Devoir à la maison n° 14

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $f(x, y) = (x + 2y, 2x - y, 2x + 3y)$.

1. Déterminer la matrice de f par rapport aux bases canoniques $\mathcal{B}_2 = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_3 = (f_1, f_2, f_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $\mathcal{B}'_2 = (e_1, e_1 - e_2)$ et $\mathcal{B}'_3 = (f_1, f_1 + f_2, f_1 + f_2 + f_3)$ de nouvelles bases de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
   (i) Déterminer les matrices de passage de $\mathcal{B}_2$ à $\mathcal{B}'_2$ et de $\mathcal{B}_3$ à $\mathcal{B}'_3$.
   (ii) En déduire la matrice de f par rapport à $\mathcal{B}'_2$ et $\mathcal{B}'_3$.
3. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y, z) = f(x + z, y + z)$. Déterminer le déterminant de g. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. Soient $a, b, c \in C$. On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de J. La matrice J est-elle inversible ?
2. Effectuer le produit MJ. Exprimer $\det(MJ)$ en fonction de $\det(J)$, puis en déduire $\det(M)$.