1\right[$.

On a : $f(x) \underset{x\to\frac{1}{e},\ x>\frac{1}{e}}{\longrightarrow} -\frac{1}{e}$, donc $\varphi(x) \underset{x\to\frac{1}{e},\ x>\frac{1}{e}}{\longrightarrow} \lim_{x\to-\frac{1}{e}} g^{-1}(x) = \frac{1}{e}$; et $f(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$, donc $\varphi(x) \underset{x\to1}{\longrightarrow} \lim_{x\to0} g^{-1}(x) = 0$.

6)a) Quand $x \to \frac{1}{e}$, $t = x - \frac{1}{e} \to 0$, donc :

$$\begin{aligned}
f(x) &= x\ln(x)\\
&= \left(\frac{1}{e}+t\right)\ln\left(t+\frac{1}{e}\right)\\
&= \left(\frac{1}{e}+t\right)\left[\ln\left(\frac{1}{e}\right)+\ln(1+et)\right]\\
&= \left(\frac{1}{e}+t\right)\left(-1+et-\frac{e^2t^2}{2}+\underset{t\to0}{o}(t^2)\right)\\
&= -\frac{1}{e}+\frac{e}{2}t^2+\underset{t\to0}{o}(t^2)\\
&= -\frac{1}{e}+\frac{e}{2}\left(x-\frac{1}{e}\right)^2+\underset{x\to\frac{1}{e}}{o}\left(\left(x-\frac{1}{e}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

6)b) On a, par construction : $\forall x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[$, $f(\varphi(x)) = h\left(h^{-1}(f(x)\right) = f(x)$, et de même : $\forall x \in \left]\frac{1}{e},1\right[$, $f(\varphi(x)) = f(x)$. Donc, d'après la question précédente, comme $\varphi(x) \underset{x\to\frac{1}{e}}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$:

$$-\frac{1}{e}+\frac{e}{2}\left(\varphi(x)-\frac{1}{e}\right)^2+\underset{x\to\frac{1}{e}}{o}\left(\left(\varphi(x)-\frac{1}{e}\right)^2\right) = -\frac{1}{e}+\frac{e}{2}\left(x-\frac{1}{e}\right)^2+\underset{x\to\frac{1}{e}}{o}\left(\left(x-\frac{1}{e}\right)^2\right),$$

donc

$$\left(\varphi(x)-\frac{1}{e}\right)^2\left(1+\underset{x\to\frac{1}{e}}{o}(1)\right) = \left(x-\frac{1}{e}\right)^2\left(1+\underset{x\to\frac{1}{e}}{o}(1)\right),$$

et donc :

$$\left(\varphi(x)-\frac{1}{e}\right)^2 \underset{x\to\frac{1}{e}}{\sim} \left(x-\frac{1}{e}\right)^2.$$

6)c) Soit $x \in \left]0,\frac{1}{e}\right[$. Alors $\varphi(x) \in \left]\frac{1}{e},1\right[$, donc $\varphi(x)-\frac{1}{e} > 0$ et $x-\frac{1}{e} < 0$. Donc $\frac{\varphi(x)-\frac{1}{e}}{x-\frac{1}{e}} < 0$. De même, pour $x \in \left]\frac{1}{e},1\right[$, $\frac{\varphi(x)-\frac{1}{e}}{x-\frac{1}{e}} < 0$.

6)d) D'après la question 6)b) :

$$\left(\frac{\varphi(x)-\frac{1}{e}}{x-\frac{1}{e}}\right)^2 \underset{x\to\frac{1}{e}}{\longrightarrow} 1,$$

donc, d'après la question 6)c),

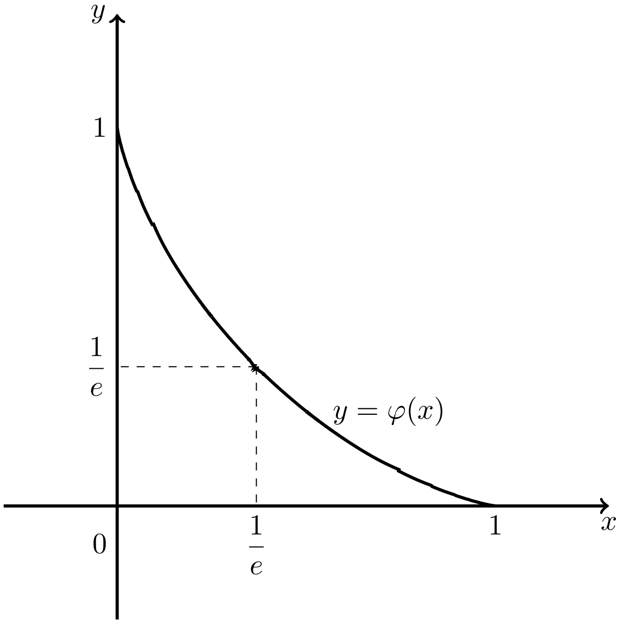
$$\frac{\varphi(x)-\frac{1}{e}}{x-\frac{1}{e}} \underset{x\to\frac{1}{e}}{\longrightarrow} -1.$$

Par définition, la fonction φ est donc dérivable en $\frac{1}{e}$, et $\varphi'\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

7)a) On a φ continue en 0 par construction, dérivable sur $]0,\frac{1}{e}[$ d'après 5)a) et $\varphi'(x) = \frac{1+\ln(x)}{1+\ln(\varphi(x))} \underset{x\to0}{\longrightarrow} -\infty$ donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction φ n'est pas dérivable en 0.

