Chapitre 15 : Ensembles - Dénombrement

Table des matières

Un peu d'histoire - Théorie des ensembles

Dans ce chapitre, nous allons parler d'ensembles et de leur application au dénombrement (compter des trucs). Les définitions que nous allons évoquer datent du début du XX^e^ XIX^e^ siècle. Le principe d'équipotence est au cœur des débats (quels ensembles ont le même nombre d'éléments ?).
Les grands noms de la théorie des ensembles sont Cantor, Hilbert, Fraenkel, Zermelo (Allemagne), Russel (GB), Peano (It), puis plus tard Gödel et son théorème d'incomplétude.

1 Ensembles

1.1 Premières notions

Définition 1 (Ensemble).

Un ensemble E est une collection d'éléments. On dit que x est un *élément* de E lorsque x appartient à E, on note $x \in E$. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

Définition 2 (Ensemble vide).

On appelle *ensemble vide* l'ensemble qui ne contient aucun élément. On le note $\emptyset$.

Définition 3 (Inclusion).

Soient A et B deux ensembles.

- On dit que A est *inclus* dans B si tout élément de A appartient à B. On note $A \subset B$.
- On dit que les ensembles A et B sont *égaux* lorsque $A \subset B$ et $B \subset A$. On note $A = B$.

Définition 4 (Parties d'un ensemble).

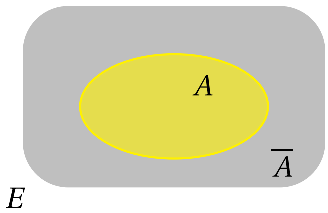
Lorsque E est un ensemble et $A \subset E$, on dit que A est une *partie* (ou un *sous-ensemble*) de E, on note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. On peut alors écrire $A \in \mathscr{P}(E)$.

1.2 Opérations sur les ensembles

Définition 5 (Complémentaire).

Si $A \in \mathscr{P}(E)$, le complémentaire de A dans E, noté $\overline{A}$ est constitué de l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à A.

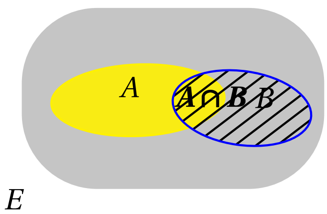
$$x \in \overline{A} \iff x \notin A$$



Définition 6 (Intersection).

Soient A et B deux sous ensembles de l'ensemble E, l'*intersection* des ensembles A et B, notée $A \cap B$ est contient tous les éléments contenus dans A **et** dans B.

$$x \in A \cap B \iff (x \in A) \text{ et } (x \in B)$$



Remarque 1.

$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.

Définition 7 (Ensembles disjoints)**.**

Si $A \cap B = \emptyset$, alors on dit que A et B sont *disjoints*.

Exemple 1:

- A et $\overline{A}$ sont disjoints
- Dans une ville, si E est l'ensemble des personnes qui se rasent eux-mêmes et P l'ensemble des personnes qui ne se rasent pas eux-mêmes alors E et P sont disjoints.

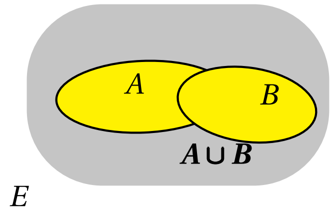
Définition 8 (Différence)**.**

Soient A et B deux parties de E, on note $A \backslash B = A \cap \overline{B}$ la différence entre A et B.

Définition 9 (Réunion)**.**

Soient A et B deux parties d'un ensemble E, la *réunion* des ensembles A et B, notée $A \cup B$ contient les éléments contenus dans A **ou** dans B.

$$x \in A \cup B \iff (x \in A) \text{ ou } (x \in B)$$



Remarque 2.

$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.

Propriété 1 (Distributivité)**.**

Soient A, B et C des sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Propriété 2 (Lois de Morgan).

Soient A et B deux parties de E. On a :

- $\boxed{\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}}$: la négation d'une réunion est une intersection.
- $\boxed{\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}}$: la négation d'une intersection est une réunion.

▶ Exercice 1 — Démontrer une égalité par double-inclusion

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$, telles que $A\cup B = A\cap B$. Démontrer que $A = B$

▶ Exercice 2 — Différence symétrique

Soient $A, B \in \mathscr{P}(E)$. On appelle **différence symétrique** de A et B, notée $A\Delta B$ la partie de E définie par

$$A\Delta B = (A\cup B)\backslash(A\cap B)$$

1. Faire un diagramme de Venn puis calculer $A\Delta B$ dans le cas où $A=\{0,1,2,3\}$ et $B=\{2,3,4\}$.

2. Montrer que $A\Delta B = (A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

3. Si $A\Delta B = A\cap B$, montrer que $A=B=\emptyset$.

4. Soit C une partie de E. Montrer que $A\Delta B = A\Delta C \iff B = C$

2 Principes de dénombrement

2.1 Ensemble fini

Définition 10 (Cardinal d'un ensemble).

