Devoir surveillé n° 7
CORRIGÉ

Exercice 1.

1. (a) Comme $0-0+6\times 0 = 0+3\times 0+4\times 0-2\times 0 = 0$, $0_E \in F$.
Soient $u=(x_1,y_1,z_1,t_1)$ et $v=(x_2,y_2,z_2,t_2)\in F$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Alors :

$$\lambda u+\mu v = (\underbrace{\lambda x_1+\mu x_2}_{X}, \underbrace{\lambda y_1+\mu y_2}_{Y}, \underbrace{\lambda z_1+\mu z_2}_{Z}, \underbrace{\lambda t_1+\mu t_2}_{T}).$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} X-Y+6T &=& (\lambda x_1+\mu x_2)-(\lambda y_1+\mu y_2)+6(\lambda t_1+\mu t_2) \\ &=& \lambda(x_1-y_1+6t_1)+\mu(x_2-y_2+6t_2) \\ &=& 0 \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} X+3Y+4Z-2T &=& (\lambda x_1+\mu x_2)+3(\lambda y_1+\mu y_2)+4(\lambda z_1+\mu z_2)-2(\lambda t_1+\mu t_2) \\ &=& \lambda(x_1+3y_1+4t_1-2t_1)+\mu(x_2+3y_2+4t_2-2t_2) \\ &=& 0, \end{array}$$

donc $\lambda u+\mu v\in F$.
Donc F est non vide et stable par combinaison linéaire, donc F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Soit $u=(x,y,z,t)\in E$, on a :

$$\begin{array}{rcl} u\in F &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} x-y+6t &=& 0 \\ x+3y+4z-2t &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} x-y+6t &=& 0 \\ 4y+4z-8t &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} x-y+6t &=& 0 \\ y+z-2t &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} x+z+4t &=& 0 \\ y+z-2t &=& 0 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow& u=(-z-4t,-z+2t,z,t) \\ &\Leftrightarrow& u=z(-1,-1,1,0)+t(-4,2,0,1), \end{array}$$

donc $F=\mathrm{Vect}\left(\underbrace{(-1,-1,1,0)}_{a_1}, \underbrace{(-4,2,0,1)}_{a_2}\right)$.
Les vecteurs a_1,a_2 étant non colinéaires, la famille (a_1,a_2) est libre, donc est une base de F.

2. (a) Par définition, la famille (u_1,u_2,u_3) est génératrice de G. Vérifions si elle est libre :
soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\in\mathbb{R}$ tels que $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=0_E$, alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2-7\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_1+6\lambda_2-9\lambda_3 &=& 0 \\ -\lambda_1-2\lambda_2+\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2-2\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right. \quad \text{donc} \quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+3\lambda_3 &=& 0 \\ \lambda_2-2\lambda_3 &=& 0 \end{array}\right.,$$

donc u_1,u_2,u_3 sont liés par la relation $-3u_1+2u_2+u_3=0_E$.
Donc $G=\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$. Les vecteurs u_1,u_2 étant non colinéaires, la famille (u_1,u_2) est libre, donc est une base de G.

(b) Comme $1-1+6\times 0 = 1+3\times 1+4\times(-1)-2\times 0 = 0$, $u_1 \in F$.
Comme $5-6+6\times 1 = 5 \neq 0$, $u_2 \notin F$.
Comme $-7+9+6\times(-2) = -10 \neq 0$, $u_3 \notin F$.
Comme $u_1 \in F\cap G$, $\mathrm{Vect}(u_1) \subset F\cap G$.
Or $G = \mathrm{Vect}(u_1,u_2)$, donc $F\cap G = \mathrm{Vect}(u_1)$ ou $\mathrm{Vect}(u_1,u_2)$.
Comme $u_2 \notin F$, on a donc $F\cap G = \mathrm{Vect}(u_1)$. Donc $F\cap G$ a pour base la famille (u_1).

3. (a) Soient $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2 = 0_E$. Alors :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+6\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_1+6\lambda_2+\lambda_3+7\lambda_4 &=& 0\\ -\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2+2\lambda_4 &=& 0\end{array}\right. \quad\text{donc}\quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+6\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2+\lambda_4 &=& 0\\ 3\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2+2\lambda_4 &=& 0\end{array}\right. \quad\text{donc}\quad \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+6\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_2 &=& 0\\ 3\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4 &=& 0\\ \lambda_4 &=& 0\end{array}\right.$$

donc $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$. Donc la famille (u_1,u_2,v_1,v_2) est libre. Elle engendre donc un espace de dimension 4 dans $E=\mathbb{R}^4$, c'est-à-dire E. C'est donc une base de E.
Les sous-espaces G et H sont donc supplémentaires dans E.

