

Exercice 1

$$1^o) \sum_{k=1}^{50} k = \frac{50 \times 51}{2} = 25 \times 51 = 1275 \quad 2^o) \sum_{k=1}^{10} 2^k = \frac{2 - 2^{11}}{1 - 2} = 2^{11} - 2$$

$$3^o) \sum_{k=1}^{100} 5k+2 = 100 \times \frac{2 + 502}{2} = 50 \times 504 = 25200$$

$$4^o) \sum_{k=0}^{10} \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{11}}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{11}\right)$$

Exercice 2

$$1^o) u_{n+1} = 0,9 \times u_n + 100$$

$\nwarrow$ $\uparrow$ $\nwarrow$ $\uparrow$
 nb individus année n+1 part de 10% nb indiv année n ajout de 100 indiv.

$$2^o) u_1 = 0,9 \times 2000 + 100 = 1900 \quad u_2 = 0,9 \times 1900 + 100 = 1810$$

$$3^o) v_n = u_n - 1000$$

$$\begin{aligned} a) \text{ Soit } n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - 1000 = 0,9 u_n + 100 - 1000 = 0,9 u_n - 900 \\ &= 0,9 (u_n - 1000) \\ &= 0,9 v_n \quad \text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0,9 v_n \end{aligned}$$

Ainsi (v_n) est géométrique de raison 0,9 donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 q^n = 1000 \times 0,9^n$

$$b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + 1000 = 1000 \times 0,9^n + 1000 = 1000 (1 + 0,9^n)$$

$$4^o) \text{ Grâce à la calculatrice, on trouve } u_{37} \approx 1020,28$$

$$u_{38} \approx 1018,25$$

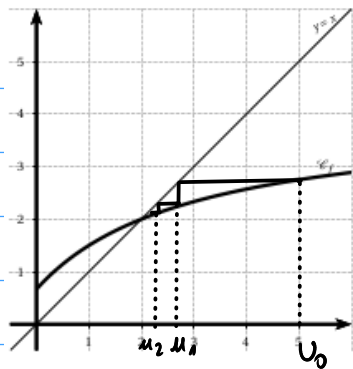
Donc au bout de 38 ans la population passera sous le chiffre de 1020 individus.

Exercice 4

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{4u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$$

$$1^o) u_1 = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}$$

2b)



$$3^a) v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 2}{u_n + 3} - \frac{2(u_n + 3)}{u_n + 3}}{\frac{4u_n + 2}{u_n + 3} + \frac{u_n + 3}{u_n + 3}} = \frac{2u_n - 4}{5u_n + 5}$$

$$\text{d'où } v_{n+1} = \frac{2(u_n - 2)}{5(u_n + 1)} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2}{5} v_n$$

D'où (v_n) est géométrique de raison $\frac{2}{5}$ avec $v_0 = \frac{5-2}{5+1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

$$c) v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1} \Leftrightarrow v_n \times (u_n + 1) = u_n - 2$$

$$\Leftrightarrow u_n v_n - u_n = -2 - v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2 - v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n + 2}{1 - v_n}$$

$$d) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2}{1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 4}{2 - \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{2^n + 4 \times 5^n}{2 \times 5^n - 2^n}$$