Prénom :

Nom :

Série Techno/Pro

*Calculatrices autorisées — Durée 3H***► Exercice 1** /3

Résoudre les équations et inéquation suivantes :

1. $5x^2 - 8x + 1 = 0$
2. $x^2 - 4x + 3 > 0$
3. En remarquant que $x^3 - 9x^2 + 7x + 1 = (x-1)(x^2 - 8x - 1)$, résoudre $x^3 - 9x^2 + 7x + 1 \leq 0$

► Exercice 2 /8Au 1^{er} janvier 2020, une association sportive compte 900 adhérents. On constate que chaque mois :

- 25 % des adhérents de l'association ne renouvellent pas leur adhésion ;
- 12 nouvelles personnes décident d'adhérer à l'association.

PARTIE A

On modélise le nombre d'adhérents de l'association par la suite (u_n) telle que le terme u_n donne ainsi une estimation du nombre d'adhérents de l'association au bout de n mois. On a alors $u_0 = 900$.

1. Justifier brièvement que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 0,75u_n + 12.$$

2. Déterminer une estimation du nombre d'adhérents au 1^{er} mars 2020.
3. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 48$ pour tout entier naturel n .
 - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - (b) Préciser v_0 et exprimer v_n en fonction de n .
 - (c) En déduire que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 852 \times 0,75^n + 48.$$

4. La présidente de l'association déclare qu'elle démissionnera si le nombre d'adhérents devient inférieur à 100. Si on fait l'hypothèse que l'évolution du nombre d'adhérents se poursuit de la même façon, déterminer au bout de combien de mois faudra-t-il que la présidente démissionne ?

PARTIE B

Chaque adhérent verse une cotisation de 5 euros par mois. Le trésorier de l'association souhaite prévoir le montant total des cotisations pour l'année 2020.

Le trésorier souhaite utiliser le code Python suivant dans lequel la quatrième et la dernière ligne sont restées incomplètes (pointillés).

1. Recopier et compléter le programme de façon à ce qu'il affiche le montant total des cotisations de l'année 2020.

```
S = 0
u = 900
for k in range(12) :
    S = ...
    u = 0.75*u+12
print(...)
```

2. Quelle est la somme totale des cotisations perçues par l'association pendant l'année 2020? *Toute trace de recherche dans cette question, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
3. En utilisant la somme suivante, retrouver le résultat précédent :

$$S = \sum_{k=0}^{11} (852 \times 0,75^k + 48)$$

► Exercice 3 /5

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction f .
3. Déterminer le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de f .

► Exercice 4 /4

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $g(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2}$.

1. Déterminer les limites de $g(x)$ en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Démontrer que pour tout $x \neq -2$, $g'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x + 2)^2}$.
3. Dresser le tableau de signes de $g'(x)$. En déduire les variations de la fonction g .

► Exercice 5 /2

Un père a 25 ans de plus que son fils et le produit de leurs âges vaut 116. Calculer les âges du père et du fils.