Prénom : **Nom :** **Série générale**

Calculatrices interdites — Durée 3H

▶ Exercice 1 /4

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2-12}=2x-1$
2. $|2x+3|=|2-x|$
3. En remarquant une racine évidente, $x^3-9x^2+7x+1 \leqslant 0$

▶ Exercice 2 /7

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

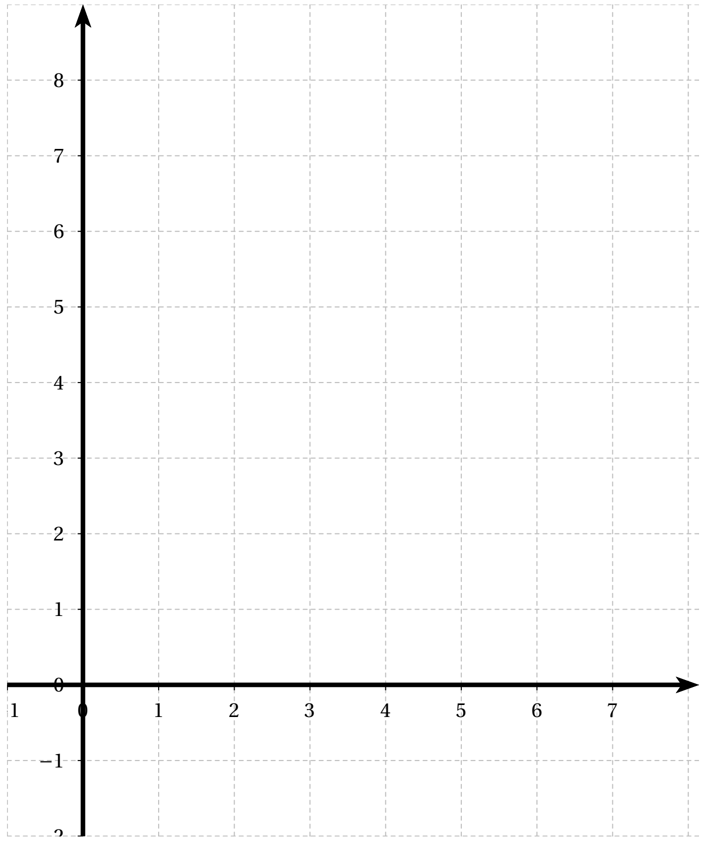
$$u_0=2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+\frac{1}{3}n+1.$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Prouver que cette suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$u_n=2\left(\frac{2}{3}\right)^n+n$$
3. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $$S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+\ldots+u_n$$
   (a) Rappeler $\sum_{k=0}^{n}k=1+2+\ldots+n$.
   (b) Calculer $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n$.
   (c) En déduire l'expression de S_n en fonction de n.

▶ Exercice 3 /8

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{4\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2-5x+5}{x-4}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x<4}}f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to4\\x>4}}f(x)$. Interpréter graphiquement ces résultats.
3. (a) Démontrer que pour tout $x\neq4$, $f'(x)=\dfrac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser son tableau de variations complet
4. Déterminer trois réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-4}$.
5. En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ et $-\infty$ que l'on précisera.
6. Construire la courbe représentative de f, dans le repère au verso. On fera apparaître les éléments principaux mis en évidence dans l'exercice.



▶ Exercice 4 /6

On considère la fonction f définie par $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Démontrer qu'elle est définie sur $\mathscr{D}_f =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$, et montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$,

$$f(x)f(-x) = -1 \qquad \textbf{(1)}$$

2. Étudier la limite de f en $+\infty$ puis, en utilisant **(1)**, en déduire celle en $-\infty$. Interpréter graphiquement cette dernière limite.
3. On admet que f est dérivable en $\mathscr{D}'_f =]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.
   (a) Démontrer que pour tout $x \in \mathscr{D}'_f$, $f'(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x^2-1}}$.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathscr{D}'_f$.
   (c) Construire le tableau de variation de f.
4. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x$.
   (b) Interpréter graphiquement le résultat.

▶ Exercice 5 /2

3, 4 et 6 ne sont pas les côtés d'un triangle rectangle. Justifier.
Peut-on ajouter une même dimension sur chaque côté pour qu'il devienne rectangle ?

▶ Exercice 6 /3

Pour chacune des questions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse, une justification graphique est possible éventuellement.

1. Si f est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$.
2. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ alors il existe un réel A tel que $\forall x > A$, $f(x) > 0$.
3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 3$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.