7)b) De même : $\varphi'(x) = \frac{1+\ln(x)}{1+\ln(\varphi(x))} \underset{x\to1}{\longrightarrow} 0$ donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée, la fonction φ est dérivable en 1 avec $\varphi'(1) = 0$.

8)



Par construction : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, le couple (x, y) appartient à E si et seulement si $(x, y) \in \left(\left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right)^2$ et $y = \varphi(x)$; c'est-à-dire que E est la restriction du graphe de φ à $\left]0, \frac{1}{e}\right[\cup \left]\frac{1}{e}, 1\right[$.

1) • Le vecteur nul de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite nulle $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 = \alpha \times 0 + \beta \times 0$ donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E_{\alpha,\beta}$.
• Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}, v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{\alpha,\beta}$. On a $\lambda.u + v = \lambda.(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda \times u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $u, v \in E_{\alpha,\beta}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n$ et $v_{n+2} = \alpha v_{n+1} + \beta v_n$ donc par conséquent $(\lambda u_{n+2} + v_{n+2}) = \lambda(\alpha u_{n+1} + \beta u_n) + (\alpha v_{n+1} + \beta v_n) = \alpha(\lambda u_{n+1} + v_{n+1}) + \beta(\lambda u_n + v_n)$. Donc $\lambda.u + v \in E_{\alpha,\beta}$.
D'après les deux points précédents, $E_{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

2) Par définition, on a $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ et $a \in E_{\alpha,\beta}$ c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+2} = \alpha a_{n+1} + \beta a_n$.
On en déduit que :
$a_2 = \alpha a_1 + \beta a_0 = \beta$,
$a_3 = \alpha a_2 + \beta a_1 = \alpha\beta$,
$a_4 = \alpha a_3 + \beta a_2 = \alpha^2\beta + \beta^2$.
De façon analogue, on a :
$b_2 = \alpha b_1 + \beta b_0 = \alpha$,
$b_3 = \alpha b_2 + \beta b_1 = \alpha^2 + \beta$,
$b_4 = \alpha b_3 + \beta b_2 = \alpha^3 + 2\alpha\beta$.

3) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 & \lambda.a + \mu.b = 0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \\
\Rightarrow & \lambda.(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu.(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
\Rightarrow & (\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} \\
\Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda a_n + \mu b_n = 0 \qquad \text{par définition de l'égalité de deux suites} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 = 0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{cases}
\end{array}$$

On a démontré que la famille (a, b) est libre.

4)a) • Étant donné $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on a les implications suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 & \lambda.a + \mu.b = u \\
\Rightarrow & \lambda.(a_n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu.(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
\Rightarrow & (\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \\
\Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda a_n + \mu b_n = u_n \qquad \text{par définition de l'égalité de deux suites} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \lambda a_0 + \mu b_0 = u_0 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 = u_1 \end{cases} \\
\Rightarrow & \begin{cases} \lambda = u_0 \\ \mu = u_1 \end{cases}
\end{array}$$

D'après ce qui précède, une condition nécessaire sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que $u = \lambda.a + \mu.b$ est $(\lambda, \mu) = (u_0, u_1)$.
• Réciproquement, il faut vérifier que cette condition est suffisante c'est-à-dire que $u = u_0.a + u_1.b$, ce qui est équivalent à $(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 a_n + u_1 b_n)$.
Pour cela, on va démontrer par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n) = [u_n = u_0 a_n + u_1 b_n]$ est vraie.
Initialisation : *Il faut démontrer que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.*
On a $u_0 a_0 + u_1 b_0 = u_0$ donc $P(0)$ est vraie et $u_0 a_1 + u_1 b_1 = u_1$ donc $P(1)$ est vraie.
Hérédité : *Il faut démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(P(n)$ et $P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$.*
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies c'est-à-dire que $u_n = u_0 a_n + u_1 b_n$ et $u_{n+1} = u_0 a_{n+1} + u_1 b_{n+1}$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 & u_0 a_{n+2} + u_1 b_{n+2} & \\
= & u_0(\alpha a_{n+1} + \beta a_n) + u_1(\alpha b_{n+1} + \beta b_n) & \text{car } a, b \in E_{\alpha,\beta} \\
= & \alpha(u_0 a_{n+1} + u_1 b_{n+1}) + \beta(u_0 a_n + u_1 b_n) & \\
= & \alpha u_{n+1} + \beta u_n & \text{car } P(n) \text{ et } P(n+1) \text{ sont vraies} \\
= & u_{n+2} & \text{car } u \in E_{\alpha,\beta}
\end{array}$$

On a déduit que $P(n+2)$ est vraie.
Conclusion : d'après le principe de récurrence double, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion $P(n)$ est vraie c'est-à-dire que

$u = u_0.a + u_1.b$.
On a démontré que si $(\lambda, \mu) = (u_0, u_1)$ alors $u = u_0.a + u_1.b$ c'est-à-dire qu'une condition suffisante sur $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ pour que $u = \lambda.a + \mu.b$ est $(\lambda, \mu) = (u_0, u_1)$.

