Le 16/01/25 | Partiel 2 — Mathématiques | CPES

Prénom : | **Nom :** | **Série générale**

Calculatrices interdites — Durée 3H

▶ Exercice 1 /4

Résoudre les équations suivantes :

1. $(1+x)(2-x)=2$
2. $2\ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)+\ln\left(2-\mathrm{e}^x\right)=\ln\left(2\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right)$
3. Dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi[$, $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

▶ Exercice 2 /5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2+\cos x)\mathrm{e}^{1-x}$.

1. Démontrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer l'égalité suivante :
$$\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x+\sin x$$
3. Démontrer que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{1-x}\leqslant f(x)\leqslant 3\mathrm{e}^{1-x}$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

▶ Exercice 3 /8

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $I=]0\ ;\ +\infty[$ par
$$u(x)=x^2-2+\ln(x).$$
   (a) Dresser le tableau de variations (limites comprises) de la fonction u sur l'intervalle I.
   (b) Justifier l'existence d'un unique réel α de l'intervalle I tel que $u(\alpha)=0$. On admettra par la suite que $\alpha\approx 1{,}31$.
   (c) En déduire le tableau de signes de $u(x)$.
   (d) Montrer que $\ln(\alpha)=2-\alpha^2$.
2. On considère la fonction f définie sur I par
$$f(x)=x^2+[2-\ln(x)]^2.$$
   (a) Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)=\dfrac{2u(x)}{x}$.
   (b) En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle I.
   (c) Montrer que $f(\alpha)=\alpha^2\left(1+\alpha^2\right)$.
3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note :
   - Γ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.
   - A le point de coordonnées $(0\,;\,2)$.
   - M un point de d'abscisse x de Γ.

   (a) Démontrer que $\mathrm{A}M=\sqrt{f(x)}$.
   (b) En déduire les coordonnées du point M_0 pour lequel la distance $\mathrm{A}M_0$ est minimale.
   (c) Montrer que $\mathrm{A}M_0=\alpha\sqrt{1+\alpha^2}$.
   (d) **(HB)** Démontrer que la droite $(\mathrm{A}M_0)$ est alors perpendiculaire à la tangente à Γ en M.

▶ Exercice 4 /4

Calculer les limites suivantes sans rédiger de justifications.

1. $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x - x^2 =$ ....
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln x - x^2 =$ ....
3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+3}{e^x-x} =$ ....
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{e^x-1} =$ ....

▶ Exercice 5 /10

Soit un nombre réel $x \in [0;+\infty[$,

1. Démontrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$ [1].
2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
3. Démontrer que $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$ [2].
4. En déduire que la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x>0 \\ 1 \text{ si } x=0 \end{cases}$ est dérivable à droite en 0.
5. **Étude de la suite harmonique**
   On considère la suite (h_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
   $$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$
   (a) Prouver que pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2}$ [3].
   (b) Justifier, en utilisant la question [1], que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$
   .
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant h_n \leqslant \ln(n) + 1$$
   (d) En déduire que la suite (h_n) diverge vers $+\infty$.
   (e) Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{h_n}{\ln(n)} = 1$. Interpréter ce résultat.