Correction IE n°6 - Nombres complexes

Exercice 1

1°) $3z+1-2i = 4-3i-2iz$

$\Leftrightarrow z(3+2i) = 3-i$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{3-i}{3+2i} = \dfrac{(3-i)(3-2i)}{13}$

$\Leftrightarrow \boxed{z = \dfrac{7-9i}{13}}$

2°) $3\bar{z} + 2i = iz$ on pose $z = a+ib$.

$\Leftrightarrow 3(a-ib) + 2i = i(a+ib)$

$\Leftrightarrow 3a + i(2-3b) = -b + ia$ par unicité de l'écriture,

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -b \\ 2-3b = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a+b = 0 \\ a+3b = 2 \end{cases} \underset{L_1-3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -8a = 2 \\ b = -3a \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{3}{4} \end{cases}$ donc $\boxed{z = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}i}$

3°) $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = 4-8 = -4$ $\quad z = \dfrac{2-2i}{2}$ ou $z = \dfrac{2+2i}{2}$

donc $\boxed{z = 1-i \text{ ou } z = 1+i}$

Exercice 2

$P(z) = z^3 - (6-2i)z^2 + (10-12i)z + 20i$

1°) $P(-2i) = 8i - (6-2i)\times(-4) + (10-12i)(-2i) + 20i$

donc $P(-2i) = 0$ donc **$-2i$ est une racine de P**

2°)

$$\begin{array}{l|l}
z^3 - (6-2i)z^2 + (10-12i)z + 20i & z+2i \\
\hline
-\ \underline{z^3 + 2iz^2} & z^2 - 6z + 10 \\
\qquad -6z^2 + (10-12i)z + 20i & \\
\qquad \underline{-\ 6z^2 - 12iz} & \\
\qquad\qquad 10z + 20i & \\
\qquad\qquad \underline{10z + 20i} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Donc $\boxed{P(z) = (z+2i)(z^2 - 6z + 10)}$

3°) $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i) = 0$ ou $z^2 - 6z + 10 = 0$ $\quad \Delta = 36 - 40 = -4$

$\Leftrightarrow z = -2i$ ou $z = 3-i$ ou $z = 3+i$

$\boxed{\mathcal{S} = \{2i, 3-i, 3+i\}}$

Exercice 3

1°) $z_1 = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} i = 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ $\quad |z_1| = 3$ et soit $\theta \equiv \arg(z_1) [2\pi]$

donc $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

donc $z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3e^{i\pi/3}$

2°) $z_2 = -2 + 2i$ $\quad |z_2| = 2\sqrt{2}$. soit $\theta \equiv \arg(z_2) [2\pi]$.

donc $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Leftrightarrow \theta \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

donc $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$

3°) $z_1 \times z_2 = 6\sqrt{2}\, e^{-\frac{11i\pi}{12}} = 6\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{11}{12}\pi\right)\right)$

4°) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2\sqrt{2}} e^{-\frac{5i\pi}{12}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right)$

Exercice 4

$z = \frac{3-3i}{\sqrt{3}+i}$

1°) $3-3i = 3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i\right) = 3\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$

$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right) = 2e^{i\pi/6}$

2°) $z = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4 - i\pi/6} = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-\frac{5i\pi}{12}}$

3°) $z^{10} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{10} e^{-\frac{50i\pi}{12}}$ or $-\frac{50\pi}{12} = -\frac{25\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

Donc $z^{10} = \frac{3^{10}}{2^5} e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{59049}{32}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i\right)$

Exercice 5

$A(a = 2+i)$ $\quad B(b = 4-i)$ $\quad C(c = -2-3i)$

1°) $\frac{a-b}{c-a} = \frac{-2+2i}{-4-4i} = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)(2-2i)}{8} = \frac{-4i}{8} = -\frac{1}{2} i \in i\mathbb{R}$.

2°) donc $\frac{a-b}{c-a} = -\frac{1}{2} i$ donc $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux donc $(BA) \perp (AC)$

Exercice 6

$\forall z \neq -1 \quad f(z) = \dfrac{iz}{z+1}$.

1°) $z_1 = -1 + i$

$$\boxed{f(z_1)} = \frac{i(-1+i)}{-1+i+1} = \frac{-1-i}{i} = \frac{(-1-i)(-i)}{1} \boxed{= -1+i}$$

2°) $z = x + iy \qquad z \neq -1. \quad (x,y) \neq (-1,0)$

a) $$\boxed{f(z)} = \frac{-y+ix}{x+1+iy} = \frac{(-y+ix)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \boxed{\frac{-y+i(x^2+x+y^2)}{(x+1)^2+y^2}}$$

b) $$f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } (x,y) \neq (-1,0)}$$

c) $$f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \frac{-y}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 0 \text{ et } (x,y) \neq (-1,0)}$$

d) Ainsi

$\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de $(-1,0)$
$\mathcal{F}$ est l'axe des abscisses privé de $(-1,0)$

Exercice 7

1°) $z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0 \qquad \Delta = 12 - 16 = -4$.

donc $\boxed{z_1 = \sqrt{3} - i \quad \text{ou} \quad z_2 = \sqrt{3} + i} = \overline{z_1}$

2°) $A(z_1)$ et $B(z_2) \qquad OA = OB$ car $z_2 = \overline{z_1}$ donc $|z_2| = |z_1|$

De plus $AB = |z_2 - z_1| = |2i| = 2$ et $OA = |\sqrt{3} - i| = 2$

donc $OA = AB = OB$ donc $\boxed{OAB \text{ est équilatéral}}$