4)b) Par définition, on a $a, b \in E_{\alpha,\beta}$ (donc, comme d'après 1), $E_{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel, on a l'inclusion $Vect(a, b) \subset E_{\alpha,\beta}$).
Réciproquement, on a démontré à la question précédente que pour tout $u \in E_{\alpha,\beta}$, il existe $\lambda = u_0, \mu = u_1 \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda.a + \mu.b$ c'est-à-dire que $E_{\alpha,\beta} \subset Vect(a, b)$.
D'après les deux inclusions précédentes, on a $E_{\alpha,\beta} = Vect(a, b)$ c'est-à-dire que la famille $\mathcal{E} = (a, b)$ engendre $E_{\alpha,\beta}$.

5) D'après les questions 3) et 4)b), la famille $\mathcal{E}$ est libre et engendre $E_{\alpha,\beta}$. C'est donc une base de $E_{\alpha,\beta}$. Donc $E_{\alpha,\beta}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie égale à $dim(E_{\alpha,\beta}) = card(\mathcal{E}) = 2$.

6) On a les équivalences suivantes :

$$\begin{array}{lll} & (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in E_{\alpha,\beta} & \\ \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, r^{n+2} = \alpha r^{n+1} + \beta r^n & \text{on divise par } r^n \text{ car } r \neq 0 \\ \Leftrightarrow & \forall n \in \mathbb{N}, r^2 = \alpha r + \beta & \text{donc } r^n \neq 0 \\ \Leftrightarrow & r^2 = \alpha r + \beta & \\ \Leftrightarrow & r^2 - \alpha r - \beta = 0 & \\ \Leftrightarrow & r \text{ est racine (réelle) du polynôme } P(X) = X^2 - \alpha X - \beta & \end{array}$$

On a démontré qu'étant donné $r \in \mathbb{R}^*$, la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $E_{\alpha,\beta}$ si et seulement si r est racine (réelle) du polynôme $P(X) = X^2 - \alpha X - \beta$.

7)a) D'après l'énoncé, r_1 et r_2 sont les racines réelles du polynôme $P(X) = X^2 - \alpha X - \beta$. Si $r_1 = 0$ ou $r_2 = 0$ alors $0^2 - \alpha \times 0 - \beta = 0$ donc $\beta = 0$. C'est en contradiction avec l'énoncé. Donc $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$. D'après la question précédente, les suites géométriques $g = (r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $h = (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartiennent donc à $E_{\alpha,\beta}$.

7)b) Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les implications suivantes :

$$\begin{array}{lll} & \lambda.g + \mu.g = 0_{\mathbb{R}^\mathbb{N}} & \\ \Rightarrow & \lambda.(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu.(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} & \\ \Rightarrow & (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}} & \\ \Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda r_1^n + \mu r_2^n = 0 & \text{par définition de l'égalité de deux suites} \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 \end{array}\right. & \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ r_1\lambda + r_2\mu = 0 \end{array}\right. & \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ (r_2 - r_1)\mu = 0 \end{array}\right. & L_2 \leftarrow L_2 - r_1 L_1 \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 0 \\ \mu = 0 \end{array}\right. & L_2 \leftarrow \dfrac{1}{r_2 - r_1} L_2 \text{ car } \Delta > 0 \text{ donc } r_1 \neq r_2 \\ \Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array}\right. & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \end{array}$$

On a démontré que la famille $\mathcal{B} = (g, h)$ est libre.

7)c) D'après les questions 7)a) et 7)b), la famille $\mathcal{B}$ est une famille libre à deux éléments de $E_{\alpha,\beta}$. De plus, d'après la question 5), le sous-espace vectoriel $E_{\alpha,\beta}$ est de dimension 2. Donc la famille $\mathcal{B}$ est une base de $E_{\alpha,\beta}$.

8) On reprend les notations introduites dans tout ce qui précède dans le cas particulier où $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = \dfrac{1}{4}$.
• La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient donc à $E_{\alpha,\beta}$.
• Le discriminant du polynôme $P(X) = X^2 - \alpha X - \beta = X^2 - \dfrac{1}{2}X - \dfrac{1}{4}$ est $\Delta = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{5}{4} > 0$.
Les deux racines réelles distinctes de ce polynôme sont $r_1 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \sqrt{\dfrac{5}{4}}\right) = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} \neq 0$ et $r_2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{5}{4}}\right) = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} \neq 0$. D'après la question 7)c), la famille $\mathcal{B} = (g, h) = ((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $E_{\alpha,\beta}$.

