Le 16/01/25	Mathématiques - Partiel 2	CPES
Prénom :	**Nom :**	**Série Techno/Pro**

Calculatrices autorisées — Durée 3H — L'évaluation en temps est indicative et doit vous aider à gérer votre temps.

▶ Exercice 1 /10 — 1 Heure

1. Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + \ln(x)$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$ pour $x \in]0;+\infty[$.
   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction g.
   (d) Déterminer les limites de $g(x)$ en 0 et $+\infty$.
   (e) Montrer que $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$ puis déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
   (f) Déduire de ce qui précède le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + (\ln(x))^2$.
   (a) Démontrer que pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, on a
   $$f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$$
   (b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
   (c) En déduire que f admet un minimum en $x = \alpha$.

▶ Exercice 2 /4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2}{\sin x + 3}$.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin x + 3 \geqslant 2$, en déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que la fonction f est $2\pi-$périodique.
3. Calculer $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $[-\pi;\pi]$.

▶ Exercice 3 /3

On considère l'équation suivante :

$$\ln(6x-2) + \ln(2x-1) = \ln x \qquad (E)$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}$ de définition de (E).
2. Résoudre l'équation sur $\mathscr{D}$.

▶ Exercice 4 /3

Résoudre sur $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

1. $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

▶ Exercice 5 /10 — 1 Heure

Partie A

On considère la fonction g définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ g(x) = \mathrm{e}^x - x.$$

1. g' désigne la dérivée de g. Donner, pour tout réel x, $g'(x)$.
2. Donner l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation $g'(x) \geqslant 0$.
   Justifier la réponse.
3. Dresser le tableau des variations de g.
   (les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ ne sont pas demandées).
4. Justifier que, pour tout réel x, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$\text{pour tout réel } x,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - x}.$$

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. (a) Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   (b) Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x}$? En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Justifier la réponse.
   (c) On en déduit que C admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2.
   Donner une équation de chacune d'elles.
2. f' désigne la dérivée de f. Justifier que, pour tout réel x,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(1-x)}{(\mathrm{e}^x - x)^2}.$$

3. (a) Dresser le tableau des variations de f.
   (b) f présente un maximum y_M atteint en x_M. Donner les valeurs exactes de x_M et y_M, puis une valeur approchée de y_M à 10^{-1} près.
   Dans la suite, on note M le point de coordonnées $(x_M\ ;\ y_M)$.
4. Soit A le point de la courbe C d'abscisse 0.
   Donner une équation de la tangente à C en A.
5. Placer les points A et M. Tracer les tangentes à la courbe C aux points A et M et les asymptotes Δ_1 et Δ_2. Puis tracer C.