Devoir à la maison n° 13
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. Soient $k \in [\![1, n]\!]$ et $i \in [\![0, k]\!]$. L'univers des k premiers lancers est de cardinal 2^k, sur lequel $\mathbb{P}$ est uniforme. L'événement $B_{k,i}$ est de cardinal $\binom{k}{i}$, donc : $\mathbb{P}(B_{k,i}) = \dfrac{\binom{k}{i}}{2^k}$.

2. On a $B = \displaystyle\bigcup_{i=0,\ i \text{ pair}}^{n} B_{n,i}$, et les $B_{n,i}$ sont disjoints, donc :
$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=0,\ i \text{ pair}}^{n} \mathbb{P}(B_{n,i}) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0,\ i \text{ pair}}^{n} \binom{n}{i} = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

3. (a) L'événement $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$ est l'événement « on obtient n *pile* », donc $\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n}(B) = 1$ si n est pair, 0 si n est impair.

   (b) Comme $\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n}(B) \neq \mathbb{P}(B)$, les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ ne sont pas mutuellement indépendants.

4. (a) Supposons $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ réalisés. Alors B est réalisé si et seulement si le nombre de *pile* réalisés lors des $n-k$ autres lancers est de même parité que k, ce qui est exactement, en remplaçant n lancers par $n-k$ lancers, l'événement B ou l'événement $\overline{B}$ (selon la parité de n), qui sont tous deux de probabilité $\dfrac{1}{2}$, donc :
$$\mathbb{P}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(B) = \frac{1}{2}.$$

   (b) La famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants puisque les lancers sont indépendants.
   Il suffit ensuite de montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, pour tous $i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!]$ distincts :
$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A_{i_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right) \times \mathbb{P}(B).$$
   D'une part : $\mathbb{P}\left(A_{i_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right) \times \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2^{k+1}}$.
   D'autre part, d'après la formule des probabilités composées :
$$\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap B\right) = \mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right) \times \mathbb{P}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(B) = \frac{1}{2^k}\mathbb{P}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(B) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$
   Donc $\mathbb{P}\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k} \cap B\right) = \dfrac{1}{2^{k+1}} = \mathbb{P}\left(A_{i_1}\right) \times \cdots \times \mathbb{P}\left(A_{i_k}\right) \times \mathbb{P}(B)$.
   Toute sous-famille stricte de $(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$ est donc une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 2.

1. (a) Soient (u_1, v_1) et (u_2, v_2) dans $F \times G$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} f\left(\lambda_1(u_1, v_1) + \lambda_2(u_2, v_2)\right) &= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \\ &= \lambda_1 f\left((u_1, v_1)\right) + \lambda_2 f\left((u_2, v_2)\right), \end{aligned}$$

donc f est linéaire.

(b) On a directement : $\mathrm{Im}(f) = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\} = F + G$.

(c) Soit $a = (u, v) \in F \times G$. On a :

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow u + v = 0_E \\ &\Leftrightarrow v = -u \in F \cap G \\ &\Leftrightarrow a = (u, -u), \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(u, -u) \mid u \in F \cap G\}$. Il y a donc une bijection $u \mapsto (u, -u)$ entre $\mathrm{Ker}(f)$ et $F \cap G$, donc $\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à $F \cap G$.

(d) Le théorème du rang appliqué à f s'écrit :

$$\dim(F \times G) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right),$$

c'est-à-dire :

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G).$$

On retrouve donc la formule de Grassmann.

2. (a) Soit $(Q, R) \in \mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]$. Alors :

$$\deg(BQ + R) \leq \max\left(\deg(B) + \deg(Q), \deg(R)\right) \leq n,$$

donc $BQ + R \in \mathbb{R}_n[X]$. Donc f est bien définie.

(b) On a directement :

$$\dim\left(\mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]\right) = \dim\left(\mathbb{R}_{n-p}[X]\right) + \dim(\mathbb{R}_{p-1}[X]) = (n - p + 1) + p = n + 1.$$

(c) Soit $(Q, R) \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors $BQ + R = 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc $BQ = -R$.
Si Q est non nul, alors : $\deg(BQ) \geq p > \deg(R)$, ce qui est absurde, donc : $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$, donc $R = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}[X]^2}\}$.

(d) D'après la question précédente, l'application f est injective. Comme de plus :

$$\dim\left(\mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]\right) = n + 1 = \dim\left(\mathbb{R}_n[X]\right),$$

l'application f est bijective.
Il existe donc un et un seul couple $(Q, R) \in \mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]$ tel que $A = BQ + R$:
on retrouve le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.