Correction IE - Complexes   SG

Exercice 1

1°) $3z+1-2i = 4-3i-2iz$

$\iff z(3+2i) = 3-i$

$\iff z = \dfrac{3-i}{3+2i} = \dfrac{(3-i)(3-2i)}{9+4}$

$\iff \boxed{z = \dfrac{7-9i}{13}}$

2°) $3\bar{z} + 2i = iz \qquad z = x+iy$

$\iff 3x - 3iy + 2i = -y + ix$

$\iff 3x + y + i(2 - x - 3y) = 0 + 0i$

$\iff \begin{cases} 3x+y=0 \\ x+3y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-3x \\ -8x=2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\frac{3}{4} \\ x=-\frac{1}{4} \end{cases}$

$\boxed{z = \dfrac{-1+3i}{4}}$

Exercice 2

$P(z) = z^3 - (2+i\sqrt{2})z^2 + 2(1+i\sqrt{2})z - 2i\sqrt{2}$

1°) $P(i\sqrt{2}) = \cancel{-2\sqrt{2}i} - (2+\cancel{i\sqrt{2}})\times(-2) + 2(\cancel{1}+i\sqrt{2})\times i\sqrt{2} - \cancel{2i\sqrt{2}}$

$= 4 - 4 = 0$

donc $i\sqrt{2}$ est une racine de P donc $P(z) = (z-i\sqrt{2})\,Q(z)$ avec Q polynôme

2°) Schéma de Hörner :

	1	$-2-i\sqrt{2}$	$2+2i\sqrt{2}$	$-2i\sqrt{2}$
$i\sqrt{2}$		$i\sqrt{2}$	$-2i\sqrt{2}$	$2i\sqrt{2}$
	1	-2	2	0

Ainsi $\boxed{P(z) = (z-i\sqrt{2})(z^2-2z+2)}$

3°) $P(z)=0 \iff z - i\sqrt{2} = 0$ ou $z^2 - 2z + 2 = 0 \qquad \Delta = 4-8=-4.$

$\iff z = i\sqrt{2}$ ou $z = \dfrac{2-2i}{2}$ ou $z = \dfrac{2+2i}{2}$

$\iff z = i\sqrt{2}$ ou $z = 1-i$ ou $z = 1+i$

$\boxed{S = \{1-i,\ 1+i,\ i\sqrt{2}\}}$

Exercice 3

1°) $\omega = a+ib$ tel que $\omega^2 = 48+14i$

$\omega^2 = a^2 - b^2 + 2iab. \iff \begin{cases} a^2-b^2=48 \\ 2ab=14 \\ a^2+b^2 = \sqrt{48^2+14^2} = \sqrt{2500} = 50 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a^2 = 98 \\ 2b^2 = 2 \\ ab = 7 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = \pm 7 \\ b = \pm 1 \\ a, b \text{ de même signe} \end{cases}$ donc $\boxed{\omega = 7+i}$

2°) $z^2 - 5(1+i)z - 12 + 9i = 0$

$\Delta = 25 \times 2i + 48 - 36i = 48 + 14i = \omega^2.$

Ainsi, $z_1 = \dfrac{5+5i-7-i}{2}$ ou $z_2 = \dfrac{5+5i+7+i}{2}$

$z_1 = -1 + 2i$ ou $z_2 = 6 + 3i$ $\quad \boxed{\mathcal{S} = \{-1+2i ; 6+3i\}}.$

3°) $\boxed{\dfrac{z_2}{z_1}} = \dfrac{6+3i}{-1+2i} = \dfrac{(6+3i)(-1-2i)}{5} = \dfrac{-15i}{5} = \boxed{-3i \in i\mathbb{R}.}$

Exercice 4.

$\forall z \neq -1, \quad f(z) = \dfrac{iz}{z+1}.$

1°) $z_1 = -\frac{1}{2} + i$

$\boxed{f(z_1)} = \dfrac{i(-\frac{1}{2}+i)}{\frac{1}{2}+i} = \dfrac{(-1-\frac{1}{2}i)(\frac{1}{2}-i)}{\frac{5}{4}} = \dfrac{-1+\frac{3}{4}i}{5/4} = \boxed{\dfrac{-4+3i}{5}}$

2°) $f(z) = z \Leftrightarrow \dfrac{iz}{z+1} = z \Leftrightarrow z^2 + z = iz \Leftrightarrow z^2 + (1-i)z = 0$

$\Leftrightarrow z(z+1-i) = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{z = 0 \text{ ou } z = -1+i}$

3°) $z = x+iy \qquad z \neq -1. \quad (x,y) \neq (-1,0)$

$\boxed{f(z)} = \dfrac{-y+ix}{x+1+iy} = \dfrac{(-y+ix)(x+1-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \boxed{\dfrac{-y+i(x^2+x+y^2)}{(x+1)^2+y^2}}$

a) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{ et } (x,y) \neq (-1,0)}$

b) $f(z) \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(f(z)) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-y}{(x+1)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{y = 0 \text{ et } (x,y) \neq (-1,0)}$

c) Ainsi $\mathcal{E}$ est le cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2}; 0)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé de $(-1,0)$
$\mathcal{F}$ est l'axe des abscisses privé de $(-1,0)$