D'après les deux points précédents, il existe un unique couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda.(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu.(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$. De plus, on a les implications suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 & \lambda.(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu.(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \\
\Rightarrow & (\lambda r_1^n + \mu r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} & \\
\Rightarrow & \forall n \in \mathbb{N},\ \lambda r_1^n + \mu r_2^n = v_n & \text{par définition de l'égalité de deux suites} \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = v_0 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = v_1 \end{array}\right. & \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}\lambda + \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}\mu = \dfrac{3}{4} \end{array}\right. & \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ (1-\sqrt{5})\lambda + (1+\sqrt{5})\mu = 3 \end{array}\right. & L_2 \leftarrow 4L_2 \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ ((1+\sqrt{5}) - (1-\sqrt{5}))\mu = 3 - (1-\sqrt{5}) \end{array}\right. & L_2 \leftarrow L_2 - (1-\sqrt{5})L_1 \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ 2\sqrt{5}\mu = 2 + \sqrt{5} \end{array}\right. & \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda + \mu = 1 \\ \mu = \dfrac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array}\right. & L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2\sqrt{5}}L_2 \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda = 1 - \dfrac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array}\right. & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\
\Rightarrow & \left\{\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}} \\ \mu = \dfrac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}} \end{array}\right. &
\end{array}$$

On a déjà justifié l'existence et l'unicité du couple $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda.(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}) + \mu.(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ donc, d'après les implications précédentes, on a :

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}.(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}.(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$$

c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n + \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n$$

Partie 3 : corrigé

1) On notera « q » pour « pile » et « f » pour « face ». Avec ces notations, une description ensembliste de l'espace des observables est :

$$\Omega = \{q, f\}^N = \{(x_1, x_2, \dots, x_N) \text{ avec } x_1, x_2, \dots, x_N \in \{q, f\}\}$$

2)a) Soit $n \in [\![1, N]\!]$. Les événements Q_n et F_n sont contraires l'un de l'autre donc $Q_n \cap F_n = Q_n \cap \overline{Q_n} = \emptyset$ et $Q_n \cup F_n = Q_n \cup \overline{Q_n} = \Omega$. Donc la famille d'événements (Q_n, F_n) est un système complet d'événements.

2)b) Avec les notations introduites à la question 1), une description ensembliste de Q_4 dans le cas où $N = 5$ est :

$$\begin{aligned} Q_4 &= \{(x_1, x_2, x_3, p, x_5) \text{ avec } x_1, x_2, x_3, x_5 \in \{q, f\}\} \\ &= \{(q,q,q,q,q),(q,q,q,q,f),(q,q,f,q,q),(q,q,f,q,f),(q,f,q,q,q),(q,f,q,q,f),(q,f,f,q,q), \\ &\quad (q,f,f,q,f),(f,q,q,q,q),(f,q,q,q,f),(f,q,f,q,q),(f,q,f,q,f),(f,f,q,q,q),(f,f,q,q,f), \\ &\quad (f,f,f,q,q),(f,f,f,q,f)\} \end{aligned}$$

2)c) Dans le cas où $N = 5$, l'événement « obtenir pile puis face puis pile puis face puis pile » est représenté par le sous-ensemble $Q_1 \cap F_2 \cap Q_3 \cap F_4 \cap Q_5$ de Ω.

3) On note A l'événement « obtenir pile à tous les lancers ».
On a $A = Q_1 \cap Q_2 \cap \ldots \cap Q_N$.
D'après l'énoncé, les événements $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P donc $P(A) = P(Q_1) \times P(Q_2) \times \cdots \times P(Q_N)$.
De plus, d'après l'énoncé la pièce est équilibrée donc pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on a $P(Q_n) = \dfrac{1}{2}$.
On en conclut que la probabilité de l'événement « obtenir pile à tous les lancers » est égale à $\dfrac{1}{2^N}$.
OU
D'après l'énoncé, parce que la pièce est équilibrée, la probabilité P qui modélise le hasard est la probabilité uniforme sur Ω. D'après 1), la cardinale de Ω est égal à 2^N. Et l'événement A est un événement élémentaire. On en conclut que la probabilité de l'événement « obtenir pile à tous les lancers » est égale à $\dfrac{1}{2^N}$.

4)a) On remarque que $A_3 = Q_1 \cap Q_2 \cap F_3$ donc $a_3 = P(A_3) = P(Q_1 \cap Q_2 \cap F_3)$. Or, d'après l'énoncé, les événements Q_1, Q_2, F_3 sont mutuellement indépendants pour la probabilité P donc $P(Q_1 \cap Q_2 \cap F_3) = P(Q_1)P(Q_2)P(F_3)$. Enfin d'après l'énoncé, car la pièce est équilibrée, $P(Q_1) = P(Q_2) = P(F_3) = \dfrac{1}{2}$. Donc $a_3 = \dfrac{1}{8}$.

4)b) Soit $\omega = (c_1, c_2, c_3, c_4, \dots, c_N) \in \Omega$ un observable. Si $\omega \in A_4$, alors $c_2 = q$, $c_3 = q$ et $c_4 = f$. De plus, si $c_1 = f$ alors $\omega \in B_3$ donc $\omega \in B_3 \cap A_4$. Or $B_3 \cap A_4 = \emptyset$ car A_4 est l'événement « le joueur A gagne à l'issue du n-ème lancer et aucun des deux joueurs n'avait gagné avant ». C'est une contradiction. Donc $c_1 = q$. Et réciproquement, si $c_1 = c_2 = c_3 = q$ et $c_4 = f$ alors $\omega \in A_4$. Donc $A_4 = Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap F_4$. De plus, d'après l'énoncé, les événements Q_1, Q_2, Q_3, F_4 sont mutuellement indépendant pour la probabilité P. Donc $a_4 = P(A_4) = P(Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 \cap F_4) = P(Q_1)P(Q_2)P(Q_3)P(F_4) = (\dfrac{1}{2})^4 = \dfrac{1}{16}$.

