

Feuille d'exercices 19

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

Exercice 3.

(a) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u + \lambda_2 v + \lambda_3 w = 0_E$, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \end{array} \right.$$

donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Donc la famille \mathcal{F} est libre.

(b) Directement : $u, v, w \in G$. De plus, $\dim(G) = 3 = \text{Card}(\mathcal{F})$, donc, comme \mathcal{F} est libre, \mathcal{F} est une base de G .

(c) Il suffit de compléter \mathcal{F} avec n'importe quel vecteur qui n'est pas dans G , par exemple $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Alors $\mathcal{F} \cup (e_4)$ est une base de E .

Exercice 5.

(e) Une base de E_5 est la famille $((2^n))$, donc $\dim(E_5) = 1$.

(f) Une base de E_6 est la famille $((X-1)(X-2), X(X-1)(X-2))$, donc $\dim(E_6) = 2$.

(g) Une base de E_7 est la famille (e_2, e_3, e_4) , donc $\dim(E_7) = 3$.

(h) Une base de E_8 est la famille $((4, 4, 2, 1))$, donc $\dim(E_8) = 1$.

Exercice 7. Comme $-2 + 3 \times 2 + 4 \times 0 - 5 \times 3 = -11 \neq 0$, $(-2, 2, 0, 3) \notin F$. Donc F et G sont en somme directe, donc, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(E).$$

Donc, comme $F + G \subset E$, $F + G = E$. Donc F et G sont supplémentaires dans E .

Exercice 8.

(a) Soit $M = (m_{ij}) \in S$, alors M est déterminée par les m_{ij} pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i \leq j$. Donc

$$\dim(S) = \text{Card}(\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i \leq j\}) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De même, soit $M = (m_{ij}) \in A$, alors M est déterminée par les m_{ij} pour $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $i < j$. Donc $\dim(A) = \text{Card}(\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j\}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

(b) La seule matrice à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle, donc S et A sont en somme directe. Donc, d'après la formule de Grassmann :

$$\dim(S + A) = \dim(S) + \dim(A) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{K})).$$

Donc, comme $S + A \subset M_n(\mathbb{K})$, $S + A = M_n(\mathbb{K})$. Donc S et A sont supplémentaires dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10.

(g) $\text{Ker}(f) = \text{Vect}(X+1)$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}_3[X]) - \dim(\text{Ker}(f)) = 4 - 1 = 3$.

- (h) Si $a = \frac{1}{2}$: $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -1, 0))$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 1 = 2$.
 Si $a \neq \frac{1}{2}$: $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, donc $\dim(\text{Ker}(f)) = 0$. D'après le théorème du rang, on a donc $\text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker}(f)) = 3 - 0 = 3$.

Exercice 13. Notons E l'espace sur lequel agit u .

Soit x_0 un vecteur directeur de $\text{Im}(u)$. On a : $\forall x \in E, \exists \lambda_x \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda_x x_0$. Alors :

$$\forall x \in E, u^2(x) = \lambda_x u(x_0) = \lambda_x \lambda_{x_0} x_0 = \lambda_{x_0} u(x),$$

donc $u^2 = \lambda_{x_0} u$.

Exercice 14.

- (a) On a : $(f - 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E) = (f - \text{Id}_E) \circ (f - 2\text{Id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Soit $v \in \text{Im}(f - \text{Id}_E)$, alors il existe $u \in E$ tel que $v = (f - \text{Id}_E)(u)$. Donc $(f - 2\text{Id}_E)(v) = (f - 2\text{Id}_E) \circ (f - \text{Id}_E)(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}(u) = 0_E$. Donc $\text{Im}(f - \text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. Symétriquement, $\text{Im}(f - 2\text{Id}_E) \subset \text{Ker}(f - \text{Id}_E)$.

- (b) Soit $u \in \text{Ker}(f - \text{Id}_E) \cap \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$. Alors $f(u) = u = 2u$, donc $u = 0_E$. Donc $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont en somme directe.

De plus, d'après la question précédente, $\text{rg}(f - \text{Id}_E) \leq \dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E))$, donc, d'après le théorème du rang :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \text{rg}(f - \text{Id}_E) \\ &\leq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E)) + \dim(\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)) \\ &\leq \dim(\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)), \end{aligned}$$

donc, comme $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) \subset E$, $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) + \text{Ker}(f - 2\text{Id}_E) = E$. Donc $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f - 2\text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .

Exercice 15. Soit $u \in E$. Alors $(f + g)(u) = f(u) + g(u) \in \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$, donc $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Donc $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

De plus, $f = (f + g) + (-g)$, donc, d'après ce qu'on vient de montrer : $\text{rg}(f) \leq \text{rg}(f + g) + \text{rg}(-g) = \text{rg}(f + g) + \text{rg}(g)$, donc $\text{rg}(f + g) \geq \text{rg}(f) - \text{rg}(g)$; et, de même, $\text{rg}(f + g) \geq \text{rg}(g) - \text{rg}(f)$, donc $\text{rg}(f + g) \geq |\text{rg}(f) - \text{rg}(g)|$.

Exercice 16. Comme $f \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$, $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$. Réciproquement, soit $u \in \text{Ker}(f)$. Alors $(f \circ g + g \circ f)(u) = u$, donc $f(g(u)) = u$, donc $u \in \text{Im}(f)$. Donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Im}(f)$, donc $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$.

Donc, d'après le théorème du rang, $n = 2\text{rg}(f)$. Donc n est pair.

Exercice 17.

- (a) Supposons qu'un tel u existe. Alors, d'après le théorème du rang :

$$n = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = 2\text{rg}(u),$$

donc n est pair.

Réciproquement, supposons n pair, et notons $n = 2p$ et (e_1, \dots, e_{2p}) une base de E . Alors l'application $u : e_k \mapsto e_{k+p}$ si $k \leq p$, 0_E sinon, convient.

- (b) Il suffit de prendre une base u_1, \dots, u_p de $\text{Im}(u)$, puis, pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, e_k tel que $u_k = u(e_k)$.

Exercice 18. Il faut et il suffit que $\dim(F) + \dim(G) = n$. En effet, c'est une condition nécessaire d'après le théorème du rang; réciproquement, notons $p = \dim(F)$ et $q = \dim(G)$. Supposons que $p + q = n$. Soit (v_1, \dots, v_q) une base de G , que l'on complète en une base de E (v_1, \dots, v_n) . Soit (u_1, \dots, u_p) une base de F , alors l'application $u : v_k \mapsto 0_E$ si $k \leq q$, $u_k - q$ sinon, convient.