$\boxed{\text{Partiel 1}}$. CPES - Série techno - Pro . Novembre 2024.

Exercice 1.

1°) $5x^2-8x+1=0$ $\quad \Delta = 64-20 = 44$.

donc $x = \frac{8\pm\sqrt{44}}{10} = \frac{4\pm\sqrt{11}}{5}$ $\quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{4-\sqrt{11}}{5} ; \frac{4+\sqrt{11}}{5} \right\}$

2°) $x^2-4x+3>0$ le polynome a 2 racines: 1 et 3.

donc est positif sur $]-\infty;1[$ et sur $]3;+\infty[$

$\mathcal{S} =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[$

3°) $(x-1)(x^2-8x-1) = x^3-8x^2-x-x^2+8x+1$

$= x^3-9x^2+7x+1$

Pour $x^2-8x-1=0$ on a $\Delta = 64+4 = 68 = 4\times 17$.

donc les racines sont $\frac{8\pm 2\sqrt{17}}{2} = 4\pm\sqrt{17}$

Ainsi,

x	$-\infty$		$4-\sqrt{17}$		1		$4+\sqrt{17}$		$+\infty$
$x-1$			$-$		0		$+$		
x^2-8x-1		$+$	0	$-$			0	$+$	
prod		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

et donc $\mathcal{S} =]-\infty;4-\sqrt{17}] \cup [1;4+\sqrt{17}]$

Exercice 2 $\quad \boxed{\text{Partie A}}$

1°) $\underbrace{u_{n+1}}_{\text{nb adh année } n+1} = \underbrace{0{,}75}_{\text{perte de } 25\%} \times \underbrace{u_n}_{\text{nb adh à l'année } n} \underbrace{+12}_{\text{hausse de 12 adhérents par mois}}$

2°) 1er mois : $n=2$

$u_1 = 0{,}75\times 900+12 = 687$

$u_2 = 527{,}25$

3°) $v_n = u_n - 48$, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1}-48$

$= 0{,}75u_n+12-48 = 0{,}75u_n-36$

$= 0{,}75(u_n-48)$

$= 0{,}75v_n$

Donc (v_n) géom de raison $0{,}75$, de premier terme $v_0 = 900-48 = 852$

b) Ainsi $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 852 \times 0{,}75^n$

c) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = v_n + 48 = 852 \times 0{,}75^n + 48$

d) On constate, en utilisant le tableur de la machine que
$u_9 \simeq 112$ et $u_{10} \simeq 96$.

Donc la présidente devra démissionner au bout de 10 mois

Partie B

1°)

```
S = 0
u = 900
for k in range(12) :
    S = S+u
    u = 0.75*u+12
print(5*S
```

2°) On pourrait programmer le code sur la machine et on obtenait :
19380 €.

3°) $S = \sum_{k=0}^{11} 852 \times 0{,}75^k + 48 = 852 \times \sum_{k=0}^{11} 0{,}75^k + \sum_{k=0}^{11} 48$

$= 852 \times \frac{1 - 0{,}75^{12}}{1 - 0{,}75} + 12 \times 48$

$= 852 \times 4 \times (1 - 0{,}75^{12}) + 576$

$\approx 3300 + 576 \simeq 3876$

$5 \times 3876 \simeq 19380$ on retrouve bien la valeur donnée par Python.

Exercice 3

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$

1°) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ par opérations sur les limites.

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ est une FI du type $\infty - \infty$

$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, \quad f(x) = x^3\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$ $\Bigg\}$ par produit, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

2°) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

avec 1 qui est une racine évidente.

donc $f'(x) = (x-1)(3x-5)$ et $\frac{5}{3}$ est l'autre racine.

Ainsi, $f'(x)$ est négative sur $\left[1; \frac{5}{3}\right]$.

On en déduit

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{77}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 4

g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 3}{x+2}$

1°) $\lim\limits_{\pm\infty} g$ est une FI $\frac{\infty}{\infty}$

$\forall x \neq -2; 0 \quad g(x) = \dfrac{x^2\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = x \dfrac{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}}$

donc par operations sur les limits, $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$

2°) Soit $x \neq -2, \quad g'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+2) - (x^2+3x+3) \times 1}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{2x^2 + 7x + 6 - x^2 - 3x - 3}{(x+2)^2} = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}$

3°) Ainsi comme $(x+2)^2>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ le signe de $f'(x)$ est le même que x^2+4x+3 qui admet -1 et -3 comme racines.
Ainsi on obtient :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
x^2+4x+3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 5

y : âge du père $\qquad y = x+25$

x : âge du fils $\qquad xy = 116$

donc $x\times(x+25)=116 \iff x^2+25x-116=0$

$\Delta = 25^2+4\times116$

$= 625+464$

$\Delta = 1089$ donc $x_{1,2} = \dfrac{-25\pm\sqrt{1089}}{2} = \dfrac{-25\pm33}{2}$

or $-25-33<0$ donc impossible donc $x = \dfrac{-25+33}{2} = 4$

et donc $\boxed{\text{le fils a 4 ans et le père 29 ans.}}$