4)c) Soit $n \in [\![3, N]\!]$. Soit $\omega = (c_1, \dots, c_N) \in \Omega$. Si $\omega \in A_n$ alors $c_n = f$, $c_{n-1} = q$, $c_{n-2} = q$. Puis, si $\exists i \in [\![1, n-3]\!]$ tel que $c_i = f$, en posant j le plus grand $i \in [\![1, n-3]\!]$ tel que $c_i = f$ on a alors $c_j = f$, $c_{j+1} = q$ et $c_{j+2} = q$ donc $w \in B_{j+2}$ donc $\omega \in B_{j+2} \cap A_n$. Or $j \leq n-3$ donc $j+2 \leq n-1$ donc $B_{j+2} \cap A_n = \emptyset$. C'est une contradiction. Donc $\forall i \in [\![1, n-3]\!]$, $c_i = q$. Et réciproquement, si $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $c_i = q$ et $c_n = f$ alors $\omega \in A_n$. Donc $A_n = Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1} \cap F_n$. De plus, d'après l'énoncé, les événements $Q_1, \dots, Q_{n-1}, F_n$ sont mutuellement indépendants pour la probabilité P. Donc $a_n = P(A_n) = P(Q_1 \cap \ldots \cap Q_{n-1} \cap F_n) = P(Q_1) \ldots P(Q_{n-1})P(F_n) = (\dfrac{1}{2})^n = \dfrac{1}{2^n}$.

4)d) On pose GA l'événement « le joueur A gagne ». Le joueur A ne peut gagner qu'à partir de l'issue du 3-ème lancer donc $GA = \cup_{k=3}^N A_k$. De plus, les événements A_3, A_4, ..., A_N sont deux à deux incompatibles donc

$$g_N = P(GA) = P(\cup_{k=3}^N A_k) = \sum_{k=3}^N P(A_k) = \sum_{k=3}^N (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{8} \sum_{k=0}^{N-3} (\frac{1}{2})^k = \frac{1}{8} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{N-2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(1 - (\frac{1}{2^{N-2}}))$$

4)e) On a directement : $g_N \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$. Si les joueurs A et B jouent sans limite de nombre de lancers, le joueur A a donc 1 chance sur 4 de gagner.

5)a) • Il n'est pas possible d'obtenir deux piles consécutifs au cours du premier lancer donc l'événement D_1 est certain c'est-à-dire que $D_1 = \Omega$. Par conséquent, sa probabilité est $d_1 = P(D_1) = 1$.
• Le contraire de l'événement D_2 est « obtenir deux piles consécutifs au cours des 2 premiers lancers » donc $\overline{D_2} = Q_1 \cap Q_2$. D'après l'énoncé, les événements $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ sont mutuellement indépendants pour P donc en particulier, les événements Q_1 et Q_2 sont indépendants pour P. Par conséquent, $P(\overline{D_2}) = P(Q_1 \cap Q_2) = P(Q_1) \times P(Q_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. La probabilité de l'événement D_2 est donc $d_2 = P(D_2) = 1 - P(\overline{D_2}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.
• L'événement D_3 se décrit de la façon suivante :

$$D_3 = (Q_1 \cap F_2 \cap Q_3) \cup (Q_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap Q_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap Q_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

On remarque que c'est une réunion d'événements deux à deux incompatibles. Par exemple, $(Q_1 \cap F_2 \cap Q_3) \cap (Q_1 \cap F_2 \cap F_3) = Q_1 \cap F_2 \cap Q_3 \cap Q_1 \cap F_2 \cap F_3 = Q_1 \cap F_2 \cap Q_3 \cap F_3 = Q_1 \cap F_2 \cap (Q_3 \cap F_3) = Q_1 \cap F_2 \cap \emptyset = \emptyset$. Donc la probabilité de l'événement D_3 est :

$$P(D_3) = P(Q_1 \cap F_2 \cap Q_3) + P(Q_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap Q_2 \cap F_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap Q_3) + P(F_1 \cap F_2 \cap F_3)$$

Enfin, les événements $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ sont mutuellement indépendants pour P donc en particulier, les événements Q_1, Q_2, Q_3 sont mutuellement indépendants pour P. D'après le cours, en remplaçant Q_1, Q_2, Q_3 par leurs contraires, on garde des événements mutuellement indépendants pour P. On en déduit que :

$$P(D_3) = P(Q_1)P(F_2)P(Q_3) + P(Q_1)P(F_2)P(F_3) + P(F_1)P(Q_2)P(F_3) + P(F_1)P(F_2)P(Q_3) + P(F_1)P(F_2)P(F_3)$$

puis que $d_3 = P(D_3) = \frac{5}{8}$.

