$\boxed{\text{Correction Partiel 2}}$ CPES - Série techno/Pro

Exercice 1 (/9)

1°) Sur $]0,+\infty[$ $g(x) = x^2 + \ln(x)$.

1)a) $\forall x \in]0,+\infty[$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x}$ 1

1)b) $\forall x>0$, $x>0$, $2x^2+1>0$ $\Big\}$ $g'(x)>0$ 1

1)c)

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

1

1°) d) limits : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ 1

1°) e) Sur $]0;+\infty[$, g est strictement croissante, g est continue car dérivable.

1,5 $0 \in]\lim\limits_{0} g ; \lim\limits_{+\infty} g[$. d'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. Par balayage à la calculatrice $0{,}65<\alpha<0{,}66$

1°) f)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

0,5

2°) Sur $]0,+\infty[$, $f(x) = x^2 + \ln(x)^2$

2°)a) $f'(x) = 2x + 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x)$

$= \dfrac{2x^2 + 2\ln(x)}{x}$

Donc $f'(x) = \dfrac{2\,g(x)}{x}$ 1,5

2°) b)

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

1

2°) c) Ainsi f admet un minimum $f(\alpha)$ sur $]0;+\infty[$ 0,5

Exercice 2 (/5)

$f(x) = \dfrac{2}{\sin x + 3}$

1°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin x \leq 1$

Donc $2 \leq \sin x + 3 \leq 4$. Donc f définie sur $\mathbb{R}$. 1

2°) $f(x+2\pi) = \dfrac{2}{\sin(x+2\pi)+3} = \dfrac{2}{\sin x + 3} = f(x)$

Donc f est 2π-périodique. 1

3°) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{2\cos x}{(\sin x+3)^2}$ 1 or $(\sin(x)+3)^2>0$ sur $[-\pi,\pi]$

Donc le signe de $\cos(x)$ et celui de $f'(x)$. $\cos(x)>0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ 1

x	$-\pi$		$-\pi/2$		$\pi/2$		π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$

1

Exercice 3 (/3)

(E) $\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln(x)$

1°) Ensemble de définition : $\begin{cases} 6x-2>0 \\ 2x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{2} \\ x>0 \end{cases}$ donc $\mathcal{D} = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ 1

2°) $\forall x \in \mathcal{D}$, (E) $\Leftrightarrow (6x-2)(2x-1) = x$

$\Leftrightarrow 12x^2 - 11x + 2 = 0$

$\Delta = 121 - 8 \times 12 = 25$ $\quad x_{1,2} = \frac{11 \pm 5}{24}$ $\quad x_1 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Donc $\mathcal{S} = \left\{\frac{2}{3}\right\}$ 2

Exercice 4 (/3)

Sur $]-\pi, \pi]$

1°) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

1

2°) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$ ou $3x - \frac{\pi}{4} \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

$\Leftrightarrow 3x \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$ ou $3x \equiv \frac{\pi}{12}\ [\pi]$

$\Leftrightarrow x \equiv \frac{5\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv \frac{\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right]$

2

$\mathcal{S} = \left\{-\frac{23\pi}{36} ; \frac{\pi}{36} ; \frac{25\pi}{36} ; -\frac{19\pi}{36} ; \frac{5\pi}{36} ; \frac{29\pi}{36}\right\}$

Exercice 5 (/11)

A $g(x) = e^x - x$

1°) $g'(x) = e^x - 1$ 1

2°) $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ 1

3°)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

0,5 $\quad g(0) = 1$

4°) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 1 > 0$

0,5

B $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x}$

1°)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x = +\infty$

donc par opérations, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ 1

1°)b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissances comparées.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ est une FI $\frac{\infty}{\infty}$ mais $f(x) = \frac{e^x}{e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{x}{e^x}}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$

1,5

1°)c) Asymptote horizontale en $-\infty$: $y = 0$

en $+\infty$: $y = 1$ 0,5

2°) $f'(x) = \dfrac{(e^x - x)e^x - e^x(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} = \boxed{\dfrac{e^x(-x+1)}{(e^x - x)^2}}$ 1

3°) a)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	1

1

$e^x > 0$ et $(e^x - x)^2 > 0$

$-x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$

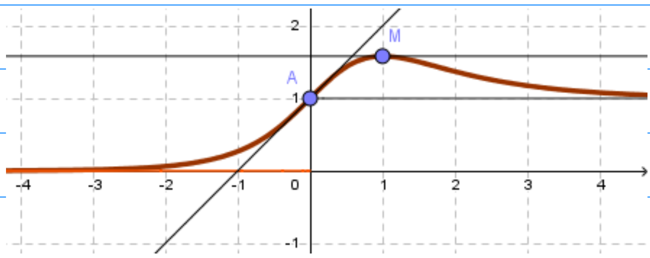
3°) b) $f(1) = \dfrac{e}{e-1}$

$\boxed{x_M = 1 \quad y_M = \dfrac{e}{e-1}}$ 1

4°) $T_0 :\ y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$\boxed{y = 1x + 1}$. 1

5°)



1