

Devoir surveillé n° 7

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.

La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.

Les exercices qui ne sont pas traités dans l'ordre doivent être rédigés sur des copies séparées.

Le sujet et le brouillon ne sont pas à rendre. Le barème est indicatif.

Exercice 1. (8 points) On considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

1. On considère le sous-ensemble F de E défini par :

$$F = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + 6t = 0 \text{ et } x + 3y + 4z - 2t = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .

(b) Déterminer une base de F .

2. On considère le sous-espace vectoriel G de E engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 , avec :

$$u_1 = (1, 1, -1, 0), \quad u_2 = (5, 6, -2, 1), \quad u_3 = (-7, -9, 1, -2).$$

(a) Déterminer une base de G .

(b) Vérifier si u_1, u_2, u_3 sont dans F . En déduire une base de $F \cap G$.

3. On considère $H = \text{Vect}(v_1, v_2)$ avec $v_1 = (1, 1, 0, 0)$ et $v_2 = (6, 7, -3, 2)$.

(a) Montrer que (u_1, u_2, v_1, v_2) est une base de E . Que peut-on dire des sous-espaces G et H ?

(b) Déterminer l'expression du projecteur sur G parallèlement à H .

Exercice 2. (8 points) On note $e = \exp(1)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$.

1. En appliquant la formule de Taylor-Lagrange, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < e - u_n < \frac{e}{(n+1)!}$.

On précisera la fonction, les bornes, l'ordre et les hypothèses utilisées.

2. On suppose e rationnel, et on note $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que : $\forall n \geq q, n!(e - u_n)$ est un entier.

(b) À l'aide de l'encadrement de la question 1, conclure à une contradiction.

3. On suppose à présent e algébrique de degré 2, c'est-à-dire qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ non tous nuls tels que $ae^2 + be + c = 0$.

(a) Justifier que $a \neq 0$.

(b) On note, dans la suite, $f : x \mapsto ae^x + ce^{-x}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Justifier que la fonction f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f^{(k)}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(c) Montrer qu'il existe $\gamma \in]0, 1[$ tel que : $\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n} = (n-1)!f(1) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!} f^{(k)}(0)$.

(d) En déduire que la suite $\left(\frac{f^{(n)}(\gamma)}{n} \right)$ est une suite d'entiers convergente vers 0. Conclure.

Exercice 3. (6 points) Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire non nulle.

1. Montrer qu'il existe $u_0 \in E$ tel que $\varphi(u_0) = 1$.

On prend dans la suite de l'exercice un tel u_0 .

2. Soit $f : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ u & \mapsto u - \varphi(u) \cdot u_0 \end{cases}$.

(a) Montrer que f est un endomorphisme de E .

(b) Calculer $f(u_0)$. En déduire $\text{Ker } f$, et décrire géométriquement cet espace.

(c) Montrer que $\text{Im } f = \text{Ker } \varphi$.

(d) Calculer $f \circ f$. Que peut-on dire de l'application f ?

Problème. (12 points) On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 1) \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

I. 1. Déterminer l'ensemble de définition D de la fonction f . Étudier la parité de f .

2. Montrer que le développement limité à l'ordre 4 en 0 de f s'écrit :

$$f(x) = -2x + \frac{4}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^4).$$

3. En déduire l'équation de la tangente en 0 à la courbe $\mathcal{C}$, ainsi que la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à cette tangente.

II. 1. Montrer que : $\forall x \in D^*, f(x) = -x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)$.

En déduire un développement asymptotique à deux termes de f en $+\infty$.

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, déterminer la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à cette asymptote. Que se passe-t-il en $-\infty$?

3. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 1. On appelle encore f son prolongement.

4. On admet que f est dérivable et que sa dérivée s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en $a \simeq 0,65$.

À l'aide de l'ensemble de ces données, tracer une allure soignée de la courbe $\mathcal{C}$.

On ne cherchera pas à calculer la dérivée de f (mais c'est un bon exercice !)

III. 1. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note x_n l'unique antécédent dans $[1, +\infty[$ de n par f .

Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

3. En déduire que $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2}$.

4. En notant $x_n = \frac{n}{2} + y_n$, déterminer $\alpha > 0$ tel que :

$$x_n = \frac{n}{2} + \frac{\alpha}{n} + o_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right).$$