5)b) Soit $n \in [\![1, N-2]\!]$. En utilisant l'associativité de l'intersection on obtient :
• $(Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cap (Q_{n+1} \cap F_{n+2}) = Q_{n+1} \cap Q_{n+2} \cap F_{n+2} = Q_{n+1} \cap (Q_{n+2} \cap F_{n+2}) = Q_{n+1} \cap \emptyset = \emptyset$
• $(Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cap (F_{n+1} \cap Q_{n+2}) = Q_{n+1} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2} = (Q_{n+1} \cap F_{n+1}) \cap Q_{n+2} = \emptyset \cap Q_{n+2} = \emptyset$
• $(Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cap (F_{n+1} \cap F_{n+2}) = Q_{n+1} \cap Q_{n+2} \cap F_{n+1} \cap F_{n+2} = Q_{n+1} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2} \cap F_{n+2} = (Q_{n+1} \cap F_{n+1}) \cap (Q_{n+2} \cap F_{n+2}) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$
• $(Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cap (F_{n+1} \cap Q_{n+2}) = Q_{n+1} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2} \cap F_{n+2} = (Q_{n+1} \cap F_{n+1}) \cap (Q_{n+2} \cap F_{n+2}) = \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$
• $(Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cap (F_{n+1} \cap F_{n+2}) = Q_{n+1} \cap F_{n+1} \cap F_{n+2} = (Q_{n+1} \cap F_{n+1}) \cap F_{n+2} = \emptyset \cap F_{n+2} = \emptyset$
• $(F_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cap (F_{n+1} \cap F_{n+2}) = F_{n+1} \cap Q_{n+2} \cap F_{n+2} = F_{n+1} \cap (Q_{n+2} \cap F_{n+2}) = F_{n+1} \cap \emptyset = \emptyset$
En utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à l'union :
• $(Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (F_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (F_{n+1} \cap F_{n+2})$
$= (P_{n+1} \cap (P_{n+2} \cup F_{n+2})) \cup (F_{n+1} \cap (P_{n+2} \cup F_{n+2})) = (Q_{n+1} \cap \Omega) \cup (F_{n+1} \cap \Omega) = Q_{n+1} \cup F_{n+1} = \Omega$
On a vérifié que la famille $(Q_{n+1} \cap Q_{n+2}, Q_{n+1} \cap F_{n+2}, F_{n+1} \cap Q_{n+2}, F_{n+1} \cap F_{n+2})$ est un système complet d'événements.

5)c) Soit $n \in [\![1, N-2]\!]$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{array}{cll}
 & D_{n+2} & \\
= & D_{n+2} \cap \Omega & \\
= & D_{n+2} \cap ((Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (F_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (F_{n+1} \cap F_{n+2})) & (\star) \\
= & (D_{n+2} \cap Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap F_{n+2}) & \\
= & \emptyset \cup (D_{n+2} \cap Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) & (\star\star) \\
= & ((D_{n+2} \cap Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap F_{n+2})) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) & \\
= & (D_{n+2} \cap (Q_{n+1} \cup F_{n+1}) \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) & \\
= & (D_{n+2} \cap \Omega \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) & \\
= & (D_{n+2} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) &
\end{array}$$

car :
$(\star)$ d'après le dernier point de la question précédente, $\Omega = (Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (Q_{n+1} \cap F_{n+2}) \cup (F_{n+1} \cap Q_{n+2}) \cup (F_{n+1} \cap F_{n+2})$
$(\star\star)$ l'intersection $(D_{n+2} \cap Q_{n+1} \cap Q_{n+2})$ représente l'événement « ne jamais obtenir deux piles consécutifs au cours des $n+2$ premiers lancers et obtenir pile aux $(n+1)$-ème et $(n+2)$-ème lancers qui sont consécutifs ». Or, cet événement est impossible donc $(D_{n+2} \cap Q_{n+1} \cap Q_{n+2}) = \emptyset$

5)d) Soit $n \in [\![1, N-2]\!]$. D'après la question précédente, on a $D_{n+2} = (D_{n+2} \cap F_{n+2}) \cup (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2})$. Or, $(D_{n+2} \cap F_{n+2}) \cap (D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) = D_{n+2} \cap F_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2} = D_{n+2} \cap F_{n+2} \cap F_{n+1} \cap (F_{n+2} \cap Q_{n+2}) = D_{n+2} \cap F_{n+2} \cap F_{n+1} \cap \emptyset = \emptyset$ donc :

$$P(D_{n+2}) = P(D_{n+2} \cap F_{n+2}) + P(D_{n+2} \cap F_{n+1} \cap Q_{n+2}) = P(D_{n+2} \cap F_{n+2}) + P(D_{n+2} \cap (F_{n+1} \cap Q_{n+2}))$$

Alors, en utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(D_{n+2}) = P(F_{n+2})P_{F_{n+2}}(D_{n+2}) + P(F_{n+1} \cap Q_{n+2})P_{(F_{n+1}\cap Q_{n+2})}(D_{n+2})$$

