Feuille d'exercices 18
Éléments de correction

Exercice 1.

(d) Notons D l'événement « Un seul dé donne 6, ou les deux donnent 3 », alors :

$$D = \{\omega_{k,6}, \omega_{6,k} \mid k \in [\![1,5]\!]\} \cup \{\omega_{3,3}\},$$

donc $\mathrm{Card}(D) = 11$, et donc $\mathbb{P}(D) = \dfrac{\mathrm{Card}(D)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{11}{36}$.

(e) Notons E l'événement « La somme des résultats vaut 4 », alors :

$$E = \{\omega_{1,3}, \omega_{2,2}, \omega_{3,1}\},$$

donc $\mathrm{Card}(E) = 3$, et donc $\mathbb{P}(E) = \dfrac{\mathrm{Card}(E)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$.

(f) Notons F l'événement « Les deux chiffres sont de parités opposées », alors :

$$F = \{\omega_{i,j} \mid (i,j) \in \{1,3,5\} \times \{2,4,6\} \cup \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}\},$$

donc $\mathrm{Card}(F) = 18$, et donc $\mathbb{P}(F) = \dfrac{\mathrm{Card}(F)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 2. Notons Ω l'univers, c'est un ensemble de cardinal $\dbinom{20}{4} = 4845$.

(a) Notons A l'événement « On obtient deux paires de chaussures ». Il y a 2 parmi 10 choix, donc $\mathrm{Card}(A) = \dbinom{10}{2} = 45$, donc $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{3}{323} \simeq 0,01$.

(b) Notons B l'événement « On obtient au moins une paire de chaussures ». Il y a 1 parmi 10 choix pour cette paire et 2 parmi 18 choix pour les deux autres chaussures tirées, donc $\mathrm{Card}(B) = \dbinom{10}{1} \times \dbinom{18}{2} = 1530$, donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{\binom{10}{1} \times \binom{18}{2}}{\binom{20}{4}} = \dfrac{6}{19} \simeq 0,32$.

(c) Notons C l'événement « On obtient une et une seule paire de chaussures ». Alors $C = B \setminus A$, donc $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \simeq 0,31$.

Exercice 12. Notons C l'événement « L'accusé est coupable », D_1 l'événement « Le juré 1 déclare l'accusé coupable » et de même pour D_2.
On connaît $\mathbb{P}(C) = 0,6$, $\mathbb{P}_C(D_1) = \mathbb{P}_C(D_2) = 0,7$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(D_1) = \mathbb{P}_{\overline{C}}(D_2) = 0,2$.
On cherche $\mathbb{P}_{D_1 \cap D_2}(\overline{C})$. D'après la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_{D_1 \cap D_2}(\overline{C}) = \mathbb{P}_{\overline{C}}(D_1 \cap D_2) \times \frac{P(\overline{C})}{\mathbb{P}(D_1 \cap D_2)},$$

où, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{array}{rcl}\mathbb{P}(D_1 \cap D_2) & = & P(C \cap D_1 \cap D_2) + \mathbb{P}(\overline{C} \cap D_1 \cap D_2) \\ & = & \mathbb{P}(C) \times P_C(D_1 \cap D_2) + \mathbb{P}(\overline{C}) \times P_{\overline{C}}(D_1 \cap D_2) \\ & = & 0,6 \times 0,7^2 + 0,4 \times 0,2^2 \\ & = & 0,31,\end{array}$$

donc :

$$\mathbb{P}_{D_1\cap D_2}(\overline{C}) = 0,2^2 \times \frac{0,4}{0,31} \simeq 0,052.$$

Le risque d'erreur judiciaire est donc d'environ $5,2\%$ dans cette configuration.

Exercice 14. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n l'événement « Les descendants d'un individu disparaissent en n générations », de probabilité p_n ; et, pour $k \in [\![0,3]\!]$, E_k l'événement « Un individu a k enfants ».
On connaît $p_0 = \mathbb{P}(D_0) = 0$, et, en supposant chaque individu indépendant :

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_{n+1} &= \mathbb{P}(E_0)\times p_n^0 + \mathbb{P}(E_1)\times p_n^1 + \mathbb{P}(E_2)\times p_n^2 + \mathbb{P}(E_3)\times p_n^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(p_n^3 + 3p_n^2 + 3p_n + 1\right) \\ &= \left(\frac{p_n+1}{2}\right)^3,\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en notant $f : x \mapsto \left(\dfrac{x+1}{2}\right)^3$: $\begin{cases} p_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ p_{n+1} = f(p_n) \end{cases}$. Pour $x \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} f(x) = x \quad &\Leftrightarrow \quad (x+1)^3 = 8x \\ &\Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x-1)(x^2+4x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } -2 \pm \sqrt{4+1} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \text{ ou } \sqrt{5}-2. \end{aligned}$$

L'intervalle $[0,\sqrt{5}-2]$ est alors stable par f, et sur cet intervalle : $f(x) - x \geq 0$. La suite (p_n) est donc croissante, de limite $\sqrt{5}-2 \simeq 0,236$. L'espèce a donc environ $23,6\%$ de risque de disparaître.

Exercice 17. Notons, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, P_k l'événement « on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer ». On cherche $\mathbb{P}\left(\overline{P_1}\cap\overline{P_2}\cap\cdots\cap\overline{P_{n-1}}\cap P_n\right)$. Les lancers étant supposés indépendants, on a :

$$\mathbb{P}\left(\overline{P_1}\cap\overline{P_2}\cap\cdots\cap\overline{P_{n-1}}\cap P_n\right) = \mathbb{P}(\overline{P_1})\times\mathbb{P}(\overline{P_2})\times\cdots\times\mathbb{P}(P_n) = \frac{2}{3^n}.$$