(b) Soit $u=(x,y,z,t)\in E$. On cherche $g\in G$ et $h\in H$ tels que $u=g+h$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 v_1+\lambda_4 v_2 &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+6\lambda_4 &=& x\\ \lambda_1+6\lambda_2+\lambda_3+7\lambda_4 &=& y\\ -\lambda_1-2\lambda_2-3\lambda_4 &=& z\\ \lambda_2+2\lambda_4 &=& t\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+6\lambda_4 &=& x\\ \lambda_2+\lambda_4 &=& -x+y\\ 3\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4 &=& x+z\\ \lambda_2+2\lambda_4 &=& t\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+5\lambda_2+\lambda_3+6\lambda_4 &=& x\\ \lambda_2 &=& -2x+2y-t\\ 3\lambda_2+\lambda_3+3\lambda_4 &=& x+z\\ \lambda_4 &=& x-y+t\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow& \left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1 &=& x-y-z-t\\ \lambda_2 &=& -2x+2y-t\\ \lambda_3 &=& 4x-3y+z\\ \lambda_4 &=& x-y+t\end{array}\right.,\end{array}$$

donc :

$$\begin{array}{rcl} g &=& (x-y-z-t)(1,1,-1,0)+(-2x+2y-t)(5,6,-2,1)\\ &=& (-9x+9y-z-6t, -11x+11y-z-7t, 3x-3y+z+3t, -2x+2y-t)\end{array}$$

et :

$$\begin{array}{rcl} h &=& (4x-3y+z)(1,1,0,0)+(x-y+t)(6,7,-3,2)\\ &=& (10x-9y+z+6t, 11x-10y+z+7t, -3x+3y-3t, 2x-2y+2t).\end{array}$$

Le projecteur sur G parallèlement à H s'écrit alors :

$$p_{G//H} : \left\{\begin{array}{rcl} E &\to& E\\ (x,y,z,t) &\mapsto& (-9x+9y-z-6t, -11x+11y-z-7t, 3x-3y+z+3t, -2x+2y-t)\end{array}\right..$$

Exercice 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et 1. Il existe donc $c \in]0, 1[$ tel que :

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^{n} \exp^{(k)}(0)\frac{(1-0)^k}{k!} + \exp^{(n+1)}(c)\frac{(1-0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

c'est-à-dire : $e - u_n = \dfrac{e^c}{(n+1)!}$. Or : $0 < \dfrac{e^c}{(n+1)!} < \dfrac{e}{(n+1)!}$, d'où l'assertion voulue.

2. (a) Soit $n \geq q$. Alors : $n!\,(e - u_n) = p \times \dfrac{n!}{q} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$.

   Or $\dfrac{n!}{q}$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\dfrac{n!}{k!}$, sont des entiers, donc $n!\,(e - u_n)$ est un entier.

   (b) D'après la question 1 : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < n!(e - u_n) < \dfrac{e}{n+1}$.

   Comme $\dfrac{e}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \dfrac{e}{n+1} < 1$. D'après la question précédente, pour tout $n \geq \max(N, q)$, $n!\,(e - u_n)$ est donc un entier dans $]0, 1[$, ce qui est absurde.

   Donc e est irrationnel.

3. (a) Si $a = 0$, alors $be + c = 0$, donc e est rationnel. Comme on vient de montrer que ce n'est pas le cas, $a \neq 0$.

   (b) La fonction f est une combinaison linéaire des fonctions $\exp$ et $x \mapsto \exp(-x)$, qui sont usuellement de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Donc f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

   On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = ae^x - ce^{-x}$, puis $f'' = f$, $f^{(3)} = f'$, etc. Donc :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(k)}(x) = ae^x + (-1)^k ce^{-x}.$$

   (c) Comme la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on peut lui appliquer la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n-1$ entre 0 et 1. Il existe donc $\gamma \in]0, 1[$ tel que :

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0)\frac{(1-0)^k}{k!} + f^{(n)}(\gamma)\frac{(1-0)^n}{n!},$$

   d'où la formule voulue.