Or,
- la probabilité de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des $n+2$ premiers lancers sachant qu'on obtient face au $(n+2)$-ème lancer est égale à la probabilité de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours de $n+1$ premiers lancers
- la probabilité de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours des $n+2$ premiers lancers sachant qu'on obtient face au $(n+1)$-ème lancer et pile au $(n+2)$-ème lancer est égale à la probabilité de ne pas obtenir deux piles consécutifs au cours de n premiers lancers
- les événements F_{n+1} et Q_{n+2} sont indépendants pour P donc $P(F_{n+1} \cap Q_{n+2}) = P(F_{n+1})P(Q_{n+2})$ Donc :

$$P(D_{n+2}) = P(F_{n+2})P(D_{n+1}) + P(F_{n+1})P(Q_{n+2})P(D_n)$$

c'est-à-dire :

$$d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n$$

5)e) D'après les questions 4)a) et 4)d), on a :

$$\begin{cases} d_1 = 1 \\ d_2 = \dfrac{3}{4} \\ \forall n \in [\![1, N-2]\!], d_{n+2} = \dfrac{1}{2}d_{n+1} + \dfrac{1}{4}d_n. \end{cases}$$

donc, avec les notations de la partie d'algèbre linéaire, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$, on a $d_n = v_{n-1}$. D'après le résultat de cette partie, on déduit que :

$$\forall n \in [\![1, N]\!], \quad d_n = \frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}+2}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^{n-1}$$

1)a) L'équation différentielle (H) est bien définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x(1-x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$. Donc sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$, l'équation différentielle (H) est normalisable et y est équivalente à l'équation différentielle normalisée $y' + \dfrac{1}{2x(1-x)}y = 0$.

1)b) Pour tout $x \in]0, 1[$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x} = \dfrac{a(1-x)+bx}{2x(1-x)} = \dfrac{a+(b-a)x}{x(1-x)}$ donc en posant $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$, on a bien : $\forall x \in]0, 1[$, $a + (b-a)x = \dfrac{1}{2}$ et donc $\dfrac{1}{2x(1-x)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{1-x}$.

1)c) D'après 1)a), sur l'intervalle $I \subset]0, 1[$, l'équation différentielle (H) est équivalente à l'équation différentielle $y' + \dfrac{1}{2x(1-x)}y = 0$ que l'on note (HN).
L'équation différentielle (HN) est linéaire du premier ordre normalisée et homogène. Elle est de la forme $y' + a(x)y = 0$ avec $a : x \mapsto \dfrac{1}{2x(1-x)}$. Pour tout $x \in I$, d'après 1)b), $\dfrac{1}{2x(1-x)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-x}$ et comme $I \subset]0, 1[$, $x > 0$ et $1 - x > 0$ donc une primitive de a sur I est la fonction $A : x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1-x) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{x}{1-x})$.
L'ensemble des solutions de (HN) et donc de (H) sur I est

$$\mathcal{S}_I(H) = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda e^{-\frac{1}{2}\ln(\frac{x}{1-x})} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{array}{lll} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

2) L'équation différentielle (L) est bien définie et normalisable sur $]0, 1[$. L'équation normalisée associée est $y' + \dfrac{1}{2x(1-x)}y = \dfrac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ que l'on note (N). L'équation différentielle (N) est linéaire du premier ordre non homogène.
L'équation homogène associée à (N) est (HN) dont l'ensemble des solutions sur $]0, 1[$ est, d'après 1)c) avec $I =]0, 1[$, l'ensemble

$$\mathcal{S}_{]0,1[}(H) = \left\{ \begin{array}{lll}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

On cherche à présent une solution particulière de (N) sur $]0, 1[$ grâce à la méthode de la variation de la constante.
Soit $\lambda :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction définie et dérivable sur $]0, 1[$ puis $f : x \mapsto \lambda(x)e^{-A(x)} = \lambda(x)e^{-\frac{1}{2}\ln(\frac{x}{1-x})}$.
On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
& f \text{ est solution de } (N) \text{ sur }]0,1[\\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in]0,1[,\ f'(x) + a(x)f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x)e^{-A(x)} + \lambda(x)(-A'(x))e^{-A(x)} + a(x)\lambda(x)e^{-A(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x)e^{-A(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}} \qquad \text{car } A \text{ est une primitive de } a \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}e^{A(x)} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}\sqrt{\frac{x}{1-x}} \\
\Leftrightarrow\ & \forall x \in]0,1[,\ \lambda'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \text{la fonction } \lambda \text{ est une primitive de } x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \text{ sur }]0,1[
\end{aligned}$$

On pose $\lambda_0 : x \mapsto \dfrac{1}{2}\arcsin(x)$ puis $f_0 : x \mapsto \lambda_0(x)e^{-A(x)} = \dfrac{1}{2}\arcsin(x)\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$. Comme la fonction λ_0 est une primitive sur $]0, 1[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$, d'après les implications "$\Leftarrow$" des équivalences précédentes, la fonction f_0 est une solution de (N) sur $]0, 1[$.
L'ensemble des solutions de (N) et donc de (L) sur $]0, 1[$ est

$$\mathcal{S}_{]0,1[}(L) = \left\{ \begin{array}{lll}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\lambda + \dfrac{1}{2}\arcsin(x))\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} \end{array} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

