

Correction IE - Fonctions usuelles

Sens Général

Ex 1: (E)  $\ln(3x-1) + \ln(2-x) - \ln 2 \geq \ln(4x-3)$

Domaine de définition:  $\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < 2 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow D = \left] \frac{3}{4}; 2 \right[$ .

Résolution

$$\forall x \in D, (E) \Leftrightarrow \ln((3x-1)(2-x)) \geq \ln 2 + \ln(4x-3)$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 7x - 2 \geq 8x - 6$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 - x + 4 \geq 0$$

or les racines de  $-3x^2 - x + 4$  sont 1 et  $-\frac{4}{3}$  donc

$$-3x^2 - x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[ -\frac{4}{3}, 1 \right]$$

Ainsi,  $S = \left] \frac{3}{4}; 1 \right]$

Ex 2:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{e^x - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{3}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{1 - \ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\ln(x) \left(\frac{1}{\ln(x)} - 1\right)} = -\infty$$

Ex 3:

PARTIE A  $\mu : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln(x) + x - 3$$

1)  $\mu$  dérivable sur  $]0, +\infty[$  par somme.

$$\forall x > 0, \mu'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$$

Dans  $\mu$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$

2) Sur  $]0, +\infty[$ ,

\*  $\mu$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$

\*  $\mu$  est strictement croissante

\*  $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} \mu = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu = +\infty \end{array} \right\}$  donc  $0 \in ]\lim_{x \rightarrow 0^+} \mu ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu[$

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique  $\alpha \in ]0, +\infty[$  tel que  $\mu(\alpha) = 0$

on a  $\left. \begin{array}{l} \mu(2) = \ln 2 - 1 < 0 \\ \mu(3) = \ln 3 > 0 \end{array} \right\}$  donc  $2 < \alpha < 3$

3°) Comme  $\mu$  est croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$\mu(x)$	-	0	+

### PARTIE B

$$f: ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$$

1°) Par questions sur les limites,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f &= +\infty \end{aligned}$$

2°) a)  $f$  dérivable sur  $]0; +\infty[$  par produit

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \times (\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{\mu(x)}{x^2}$$

3°) On en déduit la variation de  $f$ :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f$	$\nearrow +\infty$	$\nearrow +\infty$	

$$\ln(\alpha) = 3 - \alpha$$

$$\text{donc } f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \times (1 - \alpha) + 2 \\ = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} + 2$$

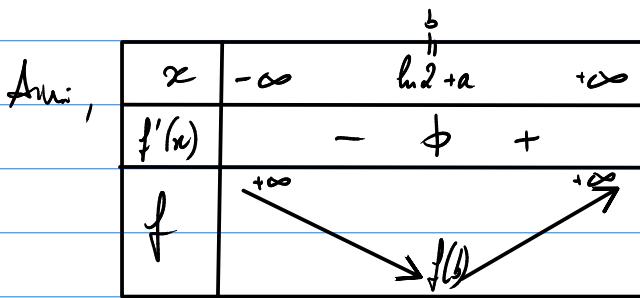
Ex 4:

Sont  $a \in \mathbb{R}$ .  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto e^{x-a} - 2x + e^a$$

1.)  $f_a$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'_a(x) = e^{x-a} - 2$ .

Dès lors  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x-a > \ln 2$   
 $\Leftrightarrow x \geq \ln 2 + a$



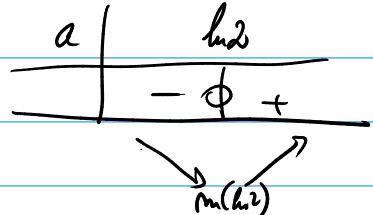
Annexe :  $f$  possède un minimum sur  $\mathbb{R}$  atteint par  $x = \ln 2 + a$

$$m_a = f(\ln 2 + a) = 2 - 2(\ln 2 + a) + e^a$$

2.) Soit  $m_a : a \mapsto m_a$  une fonction donnant le minimum de  $f$ .

$m$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $m'(a) = -2 + e^a$

$$\begin{aligned} m'(a) \geq 0 &\Leftrightarrow e^a \geq 2 \\ &\Leftrightarrow a \geq \ln 2 \end{aligned}$$



Le plus petit des minima de  $f_{\ln 2}$  sera donc par  $f_{\ln 2}$

$$m(\ln(2)) = 4 - 4\ln 2$$