Devoir à la maison n° 13

Exercice 1. Soit $n \geq 2$ un entier. On lance une pièce équilibrée n fois.
On note :

- $\forall k \in [\![1, n]\!],\ A_k$ l'événement « le $k^{\text{ème}}$ lancer a donné un *pile* »,
- B l'événement « le nombre de *pile* obtenu lors des n lancers est pair »,
- $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in [\![0, k]\!]$, $B_{k,i}$ l'événement « lors des k premiers lancers, on a obtenu exactement i *pile* ».

1. Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall i \in [\![0, k]\!], \mathbb{P}(B_{k,i}) = \binom{k}{i} \frac{1}{2^k}$.
2. En déduire la probabilité de l'événement B.
3. (a) Déterminer $\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n}(B)$.
   (b) En déduire que les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ ne sont pas mutuellement indépendants.
4. (a) Soient $k \in [\![1, n-1]\!]$, puis $i_1, \ldots, i_k \in [\![1, n]\!]$ distincts. Justifier que $\mathbb{P}_{A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}}(B) = \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire que toute sous-famille stricte de $(A_1, A_2, \ldots, A_n, B)$ est une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercice 2.

1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
   On considère l'application :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} F \times G & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que f est linéaire.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = F + G$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à (c'est-à-dire de même dimension que) $F \cap G$.
   (d) Appliquer le théorème du rang à l'application f. Quelle formule retrouve-t-on ?
2. Soient n, p deux entiers tels que $1 \leq p \leq n$. Soit $B \in \mathbb{R}_p[X]$. On considère l'application linéaire :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ (Q, R) & \mapsto & BQ + R \end{array} \right. .$$
   (a) Montrer que f est bien définie.
   (b) Déterminer $\dim\left(\mathbb{R}_{n-p}[X] \times \mathbb{R}_{p-1}[X]\right)$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \left\{0_{\mathbb{R}[X]^2}\right\}$.
   (d) Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que A admet un et un seul antécédent par f.
   Comment s'appelle ce résultat ?