Exercice 5 :

$z = \dfrac{3-3i}{\sqrt{3}+i}$ 1°) on a : $|3-3i| = |3| \times |1-i| = 3\sqrt{2} \qquad \arg(1-i) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$

$|\sqrt{3}+i| = 2, \quad \sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right), \ \arg(\sqrt{3}+i) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi].$

donc $z = \dfrac{3\sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\, e^{i\frac{\pi}{6}}} = \boxed{\dfrac{3}{\sqrt{2}} \times e^{-\frac{5i\pi}{12}}}$

2°) $z^{10} = \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{10} \left(e^{-\frac{i5\pi}{12}}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{2^5} \times e^{-i\frac{50\pi}{12}}$

or $-\frac{50\pi}{12} = -\frac{25\pi}{6} = -\frac{24\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

Ainsi $z^{10} = \frac{3^{10}}{2^5} \times e^{-\frac{i\pi}{6}} = \frac{3^{10}}{2^5} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

Exercice 6

$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x \sin x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 \times \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{8i}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$

$= \frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-e^{-3ix}+2e^{ix}+e^{-ix}-2e^{-ix}-e^{ix}\right)$

$= \frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-e^{-3ix}+e^{ix}-e^{-ix}\right)$

$\cos^2 x \sin x = \frac{1}{4}\left(\sin 3x + \sin x\right)$

Exercice 7

$A(-1)$ $B(1)$. $\forall z \in \mathbb{C}^*$, on associe $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

1°) $z' = z \Leftrightarrow 2z = z + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{z} - z = 0 \underset{\text{car } z \neq 0}{\Leftrightarrow} 1 - z^2 = 0 \Leftrightarrow z = 1$ ou $z = -1$

Donc $z' = z \Leftrightarrow M = A$ ou $M = B$.

2°) Soit $M(z)$ avec $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$.

$\frac{z'+1}{z'-1} = \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2} \underset{\text{car } z \neq 0}{=} \frac{z^2+2z+1}{z^2-2z+1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$.

3°) ainsi $\frac{M'A}{M'B} = \frac{|z'-(-1)|}{|z'-1|} = \left|\frac{z'+1}{z'-1}\right| = \left|\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2\right| = \left|\frac{z+1}{z-1}\right|^2 = \left(\frac{MA}{MB}\right)^2$

$\left(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \times 2\ [2\pi]$ par propriété de l'argument.

4°) si $M \in (Oy)$, comme (Oy) est la médiatrice de $[AB]$, on a $\frac{MA}{MB} = 1$

donc $\frac{M'A}{M'B} = 1^2 = 1$ donc M' est équidistant de A et B donc M' appartient à la médiatrice de $[AB]$

donc $M' \in (Oy)$

Si M est privé de O sur (Oy) alors on pose $M(z)$ avec $z = iy$, où $y \in \mathbb{R}$.

ainsi $z' = \frac{1}{2}\left(iy + \frac{1}{iy}\right) = \frac{1}{2}\left(iy + \frac{-i}{y}\right)$

Ainsi $|z'| = \left|\frac{i}{2}\right| \times \left|y - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{2}\left|y - \frac{1}{y}\right|$ ainsi $\lim_{y \to 0} |z'| = +\infty$

le point M' et envoyé à l'infini sur (Oy).

5- $\Gamma = \mathcal{C}([AB]) = \mathcal{C}(0,1)$. Supposons $M \neq A$ et $M \neq B$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $M \in \Gamma \iff \exists \theta \in \mathbb{R} \;/\; z = e^{i\theta}$ $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ et $\theta \neq \pi [2\pi]$.

alors $z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta$

or $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta \in]-1;1[$ donc $z' \in [AB]$. Si $M = A$ ou $M = B$, alors $M' = A$ ou $M' = B$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $M'(z') \in [A,B]$.

alors $\exists \theta \in \mathbb{R}$, tel que $z' = \cos\theta$, on a alors.

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) \iff z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$

$\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$. Car $1 - \cos^2\theta = \sin^2\theta$.

ainsi $z = \frac{2\cos\theta \pm i\sin\theta}{2} = \cos\theta \pm i\sin\theta$.

donc $z \in \Gamma$

Exercice 8 $z = e^{i\pi/8}$

1) $z^2 = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi $z = \sqrt{e^{i\pi/4}}$ donc si on pose $\alpha + i\beta = z$ on a $\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\alpha\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\alpha^2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2\beta^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \alpha\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} \alpha^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \beta^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \\ \alpha, \beta \text{ de même signe} \end{cases}$ ainsi $\alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = \cos\frac{\pi}{8}$, $\beta = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} = \sin\frac{\pi}{8}$