3)a) D'après l'énoncé, la fonction u est une solution de (E_3) sur $]0,+\infty[$ donc c'est une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x \in]0,+\infty[$, $xu'(x)+2u(x)(1-u(x)) = 0$. Alors, $\forall x \in]0,+\infty[$, comme $x \neq 0$, $u'(x) = -\dfrac{2u(x)(1-u(x))}{x}$. Soit $x \in]0,+\infty[$. On a $x > 0$ et d'après l'énoncé, u est à valeurs dans $]0,1[$ donc $u(x) \in]0,1[$ donc $2u(x)(1-u(x)) > 0$ et par conséquent $u'(x) < 0$. Cela démontre que $\forall x \in]0,+\infty[$, $u'(x) < 0$. Donc la fonction u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

3)b) D'après la question précédente, la fonction u est décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$. De plus, d'après l'énoncé, elle est à valeurs dans $]0,1[$ donc elle est minorée par 0 et majorée par 1. Alors, d'après le théorème de la limite des fonctions monotones, la fonction u admet une limite finie en 0 égale à sa borne supérieure sur $]0,+\infty[$. On note β cette limite. La borne supérieure est le plus petit des majorants. Donc $\beta \leq 1$. Et toujours d'après le théorème de la limite des fonctions monotones, la fonction u admet une limite finie en $+\infty$ égale à sa borne inférieure sur $]0,+\infty[$. On note α cette limite. La borne inférieure est le plus grand des minorants. Donc $0 \leq \alpha$.
La fonction u étant strictement décroissante et dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection réciproque, l'image de $]0,+\infty[$ par u est un intervalle et u réalise une bijection de $]0,+\infty[$ dans cet intervalle. De plus, u est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ et ses limites respectives en 0 et $+\infty$ sont β et α donc $u(]0,+\infty[) =]\alpha,\beta[$. Comme $]0,+\infty[\neq \emptyset$, $u(]0,+\infty[) \neq \emptyset$ et donc $\alpha < \beta$.

3)c) La fonction u étant strictement décroissante et dérivable donc continue sur $]0,+\infty[$, d'après le théorème de la bijection réciproque, sa bijection réciproque est dérivable sur le sous-ensemble $\{z \in]\alpha,\beta[\text{ tel que } u'(v(z)) \neq 0\}$. Or, d'après 4)a), $\forall x \in]0,+\infty[$, $u'(x) < 0$ donc $\forall z \in]\alpha,\beta[$, $u'(v(z)) \neq 0$. Donc la fonction réciproque v est dérivable sur $]\alpha,\beta[$ et $\forall z \in]\alpha,\beta[$, $v'(z) = \dfrac{1}{u'(v(z))} = -\dfrac{v(z)}{2u(v(z))(1-u(v(z)))} = -\dfrac{v(z)}{2z(1-z)}$ donc $2z(1-z)v'(z) + v(z) = 0$. Cela démontre que la fonction v est solution de (H) sur $]\alpha,\beta[$.

3)d) La fonction v est solution de (H) sur $]\alpha,\beta[\subset]0,1[$ donc d'après 1)c), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in]\alpha,\beta[$, $v(z) = c\sqrt{\dfrac{1-z}{z}}$. De plus, v est à valeurs dans $]0,+\infty[$ en tant que bijection réciproque de u donc $c > 0$. Puis par conséquent, $\forall z \in]\alpha,\beta[$, $v(z)^2 = c^2 \times \dfrac{1-z}{z}$ donc $z\dfrac{v(z)^2}{c^2} + z = 1$. Enfin, $\forall x \in]0,+\infty[$, comme $u(x) \in]\alpha,\beta[$ et que $v(u(x)) = x$, on a $u(x)\dfrac{x^2}{c^2} + u(x) = 1$ donc $u(x) = \dfrac{1}{1+(\frac{x}{c})^2}$.

4)D'après les questions 3) précédentes, on a l'inclusion

$$\mathcal{S} \subset \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{c}\right)^2} \end{array} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$

Réciproquement, soit $c \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+(\frac{x}{c})^2}$. Cette fonction est bien définie sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,1[$ car $\forall x \in]0,+\infty[$, on a $(\dfrac{x}{c})^2 > 0$ donc $1 + (\dfrac{x}{c})^2 > 1 > 0$ donc $0 < \dfrac{1}{1+(\frac{x}{c})^2} < 1$. De plus, c'est une fonction rationnelle donc dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad g'(x)+2g(x)(1-g(x)) = \frac{-2x^2}{c^2(1+(\frac{x}{c})^2)^2} + 2\frac{1}{1+(\frac{x}{c})^2}\left(1-\frac{1}{1+(\frac{x}{c})^2}\right) = \frac{-2x^2}{c^2(1+(\frac{x}{c})^2)^2} + \frac{2(\frac{x}{c})^2}{(1+(\frac{x}{c})^2)^2} = 0$$

donc la fonction g est une fonction définie sur $]0,+\infty[$ et à valeurs dans $]0,1[$ qui est solution de (E_3).
On en déduit que

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \to &]0,1[\\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{c}\right)^2} \end{array} \quad \text{avec} \quad c \in \mathbb{R}_+^* \right\}$$