Soit n un entier naturel. Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini**. On dit alors que n est le **cardinal** de E et on note $n = \mathrm{Card}(E) = \#E$.

■ **Exemple 2:**

$E = \{0,2,4,6,8,10\}$ est un ensemble à 6 éléments, on a donc $\mathrm{Card}(E) = 6$.

Dans la suite du cours, E désignera, sauf mention contraire, un ensemble fini à n éléments.

Remarque 3.

1. $\mathrm{Card}(\emptyset) = 0$
2. Certains ensembles ne sont pas finis. Par exemple :
   - $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels
   - $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers (Démonstration par l'absurde)
   - $\mathbb{R}$ et tous les intervalles du type $[a;b]$ avec $a\neq b$.

Cantor a d'ailleurs établi que le cardinal de $\mathbb{R}$ était strictement plus grand que celui de $\mathbb{N}$.

2.2 Principe additif

Propriété 3 (Réunion disjointe).

Si $A_1, \cdots, A_p$ sont p ensembles finis, deux à deux disjoints. On a :

$$\mathrm{Card}\left(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p\right) = \mathrm{Card}(A_1) + \mathrm{Card}(A_2) + \ldots + \mathrm{Card}(A_p)$$

Conséquence 1 (Complémentaire).

Si A est une partie d'un ensemble fini E et $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E, alors

$$\mathrm{Card}\left(\overline{A}\right) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A)$$

Dans le cas où les ensembles ne sont pas disjoints, on applique la formule du crible dont l'expression pour deux ensembles est bien connue

Propriété 4 (Formule du crible).

- (2 parties) Si A et B sont deux parties d'un ensemble fini E, alors

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

- (3 parties) Si A, B et C sont des parties d'un ensemble fini E, alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \; & \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B + \mathrm{Card}\, C - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) \\ & + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

▶ Exercice 3 Diagrammes de Venn

Représenter les situations suivantes et déduire les données manquantes.

1. Dans une classe de 34 élèves, 20 pratiquent le football en club et 12 le judo. 10 élèves ne pratiquent aucun de ces deux sports.
2. Parmi 40 secrétaires, 8 connaissent l'espagnol, 15 l'anglais, 9 l'allemand. D'autre part, 4 parlent l'anglais et l'allemand, 5 l'anglais et l'espagnol, 2 l'espagnol et l'allemand, et deux parlent les 3 langues.
   Combien de secrétaires ne pratiquent aucune de ces trois langues ?

2.3 Produit cartésien d'ensembles

Définition 11 (Produit cartésien de deux ensembles).

Soit E et F deux ensembles non vides.
L'ensemble G des couples $(\underbrace{x}_{\in E} ; \underbrace{y}_{\in F})$ est appelé **produit cartésien** des ensembles E et F et se note $G = E \times F$.

Exemple 3:
Si $E = \{0,1,2\}$ et $F = \{4,5\}$ alors

- $E \times F = \{(0,4)\,;(0,5)\,;(1,4)\,;(1,5)\,;(2,4)\,;(2,5)\}$
- $F \times E = \{(4,0)\,;(4,1)\,;(4,2)\,;(5,0)\,;(5,1)\,;(5,2)\}$

On remarque que, en général, $E \times F \neq F \times E$

▶ Exercice 4

1. Décrire en extension l'ensemble $F \times F$ (noté F^2) avec $F = \{4,5\}$.
2. Si $\Omega = \{P, F\}$, décrire en extension l'ensemble Ω^3. Donner un principe d'écriture de Ω^4. Quand rencontre-t-on ce type d'ensembles ?

Remarque 4.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un produit cartésien : c'est l'ensemble des couples de réels (x, y).

Propriété 5 (Principe multiplicatif).

Si $\text{Card}(E) = n$ et $\text{Card}(F) = p$ alors $\text{Card}(E \times F) = n \times p$.

Remarque 5 (⚠).

Attention le même symbole $\times$ a deux significations.

Définition 12 (généralisation ($k-$uplets)).

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $E_1, \cdots, E_k$ k ensembles non vides.

- Toute liste $(x_1, \cdots, x_k)$ où chaque x_i appartient à E_i est appelé $k-$uplet (ou $k-$liste)
- L'ensemble de ces $k-$uplets est le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k$.

Les $k-$uplets sont une extension des "couples" ou "triplets".

Propriété 6 (Nombre de $k-$uplets d'ensembles finis).

