Devoir à la maison n° 12
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Soient $u=(x_1,y_1,z_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2)$ dans $\mathbb{R}^3$ et λ,μ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u+\mu v) & = & ((\lambda x_1+\mu x_2)-(\lambda y_1+\mu y_2)+(\lambda z_1+\mu z_2), \\ & & 2(\lambda x_1+\mu x_2)+(\lambda y_1+\mu y_2)+2(\lambda z_1+\mu z_2)) \\ & = & \lambda(x_1-y_1+z_1,2x_1+y_1+2z_1)+\mu(x_2-y_2+z_2,2x_2+y_2+2z_2) \\ & = & \lambda f(u)+\mu f(v), \end{array}$$

donc f est compatible avec la combinaison linéaire. Donc f est une application linéaire.

(b) Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u\in\operatorname{Ker}(f) & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} x-y+z & = & 0 \\ 2x+y+2z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y & = & x+z \\ 3x+3z & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 0 \\ z & = & -x \end{array}\right. \\ & \Leftrightarrow & u=(x,0,-x)=x\cdot(1,0,-1), \end{array}$$

donc $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}((1,0,-1))$. $\operatorname{Ker}(f)$ est donc une droite de $\mathbb{R}^3$; comme $\operatorname{Ker}(f)\neq\{0_{\mathbb{R}^3}\}$, f n'est pas injective.

De plus, $f(u)=x\cdot(1,2)+y\cdot(-1,1)+z\cdot(1,2)$, donc $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}(\underbrace{(1,2)}_{u_1},\underbrace{(-1,1)}_{u_2},\underbrace{(1,2)}_{u_3})$.

Les vecteurs u_1 et u_3 étant égaux, on peut simplifier : $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}(u_1,u_2)$. Comme u_1 et u_2 sont non colinéaires, $\operatorname{Im}(f)$ est un plan de $\mathbb{R}^2$, donc c'est $\mathbb{R}^2$. Donc f est surjective.

2. (a) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, notons $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$. Alors $P\left(\dfrac{1}{X}\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k\frac{1}{X^k}$, donc :

$f(P)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_kX^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}X^k\in\mathbb{R}_n[X]$. Donc f est bien définie.

(b) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. Notons $Q=f(P)=X^nP\left(\dfrac{1}{X}\right)$. Alors :

$$f\circ f(P)=f(Q)=X^nQ\left(\frac{1}{X}\right)=X^n\times\frac{1}{X^n}P\left(\frac{1}{\frac{1}{X}}\right)=P(X),$$

donc $f\circ f=\operatorname{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$. Donc f est une symétrie.

(c) Notons $p = \dfrac{1}{2}\left(f + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_4[X]}\right)$ le projecteur associé à f. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} a_k X^k \in \mathbb{R}_4[X]$, on a donc :

$p(P) = \dfrac{1}{2}\left(X^4 P\left(\dfrac{1}{X}\right) + P(X)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \dfrac{a_k + a_{4-k}}{2} X^k$. Donc :

$$P \in \mathrm{Ker}(p) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a_0 + a_4 & = & 0 \\ a_1 + a_3 & = & 0 \\ 2a_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow P = a_4(X^4 - 1) + a_3(X^3 - X),$$

donc $G = \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\left(X^4 - 1, X^3 - X\right)$. De plus :

$$F = \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(p(1), p(X), p(X^2), p(X^3), p(X^4)\right) = \mathrm{Vect}\left(\frac{X^4 + 1}{2}, \frac{X^3 + X}{2}, X^2\right).$$

Cette dernière famille est échelonnée en degrés, donc libre ; c'est donc une base de F.
Enfin, l'application f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

Exercice 2.

1. La fonction f est définie lorsque $1 + x > 0$, soit $x \in]-1, +\infty[$, et $\ln(1+x) - x \neq 0$. Or la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est strictement concave et a $y = x$ pour tangente en 0, donc : $\ln(1+x) - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Donc $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$.
2. On établit les développements limités :

$\ln(1+x) - x = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$,

$xe^x - \sin(x) - x^2 = x\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) - \left(x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) - x^2 = \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$,

donc :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{\frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}{-\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} \\ & = & \dfrac{-\frac{4}{3}x - \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{1 - \frac{2}{3}x + \underset{x\to 0}{o}(x)} \\ & = & \left(-\dfrac{4}{3}x - \dfrac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 + \dfrac{2}{3}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\ & = & -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{11}{9}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2). \end{array}$$

3. D'après le développement limité calculé ci-dessus, $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc f est prolongeable en 0 par $f(0) = 0$.
4. Comme f admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{4}{3}$.
5. D'après les calculs précédents, T a pour équation $y = -\dfrac{4}{3}x$. De plus : $f(x) - \left(-\dfrac{4}{3}x\right) = -\dfrac{11}{9}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) < 0$ au voisinage de 0, donc Γ est en-dessous de T au voisinage de 0.
6. On a $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{xe^x}{-x} = -e^x$, donc Γ n'a pas de droite asymptote en $+\infty$.