   (d) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\dfrac{(n-1)!}{k!}$ est un entier. De plus : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f^{(k)}(0) = a + (-1)^k c \in \mathbb{Z}$ et $f(1) = ae + ce^{-1} = -b \in \mathbb{Z}$. Donc, d'après la question précédente, $\dfrac{f^{(n)}(\gamma)}{n}$ est un entier.

   De plus, $\left|\dfrac{f^{(n)}(\gamma)}{n}\right| = \dfrac{|a|e^\gamma + |c|e^{-\gamma}}{n} \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc, par encadrement, $\left(\dfrac{f^{(n)}(\gamma)}{n}\right)$ converge vers 0.

   Comme c'est une suite d'entiers, elle est donc stationnaire à 0.

   Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $f^{(n)}(\gamma) = 0$, c'est-à-dire que $ae^\gamma + ce^{-\gamma} = ae^\gamma - ce^{-\gamma} = 0$, donc $a = c = 0$, ce qui est absurde. Donc e n'est pas algébrique de degré 2.

   On peut en fait montrer que e est un nombre transcendant*, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers non nul.*

Exercice 3.

1. Comme φ est non nulle, il existe $u_1 \in E$ tel que $\varphi(u_1) \neq 0$. Notons $\alpha = \varphi(u_1) \neq 0$, on a alors :

$$1 = \frac{\varphi(u_1)}{\alpha} = \varphi\left(\frac{u_1}{\alpha}\right),$$

   donc $u_0 = \dfrac{u_1}{\alpha}$ convient.

2. (a) Soient u, v dans E et λ, μ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} f(\lambda u + \mu v) & = & (\lambda u + \mu v) - \varphi(\lambda u + \mu v) u_0 \\ & = & (\lambda u + \mu v) - (\lambda \varphi(u) + \mu \varphi(v))\, u_0 \\ & = & \lambda\,(u - \varphi(u) \cdot u_0) + \mu\,(v - \varphi(v) \cdot u_0) \\ & = & \lambda f(u) + \mu f(v), \end{array}$$

   donc f est linéaire.

   (b) Comme $\varphi(u_0) = 1$, $f(u_0) = u_0 - u_0 = 0_E$.
   Donc $u_0 \in \mathrm{Ker}\, f$, donc $\mathrm{Vect}(u_0) \subset \mathrm{Ker}\, f$.
   Soit u dans E, on a :

$$u \in \mathrm{Ker}\, f \Leftrightarrow f(u) = 0_E \Leftrightarrow u = \varphi(u) u_0,$$

   donc $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Vect}(u_0)$.
   Donc $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Vect}(u_0)$. Il s'agit de la droite de E de vecteur directeur u_0 et passant par 0_E.

   (c) Soit u dans $\mathrm{Im}\, f$. Soit $v \in E$ tel que $u = f(v)$, alors :

$$\varphi(u) = \varphi(v - \varphi(v) u_0) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0,$$

   donc $u \in \mathrm{Ker}\, \varphi$. Donc $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, \varphi$.
   Réciproquement, soit u dans $\mathrm{Ker}\, \varphi$. Alors :

$$u = u - \varphi(u) \cdot u_0 = f(u),$$

   donc $u \in \mathrm{Im}\, f$. Donc $\mathrm{Ker}\, \varphi \subset \mathrm{Im}\, f$.
   Donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, \varphi$.

   (d) Soit u dans E, on a :

$$f \circ f(u) = f\left(u - \varphi(u) \cdot u_0\right) = f(u) - \varphi(u) f(u_0) = f(u),$$

   donc $f \circ f = f$.
   D'après les questions précédentes, f est donc le projecteur sur $\mathrm{Ker}\, \varphi$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(u_0)$.

Problème.

I. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Le nombre $f(x)$ existe lorsque $1-x \neq 0$ et lorsque $\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| > 0$, c'est-à-dire quand $x \neq \pm 1$. Donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Soit $x \in D$, on a : $f(-x) = ((-x)^2 - 1) \ln \left|\dfrac{1-x}{1+x}\right| = -f(x)$, donc f est impaire.

2. Au voisinage de 0, $\dfrac{1+x}{1-x} > 0$, donc $f(x) = x \mapsto (x^2-1) \ln \left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = (x^2-1)\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right]$.

De plus, usuellement : $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-1)\left[\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)\right] \\ &= 2(x^2-1)\left[x + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right] \\ &= 2\left(-x + x^3 - \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\ &= -2x + \frac{4}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4). \end{aligned}$$

3. D'après le développement limité ci-dessus, la courbe $\mathcal{C}$ a pour tangente en 0 la droite d'équation $y = -2x$. De plus :

$$f(x) - (-2x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{4}{3}x^3 < 0 \text{ si} x < 0, \ > 0 \text{ si} x > 0,$$

donc la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de sa tangente à gauche de 0, au-dessus à droite.

