$\boxed{\text{Partiel } 1}$ - CPES - Série Générale le 7/11/24.

Exercice 1

1°) $\sqrt{x^2-12} = 2x-1 \iff \begin{cases} x^2-12 = 4x^2-4x+1 \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2-4x+13 = 0 & \Delta < 0 \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

Donc pas de solution. $\mathcal{S} = \emptyset$

2) $|2x+3| = |2-x| \iff 2x+3 = 2-x$ ou $2x+3 = -2+x$

$\iff 3x = -1$ ou $x = -5$

$\iff x = -\frac{1}{3}$ ou $x = -5$

$\mathcal{S} = \{-5 ; -\frac{1}{3}\}$

3) $x^3-9x^2+7x+1 \leq 0$ on cherche les racines de x^3-9x^2+7x+1

1 est une racine évidente.

donc il existe a, b, c réels tels que $x^3-9x^2+7x+1 = (x-1)(ax^2+bx+c)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-9x^2+7x+1 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} \quad\quad\quad & x^2-8x-1 \\ -8x^2+7x \quad & \\ \underline{-8x^2+8x} \quad & \\ -x+1 & \\ \underline{-x+1} & \\ 0 & \end{array}$$

Ainsi $x^3-9x+7x+1 = (x-1)(x^2-8x-1)$

or pour x^2-8x-1, $\Delta = 64+4 = 68 = 4\times 17$

donc les deux racines sont $x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{68}}{2} = 4 \pm \sqrt{17}$

on a donc le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$4-\sqrt{17}$		1		$4+\sqrt{17}$		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2-8x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
prod		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathcal{S} =]-\infty ; 4-\sqrt{17}] \cup [1 ; 4+\sqrt{17}]$

Exercice 2

$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \end{cases}$

1.a) $u_1 = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 0 + 1 = \frac{7}{3}$

$u_2 = \frac{2}{3} \times \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \times 1 + 1 = \frac{26}{9}$

1.b) $u_2 - u_1 = \frac{5}{9}$ et $u_1 - u_0 = \frac{1}{3} \neq \frac{5}{9}$ donc (u_n) n'est pas arithmétique.

$\frac{u_2}{u_1} = \frac{26/9}{7/3} = \frac{26}{21}$ et $\frac{u_1}{u_0} = \frac{7/3}{2} = \frac{7}{6} \neq \frac{26}{21}$ donc (u_n) n'est pas géométrique

2.a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - n$

donc si $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1)$

$= \frac{2}{3} u_n + \frac{1}{3} n + \cancel{1} - n - \cancel{1}$

$= \frac{2}{3} u_n - \frac{2}{3} n$

$= \frac{2}{3}(u_n - n) = \frac{2}{3} v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{3}$. $v_0 = u_0 - 0 = 2$.

2.b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = v_n + n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

3a) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

3b) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$

3c) Ainsi $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = 2 \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k + \sum_{k=0}^{n} k = 6 \times \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>Exercice 3 :</u> $f : \mathbb{R} \setminus \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{x^2 - 5x + 5}{x - 4}$

1°) $\lim_{+\infty} f$ est une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$.

$\forall x \neq 4$, $f(x) = \frac{x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{4}{x}\right)} = x \times \frac{1 - \frac{5}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{4}{x}}$

donc par opérations sur les limites, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2°) limites de f en 4^- et 4^+.

tout d'abord $\lim\limits_{x\to 4} x^2-5x+5 = 1$.

si $x<4$, $x-4<0$ et si $x>4$, $x-4>0$.

Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} f(x) = +\infty$

la droite d'équation $x=4$ est une asymptote verticale

3a) si $x\neq 4$, $f'(x) = \dfrac{(x-4)(2x-5)-(x^2-5x+5)}{(x-4)^2} = \dfrac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$

3b) $\forall x\neq 4$, $(x-4)^2>0$ donc le signe de $f'(x)$ dépend du signe de $x^2-8x+15$.

or $x^2-8x+15$ admet 3 et 5 comme racines (par somme et produit par exemple)

Ainsi on en déduit que $x^2-8x+15\leq 0$ sur $[3,5]$.

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
$(x-4)^2$					+				
$x^2-8x+15$		+	0		−		0	+	
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	5	↗	$+\infty$

$f(3) = \dfrac{9-15+5}{-1} = 1$

$f(5) = \dfrac{25-25+5}{1} = 5$

4°) Pour déterminer a, b et c tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{c}{x-4}$, on peut procéder par division:

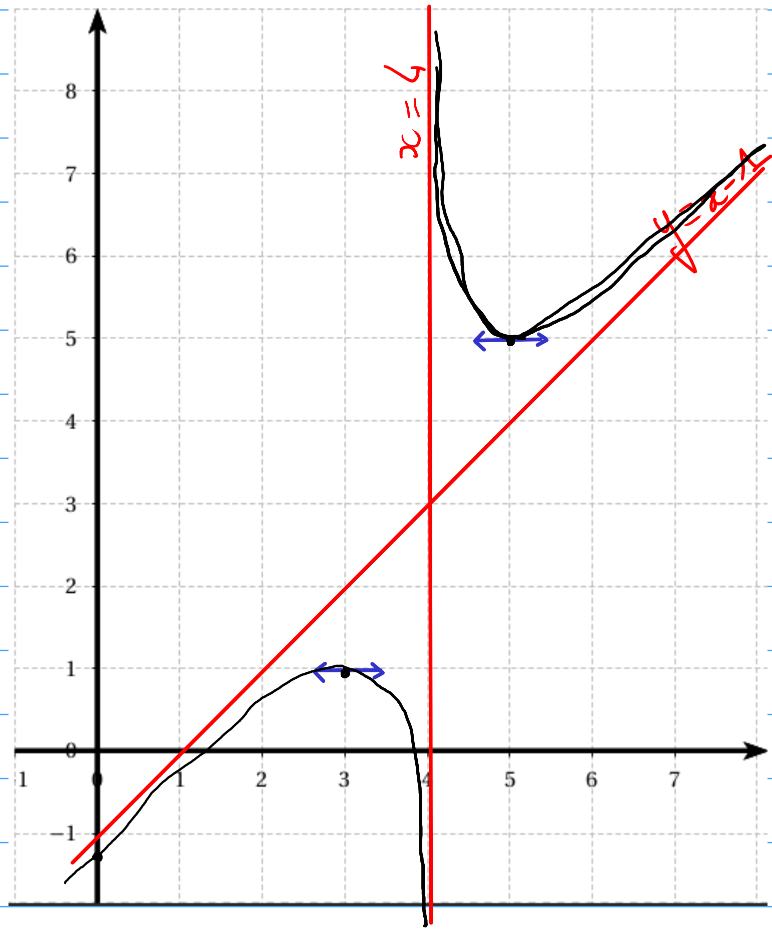
$$\begin{array}{rr|l} x^2 & -5x+5 & x-4 \\ \cline{3-3} \underline{x^2} & \underline{-4x} & x-1 \\ & -x+5 & \\ & \underline{-x+4} & \\ & 1 & \end{array}$$

Donc $f(x) = x-1+\dfrac{1}{x-4}$

5) Ainsi $f(x)-(x-1) = \dfrac{1}{x-4}$ et donc $\lim\limits_{\pm\infty} f(x)-(x-1) = 0$

Donc $y = x-1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$

6°) Représentation graphique.



Exercice 4 $\quad f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

1°) $f(x)$ est définie si et seulement si $x^2-1 \geqslant 0$ or x^2-1 a 2 racines : -1 et 1
donc $x^2-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[= \mathcal{D}_f$.

$\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(-x) = \sqrt{x^2-1} - x$

donc $\forall x \in \mathcal{D}_f,\quad f(x) \times f(-x) = \left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right) = x^2-1-x^2 = -1$

donc $\forall x \in \mathcal{D}_f,\ f(x) \times f(-x) = -1$

2°) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par somme.

or $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = -\dfrac{1}{f(x)}$

par composition de limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{f(x)} = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ donc $y=0$ est une asymptote horizontale

3°) a) $\forall x \in \mathcal{D}'_f$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$

donc $\forall x \in \mathcal{D}'_f$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$

3°) b) donc $f'(x)$ est du signe de $f(x)$ sur $\mathcal{D}'_f$.

- si $x \in]1;+\infty[$, $f(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$
- si $x \in]-\infty;-1[$,

$$\sqrt{x^2-1} + x = \left(\sqrt{x^2-1} + x\right) \times \frac{\sqrt{x^2-1} - x}{\sqrt{x^2-1} - x} = \frac{\overset{<0}{-1}}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{>0} \underbrace{- x}_{>0}} < 0$$

Ainsi $f(x) < 0$ donc $f'(x) < 0$.

On a donc

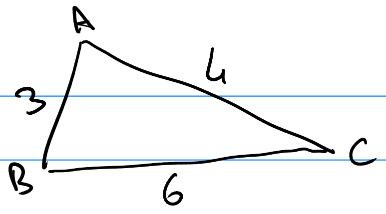
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
Variation de f	0	$\searrow$	-1		1	$\nearrow$	$+\infty$

4a) $f(x) - 2x = \sqrt{x^2-1} - x = f(-x)$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$

4b) $y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Exercice 5



$BC^2 = 36$ donc d'après le théorème de Pythagore,
$AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25$ $\boxed{ABC \text{ n'est pas rectangle}}$

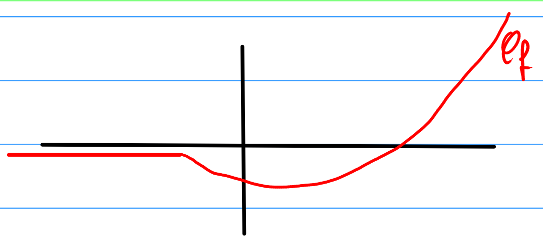
On appelle x la longueur (>0) à ajouter aux 3 côtés de ABC
on a alors $AB = 3 + x$
$AC = 4 + x$
$BC = 6 + x$ donc $[BC]$ est toujours le plus grand côté.

Ainsi ABC rectangle en $A \iff BC^2 = AB^2 + AC^2$
$\iff (6+x)^2 = (4+x)^2 + (3+x)^2$
$\iff 36 + 12x + \cancel{x^2} = 16 + 8x + \cancel{x^2} + 9 + 6x + x^2$
$\iff 0 = x^2 + 2x - 11$
$\Delta = 4 + 44 = 48 = 16 \times 3$
$\iff x = \dfrac{-2 \pm 4\sqrt{3}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{3}$
or $-1 - 2\sqrt{3}$ est négatif donc $\boxed{S = \{2\sqrt{3} - 1\}}$

Si on ajoute $2\sqrt{3} - 1$ aux 3 côtés du triangle, il devient rectangle

Exercice 6

1°) **FAUX** :



est un contre exemple f n'est pas toujours positive.

2°) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ alors tout intervalle ouvert contenant 1 contient toutes les valeurs de $f(x)$ à partir d'un certain rang.
en particulier, il existe un rang $A \in \mathbb{R}$ tel que
$\forall x > A, \quad f(x) \in \left]\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right[$
donc $\forall x > A, \quad f(x) > 0$ donc **VRAI**

3°) Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ alors d'après les opérations sur les limites on doit avoir une FI du type $\frac{\infty}{\infty}$ car x tend vers ∞. donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ **VRAI**