Si $E_1, \cdots, E_k$ sont finis, alors

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_k) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \ldots \times \text{Card}(E_k)$$

▶ Exercice 5

Combien de plaques minéralogiques différentes peut-on créer avec le système français (2 lettres, 3 chiffres, 2 lettres) ?

Remarque 6 (k−uplets d'un ensemble à n éléments).

Si E est un ensemble à n éléments, on peut considérer l'ensemble E^k constitué des k−uplets de E.
Le nombre de listes ainsi obtenues est de $\text{Card}(E)^k = n^k$.

■ Exemple 4:

Un cadenas à 4 chiffres permet d'obtenir $10^4 = 10\,000$ combinaisons possibles.

3 k−uplets d'éléments distincts — Permutations

3.1 k−uplets d'éléments distincts

Définition 13 (Arrangements).

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble de cardinal n.
Une k−liste d'éléments de E deux à deux distincts est appelé un **arrangement** de k éléments de E.

Un arrangement est un tirage de k éléments dans E, dans un certain ordre sans remise.

■ Exemple 5:

Lors d'une course à pied, il y a 8 participants et 3 places sur le podium. Le nombre de classements possibles est égal à $A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336$.

3.2 Permutations

Définition 14 (Permutation).

Soit E un ensemble de n éléments. Un arrangement complet (une n−liste d'éléments distincts) de E est appelé une **permutation** de E.

Propriété 7 (Factorielle).

Le nombre de permutations d'un ensemble E est noté $n!$ qui se lit « factorielle n » égal à

$$n! = n(n-1)\dots 3 \times 2 \times 1$$

On convient que $0! = 1$.

■ **Exemple 6:**

Au Scrabble, on pioche les lettres **A, R, T, E, E, S, W** , il y a $\dfrac{7!}{2!} = 2520$ « mots » de 7 lettres possibles, ayant un sens ou pas (il y en a un seul avec un sens).

▶ Exercice 6

Combien d'anagrammes y a-t-il du mot « MATHS », « ARNAUD » et « ANANAS » ?

Propriété 8 (Écriture d'un arrangement).

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

4 Parties d'un ensemble — Combinaisons

4.1 Nombre de parties d'un ensemble

Définition 15 (Rappel : Partie d'un ensemble).

Soit E un ensemble. On dit qu'un ensemble A est une partie de E, que l'on note $A \subset E$ lorsque

$$x \in A \implies x \in E$$

⚠Un $k-$uplet n'est pas un sous-ensemble de E (il peut y avoir des répétitions et l'ordre compte dans l'un et pas dans l'autre). Un arrangement n'est pas non plus un sous-ensemble car, par exemple $(2,1) \neq (1,2)$ alors que $\{1,2\} = \{2,1\}$.

L'ensemble des parties de E se note $\mathscr{P}(E)$

Propriété 9 (Nombre de parties).

Soit E un ensemble à n éléments.

$$\text{Card}\,(\mathscr{P}(E)) = 2^n$$

Démonstration

Le cardinal de $\mathscr{P}(E)$ est égal au nombre de $n-$uplets de l'ensemble $\{0\,,\,1\}$

□

4.2 Combinaisons

Définition 16 (Combinaison).

Soit k et n deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et E un ensemble à n éléments. On appelle *combinaison de k éléments de E* toute partie de E à k éléments.

Une combinaison correspond à un tirage simultané de k éléments parmi les n : il n'y a pas d'ordre de tirage.

Propriété 10 (Nombre de combinaisons).

Soient n et k deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le nombre de combinaisons de k éléments parmi les n se note $\binom{n}{k}$ et est égal à

$$\binom{n}{k} = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés « **coefficients binomiaux** ».

■ **Exemple 7:**
Méthode de calcul :

$$\binom{7}{3} = \frac{\overbrace{7 \times 6 \times 5}^{3 \text{ en partant de } 7}}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3 \text{ en partant de } 3}} = 35$$

▶ Exercice 7

Une grille de Loto comporte 49 numéros. Pour jouer, on doit cocher 6 numéros.
De combien de manières peut-on remplir une grille ?

4.3 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 11 (Quelques relations).

Soient n et k des entiers naturels, $0 \leqslant k \leqslant n$.

- Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Choisir k éléments parmi n revient à en « écarter » $(n-k)$.
- **Relation de Pascal** : Pour tous $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Propriété 12 (Quelques valeurs remarquables).

Soit n un entier naturel.

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, c'est la somme des $n-1$ premiers entiers.
- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

▶ Exercice 8

1. Démontrer que $p\binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$
2. En déduire la somme suivante : $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$

On a pour finir une belle application de ces principes de dénombrement :

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton).

Soient a, et b deux nombres réels, n un entier quelconque. On a

$$(a+n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

■ **Exemple 8:**

$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

$(u+v)^4 = u^4 + 4u^3v + 6u^2v^2 + 4uv^3 + v^4$