II. 1. Soit $x \in D^*$, on a :

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) \ln \left|\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right| = -\frac{x^2-1}{x^2} \ln \left|\frac{1+x}{1-x}\right| = -\frac{f(x)}{x^2}.$$

Notons $y = \dfrac{1}{x}$, alors $y \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, d'après le développement limité de la question I.2. :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 f(y) \\ &= -x^2\left(-2y + \frac{4}{3}y^3 + \underset{y\to 0}{o}(y^4)\right) \\ &= -x^2\left(-\frac{2}{x} + \frac{4}{3x^3} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^4}\right)\right) \\ &= 2x - \frac{4}{3x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right). \end{aligned}$$

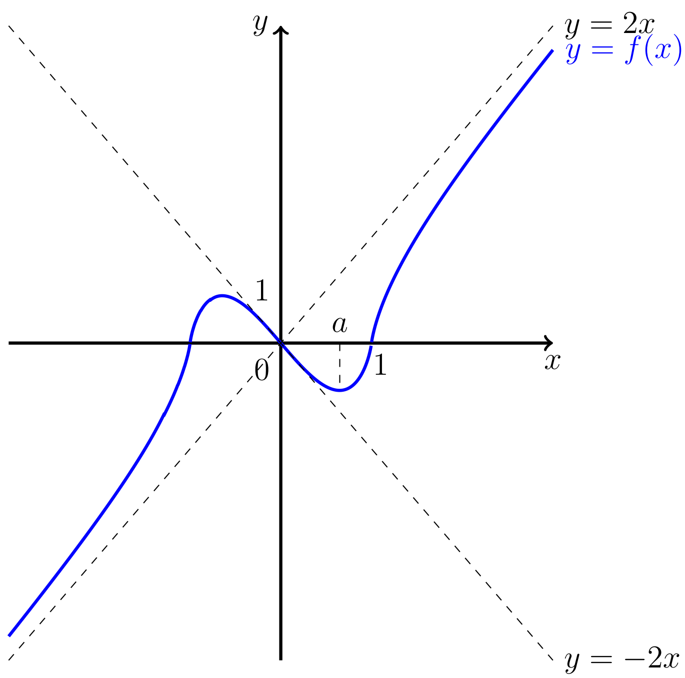
2. D'après le développement asymptotique ci-dessus, la courbe $\mathcal{C}$ admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2x$. De plus :

$$f(x) - 2x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{3x} < 0,$$

donc la courbe est en-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

Comme $y \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, le développement asymptotique ci-dessus est également valable en $-\infty$. Comme $f(x) - 2x \underset{x\to-\infty}{\sim} -\dfrac{4}{3x} > 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote en $-\infty$.

3. On a : $f(x) = (x^2-1)\ln|1+x| - (x^2-1)\ln|1-x|$. Or $(x^2-1)\ln|1+x| \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ directement, et $(x^2-1)\ln|1-x| = (x+1)\times(x-1)\ln|x-1| \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées. Donc $f(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$. La fonction f se prolonge donc par continuité en 1 avec $f(1)=0$.
4.



III. 1. D'après l'étude ci-dessus, la fonction f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$, donc, d'après le théorème de la bijection monotone, f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ dans $f([1,+\infty[) = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [0,+\infty[$.

2. Comme $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $f^{-1}(y) \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc : $x_n = f^{-1}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on a : $n = f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2x_n$, donc $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

4. Comme $y_n = x_n - \frac{n}{2} = \underset{n\to+\infty}{o}(n)$, on a :

$$\begin{aligned}
n &= f\left(\frac{n}{2}+y_n\right)\\
&= 2\left(\frac{n}{2}+y_n\right) - \frac{4}{3\left(\frac{n}{2}+y_n\right)} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x_n^2}\right)\\
&= n + 2y_n - \frac{8}{3n}\frac{1}{1+\frac{2y_n}{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= n + 2y_n - \frac{8}{3n}\left(1-\frac{2y_n}{n}\right) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\\
&= n + 2y_n - \frac{8}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right),
\end{aligned}$$

donc $y_n = \frac{4}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, et donc :

$$x_n = \frac{n}{2} + \frac{4}{3n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$