Correction IE - Fonctions usuelles   Serie Generale

Ex 1 : (E) $\ln(3x-1)+\ln(2-x)-\ln 2 \geq \ln(4x-3)$

Domaine de définition : $\begin{cases} x > \frac{1}{3} \\ x < 2 \\ x > \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} = \left]\frac{3}{4}; 2\right[$.

Resolution

$\forall x \in \mathcal{D}$, (E) $\Leftrightarrow \ln\left((3x-1)(2-x)\right) \geq \ln 2 + \ln(4x-3)$

$\Leftrightarrow -3x^2+7x-2 \geq 8x-6$

$\Leftrightarrow -3x^2-x+4 \geq 0$

or les racines de $-3x^2-x+4$ sont 1 et $-\frac{4}{3}$ donc

$-3x^2-x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{4}{3}; 1\right]$

Ainsi, $\mathcal{S} = \left]\frac{3}{4}; 1\right]$

Ex 2 :

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+3}{e^x-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{3}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}} = 1$

2°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\ln(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\ln(x)\left(\frac{1}{\ln(x)}-1\right)} = -\infty$

Ex 3 :

PARTIE A $u :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \ln(x)+x-3$

1°) u dérivable sur $]0,+\infty[$ par somme.

$\forall x>0$, $u'(x) = \frac{1}{x}+1 > 0$

Donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

2°) Sur $]0;+\infty[$,

* u est continue car dérivable
* u est strictement croissante
* $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{0} u = -\infty \\ \lim\limits_{+\infty} u = +\infty\end{array}\right\}$ donc $0 \in \left] \lim\limits_{0} u \,;\, \lim\limits_{+\infty} u \right[$

D'après le théorème de la bijection, il existe un unique $\alpha \in]0;+\infty[$ tel que $u(\alpha) = 0$

On a $\left.\begin{array}{l} u(2) = \ln 2 - 1 < 0 \\ u(3) = \ln 3 > 0 \end{array}\right\}$ donc $2 < \alpha < 3$

3°) Comme u est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

PARTIE B

$$f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2$$

1°) Par opérations sur les limites,

$\lim\limits_{0} f = +\infty$

$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

2°) a) f dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \times (\ln x - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x}$$
$$= \frac{\ln x - 2 + x - 1}{x^2} = \frac{u(x)}{x^2}$$

3°) On en déduit les variations de f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\ln(\alpha) = 3 - \alpha$

donc $f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \times (1 - \alpha) + 2$

$= -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} + 2$

Ex 4 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. $f_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto e^{x-a} - 2x + e^{a}$$

1°) f_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a'(x) = e^{x-a} - 2$.

Donc $f'(x) \geqslant 0 \iff x - a \geqslant \ln 2$

$\iff x \geqslant \ln 2 + a$

Ainsi,

x	$-\infty$		$b = \ln 2 + a$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(b)$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi: f possède un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint par $x = \ln 2 + a$

$$m_a = f(\ln 2 + a) = 2 - 2(\ln 2 + a) + e^{a}$$

2°) Soit $m : a \longmapsto m_a$ une fonction donnant le minimum de f.

m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $m'(a) = -2 + e^{a}$

$m'(a) \geqslant 0 \iff e^{a} \geqslant 2$

$\iff a \geqslant \ln 2$

a		$\ln 2$	
m'	$-$	0	$+$
m	$\searrow$	$m(\ln 2)$	$\nearrow$

Le plus petit des minima de f_a sera donc pour $f_{\ln 2}$

$$m(\ln(2)) = 4 - 4\ln 2$$