▶ Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]-1,5\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \ln(2x+3) - 1.$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

g définie sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. $\displaystyle\lim_{x\to-1,5} f(x) = -\infty$, donc par opérations sur les limites, $\underline{\displaystyle\lim_{x\to-1,5} g(x) = -\infty}$.

2. $\forall x \in]-1,5\,;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2}{2x+3} - 1 = \dfrac{2-2x-3}{2x+3} = \dfrac{-1-2x}{2x+3}$.
   Or, sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$, $2x+3>0$, donc le signe de $g'(x)$ est le signe de $-1-2x$.
   $-1-2x \geqslant 0 \iff x \leqslant -\dfrac{1}{2}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	-1.5		-0.5		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$g(-0.5)>0$	$\searrow$	$-\infty$

avec $g(-0,5) = \ln 2 - 0,5 \approx 0,19$

3. (a) Sur l'intervalle $]-0,5\,;+\infty[$, la fonction g est continue car dérivable, g est strictement décroissante et $0 \in \left]-\infty\,;g(-0,5)\right[$, donc d'après le théorème de la bijection, il existe une solution unique α à l'équation $g(x)=0$ sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

   (b) Par balayage à la calculatrice, on trouve $0,25 < \alpha < 0,26$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

(u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. $f'(x) = \dfrac{2}{2x+3} > 0$, donc f est croissante sur $[-1\,;\alpha]$ et $f(-1) = -1$ et $f(\alpha) = \alpha$ d'après la question 3(a) de la partie précédente.
   Ainsi, l'intervalle $[-1\,;\alpha]$ est stable par f.

2. (a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $mathcalP_n$: « $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$ »
   - ⋆ Initialisation : $u_0 = 0$ et $u_1 = \ln(3) - 1 > 0$, donc on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant \alpha$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - ⋆ Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. On a donc :
     $-1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$, donc par croissance de f sur $[-1\,;\alpha]$,
     $f(-1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(\alpha)$
     Ainsi, $-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \alpha$ et donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - ⋆ La propriété est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$. Autrement dit

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad -1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant \alpha$$

(b) La suite (u_n) est donc croissante et majorée par α, donc d'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers $\ell \leqslant \alpha$.
Comme f est continue sur $[-1;\alpha]$, et que -1 et α sont les points fixes de f sur $\mathbb{R}$, alors ℓ est égale à -1 ou à α. Or, (u_n) est croissante et $u_0 = 0$, donc -11 ne peut pas être la limite de (u_n). Ainsi (u_n) converge vers α.

▶ Exercice 2

$(E) : y' + 3y = -\mathrm{e}^{2x}$

- ⋆ Équation homogène : $H : y' = -3y$.
  Les solutions sont $\mathscr{S}_H = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-3x} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.
- ⋆ Solution particulière.
  On cherche une solution de (E) sous la forme $f_p(x) = a\mathrm{e}^{2x}$. On a alors :

$$\begin{array}{r} f_p'(x) = 2a\mathrm{e}^{2x} \\ 3f_p(x) = a\mathrm{e}^{2x} \\ \hline -\mathrm{e}^{2x} = 3a\mathrm{e}^{2x} \end{array} \iff a = -\frac{1}{3}$$

  Ainsi une solution particulière est $x \mapsto f_p(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}$.
- ⋆ Conclusion : Solutions de l'équation (E) :

$$\boxed{\mathscr{S}_{(E)} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-3x} - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x} \mid k \in \mathbb{R}\right\}}$$

▶ Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ c'est-à-dire

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $k \geqslant 1$, en multipliant par la quantité conjuguée,

$$2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = 2\frac{k+1-1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \frac{2}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}}$$

.

2. Par téléscopage, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$ donc $u_n \geqslant 2\sqrt{n+1} - 2$
3. Ainsi, comme $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$, d'après le théorème de comparaison, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.